**H. van Hees** **Wintersemester 2018/2019**

# Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 7

---

**Aufgabe 1: Kugelflächenfunktionen für $l=1$ und $l=2$**

Berechnen Sie explizit die Kugelflächenfunktionen $\mathrm{Y}_{lm}(\vartheta,\varphi)$ für $l=1$, $m \in \{-1,0,1\}$ und $l=2$, $m \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Gehen Sie dazu wie im Skript (Abschnitt 3.12) beschrieben vor:

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Y}_{ll}(\vartheta,\varphi)$ durch Lösen der Gleichung $\hat{L}_+ \mathrm{Y}_{ll}(\vartheta,\varphi)=0$, wobei der „Aufsteigeoperator" durch

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_1 + \mathrm{i}\hat{L}_2 = \hbar \exp(\mathrm{i}\varphi)(\mathrm{i}\cot\vartheta\,\partial_\varphi + \partial_\vartheta) \tag{1}$$

gegeben ist. Dabei darf verwendet werden, dass

$$\mathrm{Y}_{lm}(\vartheta,\varphi) = \Theta_{lm}(\vartheta)\exp(\mathrm{i}m\varphi) \tag{2}$$

ist.

**Hinweis:** Die Lösung ist

$$\mathrm{Y}_{ll}(\vartheta,\varphi) = N_l \sin^l\vartheta \exp(\mathrm{i}l\varphi).$$

Die Normierungskonstante wurde im Skript berechnen. Sie lautet mit einer der üblichsten Wahl der Phasenkonvention

$$N_l = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}\frac{(-1)^l}{2^l\,l!}. \tag{3}$$

(b) Verwenden Sie dann den „Absteigeoperator"

$$\hat{L}_- = \hat{L}_1 - \mathrm{i}\hat{L}_2 = \hbar\exp(-\mathrm{i}\varphi)(\mathrm{i}\cot\vartheta\,\partial_\varphi - \partial_\vartheta) \tag{4}$$

um über die Rekursionsformel

$$\hat{L}_- \mathrm{Y}_{lm}(\vartheta,\varphi) = \hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\mathrm{Y}_{l,m-1}(\vartheta,\varphi) \tag{5}$$

die Kugelflächenfunktionen für $m=l-1,\ldots,-l$ zu berechnen.

---