H. van Hees **Sommersemester 2024**

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 8

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Green-Funktion der Wellengleichung in 2 Dimensionen

In der Vorlesung haben wir die retardierte Greensche Funktion für den D'Alembert-Operator hergeleitet:

$$G_{\text{ret}}^{(3)}(t,\vec{x}) = \frac{\delta(t-r/c)}{4\pi r}, \quad r = |\vec{x}|. \tag{1}$$

Dabei haben wir den Index (3) eingeführt, um zu betonen, dass es sich um die Greensche Funktion für die Wellenausbreitung im dreidimensionalen Raum handelt, d.h. es gilt

$$\Box G_{\text{ret}}^{(3)}(t,\vec{x}) = \delta(t)\delta^{(3)}(\vec{x}), \quad \Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2). \tag{2}$$

Wir können diese spezielle Lösung der inhomogenen Wellengleichung so interpretieren, dass auf der rechten Seite die Quellen für die Wellen stehen, d.h. für die Green-Funktionenlösungen haben wir eine idealisierte pulsartige Störung, die zur Zeit $t=0$ an dem einen Punkt $\vec{x}=0$ wirkt. Die Lösung (1) besagt, dass die Störung zu späteren Zeiten sich exakt auf der Kugel*fläche* $r = ct$ ausbreitet, wobei die Amplitude proportional zum Abstand zwischen dem Quellpunkt $\vec{x}'=0$ und Beobachtungspunkt $\vec{x}$ abnimmt. Zu jeder Zeit $t>0$ ist die Lösung außer auf dieser Kugelfläche exakt 0.

Hat man nun eine zeitlich und räumlich ausgedehnte Quelle $J(t,\vec{x})$, ist die Lösung der entsprechenden Wellengleichung

$$\begin{aligned}&\Box\psi(t,\vec{x}) = J(t,\vec{x}) \Rightarrow \\ &\psi(t,\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x' G_{\text{ret}}(t-t',\vec{x}-\vec{x}')J(t',\vec{x}') = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x' \frac{J(t-|\vec{x}-\vec{x}'|/c,\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}.\end{aligned} \tag{3}$$

Das bedeutet, dass von jedem Punkt $\vec{x}'$ aufgrund der Quelle zur *retardierten Zeit* $t - |\vec{x}-\vec{x}'|/c$ eine Kugelwelle ausgeht, die zur Zeit t am Beobachtungspunkt $\vec{x}$ eintrifft. Entsprechend dem Superpositionsprinzip (Linearität der Wellengleichung) überlagern sich diese Kugelwellen zur Zeit t am Beobachtungspunkt $\vec{x}$ gemäß der Lösung (3). Das ist eine Version des aus der Schule bekannten Huygensschen Prinzips.

Wir wollen nun zeigen, dass diese einfache Interpretation für die Wellenausbreitung in der Ebene (zweidimensionale Wellengleichung) nicht mehr gilt.

Berechnen Sie die entsprechende retardierten Green-Funktion

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 G_{\text{ret}}^{(2)}(t,x_1,x_2) - (\partial_1^2+\partial_2^2)G_{\text{ret}}^{(2)}(t,x_1,x_2) = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2) = J^{(2)}(t,x_1,x_2), \tag{4}$$

indem Sie $J^{(2)}$ als Quelle für die dreidimensionale Wellengleichung interpretieren und (3) verwenden.

Interpretieren Sie die entsprechenden Lösungen physikalisch und argumentieren Sie, warum das Huygenssche Prinzip für die Wellenausbreitung in der Ebene und entlang einer Linie nicht mehr gilt. Welche Zeiten sind für die Lösungen mit einer beliebigen Quelle J jeweils maßgebend? Ist die Wellenausbreitung immer noch kausal?

Tipp: Bei der Berechnung des Integrals ist die Formel

$$\delta[f(z)] = \sum_{z_0} \frac{1}{|f'(z_0)|}\delta(z-z_0) \tag{5}$$

nützlich. Dabei ist über alle Nullstellen z_0 von f zu summieren, d.h. es sind alle Lösungen der Gleichung $f(z_0)=0$ zu bestimmen.

