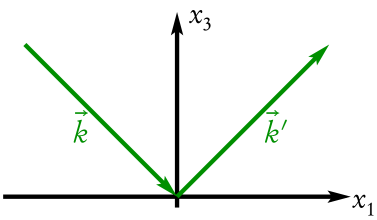
H. van Hees Sommersemester 2024

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Lösungen 9

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Reflexion einer ebenen Welle an ideal leitender Ebene



Wir wollen mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen zeigen, dass das aus der geometrischen Optik bekannte Reflexionsgesetz, wonach der Einfallwinkel einer elektromagnetischen gleich dem Ausfallwinkel der reflektierten Welle ist, wie in der nebenstehenden Skizze eingezeichnet. Zusätzlich wollen wir auch die Eigenschaften der reflektierten aus denen der einlaufenden Welle bestimmen.

Wir gehen dazu von der Wellengleichung für das elektrische Feld, das (wie im Manuskript gezeigt) aus den Maxwellgleichungen folgt, und dem Gaußschen Gesetz für das elektrische Feld für $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$ aus. Wir nehmen außerdem an, dass in der $x_1 - x_2$-Ebene ein ideal leitendes metallisches Material vorhanden ist (elektrische Leitfähigkeit $\sigma \to \infty$), d.h. ein ideal reflectierender Spiegel.

Im Folgenden gehen wir von dem Ansatz aus, dass sowohl die einlaufende $\vec{E}$ als auch die auslaufende Welle $\vec{E}'$ ebene Wellen sind:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathrm{i}\omega t), \quad \vec{E}' = \vec{E}_0 \exp(\mathrm{i}\vec{k}' \cdot \vec{r} - \mathrm{i}\omega' t), \tag{1}$$

für die jeweils die Wellengleichung und das Gaußsche Gesetz für $\rho = 0$

$$\Box \vec{E} = 0, \quad \Box \vec{E}' = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}' = 0 \tag{2}$$

gelten.

Im Folgenden wollen wir aus den vorgegebenen Parametern ω, $\vec{k}$ und $\vec{E}_0$ für $\vec{E}$ die entsprechenden Parameter für $\vec{E}'$, also ω', $\vec{k}'$ und $\vec{E}_0'$ berechnen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) (1 Punkt) Was folgt für ω, $\vec{k}$, ω' und $\vec{k}'$ aus der Wellen Gleichung für $\vec{E}$ bzw. $\vec{E}'$.

Lösung: Mit dem Ebene-Wellen-Ansatz (1) folgt

$$\Box \vec{E} = \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\vec{E} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2\right)\vec{E} = 0 \Rightarrow \omega = ck = c|\vec{k}|. \tag{3}$$

Entsprechend gilt für die reflektierte Welle die analoge Dispersionsrelation $\omega' = ck'$.

(b) (1 Punkt) Welche Bedingungen an $\vec{E}$ und $\vec{E}'$ ergeben sich aus dem Gaußschen Gesetz?

Lösung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0. \tag{4}$$

Für die reflektierte Welle folgt genauso

$$\vec{k}' \cdot \vec{E}_0' = 0. \tag{5}$$

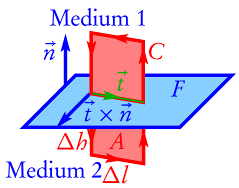
Die Wellen sind also beide transversal.

(c) (1 Punkt) Argumentieren Sie, dass für $x_3 = 0$ (also in der x_1-x_2-Ebene, wo sich der Spiegel befindet) die Tangentialkomponenten von $\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E} + \vec{E}'$ verschwinden müssen, d.h.

$$[\vec{E}_{\text{tot}} - \vec{e}_3 E_{\text{tot}3}]_{x_3=0} = 0 \tag{6}$$

sein muss.

Lösung: Da $\vec{j} = \sigma \vec{E}_{\text{tot}}$ gilt, muss $\vec{E} = 0$ für $x_3 < 0$ sein. Da weiter $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ ist, müssen die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ bei $x_3 = 0$ stetig sein, also auch für $x_3 = 0^+$ verschwinden.



Um das zu verstehen, betrachten wir die obige Abbildung und integrieren das Faradaysche Induktionsgesetz über die von dem roten Rechteck eingeschlossenen Fläche. Der entsprechend dem Stokesschen Integralsatz orientierte Normalenvektor ist offenbar $\vec{t} \times \vec{n}$. Auf der linken Seite wenden wir den Stokesschen Integralsatz an. Wir denken uns Δh und Δl als so klein, dass die Felder oberhalb der Fläche und unterhalb der Fläche als konstant angesehen werden können, wobei es allerdings möglich ist, dass sie entlang der Fläche evtl. unstetig sein können. Dann sei $\vec{x}_> = \vec{x} + 0^+ \vec{n}$ und $\vec{x}_< = \vec{x} - 0^+ \vec{n}$, wobei $\vec{x}$ selbst auf der blauen Grenzfläche liegen soll. Dann ist

$$\int_A \mathrm{d}^2 \vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \int_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E} = \Delta l \, \vec{t} \cdot [\vec{E}(\vec{x}_<) - \vec{E}(\vec{x}_>)], \tag{7}$$

da sich die Beiträge von den Seiten parallel zu $\vec{n}$ in der betrachteten Näherung wegheben.

