Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 10

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Magnetisches Moment einer stationären Stromdichte

Wir betrachten eine beliebige stationäre Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, für die $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ gelten muss (Ladungserhaltung für zeitunabhängige Felder und Quellen). Sie sei weiter auf eine Kugel mit Radius a um den Ursprung begrenzt, d.h. es sei $\vec{j}(\vec{r}) = 0$ für $r = |\vec{r}| \geq a$. Aus den Gleichungen für das statische Magnetfeld

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \tag{2}$$

folgt wegen (1), dass es ein Vektorpotential $\vec{A}$ gibt, so dass $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und für das wir die „Eichfreiheit“ verwenden können, um die Nebenbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ zu fordern („Coulomb-Eichung“). Für die zweite Gleichung ergibt sich dann

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A} = -\Delta\vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \tag{3}$$

Mit der Green-Funktion für den Laplace-Operator folgt daraus

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}\,')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}\,'|}. \tag{4}$$

Dabei ist K_a die Kugel mit Radius a mit Mittelpunkt im Ursprung. Man kann nun für $r = |\vec{r}| \gg a$ die Taylor-Entwicklung von $1/|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ bzgl. $\vec{r}\,'$ verwenden und mit der linearen Ordnung abbrechen:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} - (\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla})\frac{1}{r} + \mathcal{O}(r'^2) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\,' \cdot \vec{r}}{r^3} + \cdots \tag{5}$$

Damit folgt schließlich

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \int_{K_a} \frac{\mu_0 \vec{j}(r')}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\,' \cdot \vec{r}}{r^3} \right). \tag{6}$$

Mit den folgenden Aufgaben werten wir die beiden Integrale genauer aus. Dazu nutzen wir zunächst $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ aus und verwenden den Gaußschen Integralsatz

$$\int_{K_a} \mathrm{d}^3 \vec{r} \vec{\nabla} \cdot [F(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r})] = \int_{\partial K_a} \mathrm{d}^2 \vec{r} \cdot F(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}) = 0 \tag{7}$$

an. Dabei ist F ein beliebiges Skalarfeld.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass daraus

$$\int_{K_a} \mathrm{d}^3 r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} F = 0 \tag{8}$$

folgt.

Lösung: Mit dem Ricci-Kalkül findent wir

$$\vec{\nabla} \cdot (F \vec{j}) = \partial_k (F j_k) = j_k \partial_k F + F \partial_k j = \vec{j} \cdot \vec{\nabla} F + F \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{\nabla} F, \tag{9}$$

da $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ ist. Damit folgt aber aus (7) in der Tat (8).

(b) (2 Punkte) Wenden Sie (8) für $F(\vec{r}) = r_j$ ($j \in \{1,2,3\}$) an, wobei r_j die j-te kartesische Komponente von $\vec{r}$ ist, und argumentieren Sie daraus, dass

$$\int_{\mathbb{K}_a} \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}') = 0 \tag{10}$$

folgt.

Lösung: Wieder mit dem Ricci-Kalkül folgt

$$\vec{j} \cdot \vec{\nabla} r_j = j_k \partial_k r_j = j_k \delta_{kj} = j_j. \tag{11}$$

Mit (8) folgt dass für alle $j \in \{1,2,3\}$

$$\int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' j_j(\vec{r}') = 0 \Rightarrow \int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}') = \vec{0}. \tag{12}$$

(c) (2 Punkte) Wenden Sie nun (8) für $F(\vec{r}) = r_j r_k$ an, um zu zeigen, dass

$$\int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' r'_j j_k(\vec{r}') = -\int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' r'_k j_j(\vec{r}') \tag{13}$$

ist.

Lösung: Es ist

$$\vec{j} \cdot \vec{\nabla}(r_j r_k) = \vec{j}_l \partial_l (r_j r_k) = \vec{j}_l (\delta_{lj} r_k + \delta_{lk} r_j) = r_k j_j + r_j j_k \tag{14}$$

und damit folgt wegen (8) Gl. (13).

(d) (3 Punkte) Mit (10) und (13) folgt dann aus (6)

$$A_j(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' j_j(\vec{r}') r'_k r_k = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' [j_j(\vec{r}') r'_k - j_k(\vec{r}') r'_j] r_k. \tag{15}$$

Zeigen Sie, dass man diese Formel als

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \tag{16}$$

mit dem **magnetischen Dipolmoment** der Stromdichte $\vec{j}$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')]. \tag{17}$$

Lösung: wir formen (15) mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols um

$$A_j(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \mathrm{d}^3 r' \epsilon_{jkl} (\vec{j} \times \vec{r}')_l = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' [\vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{r}')]_j, \tag{18}$$

d.h. im Vektorkalkül geschrieben

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' [\vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{r}')] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' [(\vec{j} \times \vec{r}') \times \vec{r}] \\ &= +\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' [\times(\vec{r}' \times \vec{j}) \times \vec{r}] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3},\end{aligned} \tag{19}$$

und das ist (16).

(e) (3 Punkte) Zeigen Sie schließlich, dass (16) zu einem Dipolfeld für $\vec{B}$ führt, d.h.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5}[3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - \vec{m} r^2]. \tag{20}$$

Lösung: Mit der Produktregel finden wir im „Nabla-Kalkül" zunächst

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\vec{\nabla} \times (\vec{m} \times \vec{r}) - (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}. \tag{21}$$

Weiter gilt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{m} \times \vec{r}) = \vec{m}\vec{\nabla} \cdot \vec{r} - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = 2\vec{m} \tag{22}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\frac{1}{r^3} &= \vec{\nabla} r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{3\vec{r}}{r}\frac{1}{r^4} = -\frac{3\vec{r}}{r^5} \\ \Rightarrow (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{\nabla}\frac{1}{r^3} &= -\frac{1}{r^5}[(\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{r}] = -\frac{3}{r^5}[\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - \vec{m} r^2].\end{aligned} \tag{23}$$

Setzt man dies und (22) in (21) ein, folgt

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}\right) = \frac{2\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^5}[\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - \vec{m} r^2] = \frac{1}{r^5}[3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - \vec{m} r^2]. \tag{24}$$

Daraus ergibt sich aber in der Tat (20).