

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 9

Aufgabe 1 (10 Punkte): Hintereinanderausführung von Lorentz-Transformationen

Wir betrachten im Folgenden drei Inertialsysteme Σ , Σ' und Σ'' im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie. Dabei möge sich Σ'' gegenüber Σ' mit der Geschwindigkeit $\vec{u} = \beta_u c \vec{e}_1$ und Σ' mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \beta_v c \vec{e}_1$ gegenüber Σ bewegen.

- (a) (3 Punkte) Geben Sie die Lorentz-Transformationsmatrizen $\hat{\Lambda}_1$ und $\hat{\Lambda}_2$ zwischen den Raum-Zeit-Koordinaten

$$\underline{x}'' = \hat{\Lambda}_1 \underline{x}', \quad \underline{x}' = \hat{\Lambda}_2 \underline{x} \quad (1)$$

an.

Hinweis: Für das Folgende ist es bequem mit der Darstellung der Lorentz-Transformationsmatrizen mit Hyperbelfunktionen \cosh und \sinh mit den Rapiditäten α_u und α_v zu arbeiten (vgl. Skript Formel (4.1.34)). Dann ist $\beta_u = \tanh \alpha_u$ und $\beta_v = \tanh \alpha_v$.

- (b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass auch die Transformationsmatrix $\hat{\Lambda}$, die direkt von \underline{x} zu \underline{x}'' führt,

$$\underline{x}'' = \hat{\Lambda} \underline{x} = \hat{\Lambda}_1 \underline{x}' = \hat{\Lambda}_1 \hat{\Lambda}_2 \underline{x} \Rightarrow \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_1 \hat{\Lambda}_2, \quad (2)$$

wieder eine Lorentz-Transformation ist. Was ist die entsprechende Rapidität?

Tip: Für die Hyperbelfunktionen gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cosh(\alpha_1 + \alpha_2) &= \cosh(\alpha_1) \cosh(\alpha_2) + \sinh(\alpha_1) \sinh(\alpha_2), \\ \sinh(\alpha_1 + \alpha_2) &= \sinh(\alpha_1) \cosh(\alpha_2) + \sinh(\alpha_2) \cosh(\alpha_1). \end{aligned} \quad (3)$$

- (c) (3 Punkte) Was ergibt sich daraus für die Relativgeschwindigkeit zwischen Σ und Σ'' ?

Aufgabe 2 (10 Punkte): Additionstheorem von Geschwindigkeiten

Seien Σ und Σ' zwei Inertialsysteme, wobei sich Σ' mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \beta c(1, 0, 0)$ gegenüber Σ bewegt. In Σ' bewege sich ein Teilchen mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{u}' = (u_1, u_2, 0)$. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt es sich bzgl. Σ ?

Diskutieren Sie die Lösung sowohl im Rahmen der Newtonschen als auch der speziell-relativistischen Mechanik!