Für das Flächenintegral der rechten Seite des Faradayschen Induktionsgesetzes ergibt sich

$$-\int_A \mathrm{d}^2 \vec{f} \cdot \partial_t \vec{B} = -\Delta h \Delta l (\vec{t} \times \vec{n}) \cdot \partial_t \vec{B}. \tag{8}$$

Gleichsetzen mit (7) und Dividieren durch $\Delta h \Delta l$ liefert

$$-(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot \partial_t \vec{B} = \frac{1}{\Delta h} \vec{t} \cdot [\vec{E}(\vec{x}_<) - \vec{E}(\vec{x}_>)]. \tag{9}$$

Offenbar bleibt dieser Ausruck für $\Delta h \to 0$ nur endlich, wenn

$$\vec{t} \cdot [\vec{E}(\vec{x}_<) - \vec{E}(\vec{x}_>)] = 0 \tag{10}$$

ist, d.h. die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ verschwindet. Da man diese Rechnung für beliebige Tangentenvektoren an die Ebene durchführen kann, bedeutet dies, dass alle Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ entlang der Grenzfläche stetig sein müssen. Dies kann man zusammenfassend durch

$$\vec{n} \times [\vec{E}(\vec{x}_<) - \vec{E}(\vec{x}_>)] = \vec{0} \tag{11}$$

ausdrücken, da $\vec{n} \times \vec{V}$ für einen beliebigen Vektor $\vec{V}$ ein Vektor in einer zur Grenzfläche tangentialen Richtung ist.

(d) (4 Punkte) Was ergibt sich daraus zunächst für ω und ω' sowie für $\vec{k}$ und $\vec{k}'$? Drücken Sie dazu ω' und $\vec{k}'$ mittels ω und $\vec{k}$ aus und beweisen Sie damit insbesondere das Reflexionsgesetz.

Lösung: Setzen wir den Anatz (1) in (6) ein, ergibt sich nach einfachen Umformungen

$$\vec{E}_0' - \vec{e}_3 E_{03'} = -(\vec{E}_0 - \vec{e}_3 E_{03}) \exp[\mathrm{i}(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r} - \mathrm{i}(\omega - \omega')]_{x_3=0}. \tag{12}$$

Damit dies für alle t gelten kann, muss offenbar $\omega = \omega'$ sein. Damit dies weiter für alle $\underline{r} = (x_1, x_2, 0)$ gelten kann, muss

$$\vec{k} - \vec{k}' = C\vec{e}_3 \tag{13}$$

sein. Multiplizieren wir dies mit $\vec{k}$ und mit $\vec{k}'$ folgt mit den oben berechneten Dispersionsrelationen $\omega = \omega' = ck = ck'$

$$\omega^2/c^2 - \vec{k} \cdot \vec{k}' = Ck_3', \quad \vec{k} \cdot \vec{k}' - \omega^2/c^2 = Ck_3. \tag{14}$$

Addiert man beide Gleichungen, folgt

$$C(k_3 + k_3') = 0 \Rightarrow k_3' = -k_3. \tag{15}$$

Multipliziert man andererseits (13) mit $\vec{e}_3$ und verwendet (15), folgt

$$C = k_3 - k_3' = 2k_3 \tag{16}$$

und folglich wegen (13)

$$\underline{k}' = \underline{k} - 2k_3\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -k_3 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

d.h. $\underline{k}'$ geht aus $\underline{k}$ durch Spiegelung an der x_1-x_2-Ebene hervor, es ist also in der Tat der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel, wie von der geometrischen Optik her zu erwarten.

(e) (3 Punkte) Berechnen Sie schließlich noch $\vec{E}_0'$ mit Hilfe von $\vec{E}$.

Lösung: Setzen wir die Ergebnisse der vorigen Teilaufgabe in (12) ein, ergibt sich

$$\vec{E}_0 + \vec{E}_0' = (E_{03} + E_{03}')\vec{e}_3. \tag{18}$$

Mutliplizieren wir dies mit $\vec{k}$ und verwenden $k = k' = \omega/c$ sowie (4), (5) und (17), folgt

$$\vec{k} \cdot (\vec{E}_0 + \vec{E}_0') = \vec{k} \cdot \vec{E}_0' = (\vec{k}' + 2\vec{e}_3 k_3) \cdot \vec{E}_0' = 2k_3 E_{03}' = k_3(E_0 + E_{03}') \Rightarrow E_{03}' = E_{03} \tag{19}$$

und folglich wegen (18)

$$\underline{E}_0' = 2E_{03}\underline{e}_3 - \underline{E}_0 = \begin{pmatrix} -E_{01} \\ -E_{02} \\ E_{03} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Die Komponenten von $\vec{E}_0'$ parallel zum Spiegel wechseln also das Vorzeichen relativ zu $\vec{E}_0$, und die Komponente senkrecht zum Spiegel bleibt gleich.

Die Intensität der reflektierten Welle ist also gleich der der einlaufenden Welle.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo2-l3-SS24/index.html`