Lösung: Setzen wir die Quelle $J^{(2)}(t,x_1,x_2)=\delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2)$ in (3) ein, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
G_{\text{ret}}^{(2)}(t,x_1,x_2) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x' G_{\text{ret}}^{(3)}(t-t',\vec{x}-\vec{x}')J^{(2)}(t',x_1',x_2') \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x' \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta(t-t'-|\vec{x}-\vec{x}'|/c)\delta(t')\delta(x_1')\delta(x_2') \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x' \frac{\delta(x_1')\delta(x_2')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x' \frac{\delta(x_1')\delta(x_2')}{4\pi c t}\delta\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi c t}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x_3'\delta\left(t-\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-x_3')^2}}{c}\right) \\
&\overset{z=x_3'-x_3}{=} \frac{\Theta(t)}{4\pi c t}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z\,\delta\left(t-\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+z^2}}{c}\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Um das verbliebene Integral auszuwerten, verwenden wir (5). Es ist dabei

$$
f(z)=t-\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+z^2}}{c} \Rightarrow f'(z)=-\frac{z}{c\sqrt{x_1^2+x_2^2+z^2}}. \tag{7}
$$

Falls $0 \leq ct \leq \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ sind die Nullstellen[1]

$$
z_0=\pm\sqrt{c^2t^2-x_1^2-x_2^2} \Rightarrow |f'(z_0)|=\frac{\sqrt{c^2t^2-x_1^2-x_2^2}}{c^2|t|}. \tag{8}
$$

Die beiden Nullstellen ergeben dann offenbar beide den gleichen Beitrag zu (7). Andernfalls gibt es keine Nullstellen, und das Integral ist daher ebenfalls Null. Damit liefert die Auswertung der Formel (5) für (6) schließlich

$$
G_{\text{ret}}^{(2)}(t,x_1,x_2)=\frac{c}{2\pi\sqrt{c^2t^2-x_1^2-x_2^2}}\Theta\left(ct-\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right). \tag{9}
$$

Das bedeutet, dass im Gegensatz zum 3D Fall, zur Zeit $t>0$ aufgrund der Störung zur Zeit $t'=0$ bei $x_1'=x_2'=0$ die entsprechende Welle in der ganzen Kreis*scheibe* $\sqrt{x_1^2+x_2^2}<ct$ von Null verschieden ist. Es propagiert in der Ebene also nicht wie im Raum einfach eine Störung auf der durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit c bestimmten Kreis*linie* sondern im ganzen Kreis.

Das entspricht auch unserer Erfahrung: Wenn man einen Stein ins Wasser wirft, erzeugt man nicht nur eine Welle entlang einer einzelnen Kreislinie $\sqrt{x_1^2+x_2^2}=ct$ sondern entlang der ganzen Kreisscheibe $\sqrt{x_1^2+x_2^2}<ct$.

Es gilt also für die 2D-Wellengleichung *nicht mehr* das Huygenssche Prinzip. In der Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit einer zeitlich und räumlich ausgedehnten Quelle hat man also nicht einfach eine Überlagerung von entsprechenden Kugelwellen. Vielmehr hat man es mit einer komplizier-

[1] Offensichtlich verschwindet das Integral (6) für $t<0$, wie es für eine *retardierte* Green-Funktion sein muss.

teren Überlagerung von „Elementarwellen" zu tun, die sich mit allen Geschwindigkeiten $< c$ ausbreiten, d.h. es trägt die Quelle $J(t', x_1', x_2')$ zu allen Zeiten in einem ganzen Zeitintervall $t' < R/c$ mit $R = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}$ bei.

Trotzdem ist entsprechend der Wahl der retardierten Lösung für die Green-Funktion die Kausalität gewahrt, denn die Green-Funktion verschwindet für $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} > ct$, d.h. die Quelle bewirkt kein Signal, das sich schneller als mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet. Im 3D-Fall breitet sich das Signal ausschließlich mit Lichtgeschwindigkeit aus, im 2D-Fall jedoch mit allen Signalgeschwindigkeiten $\leq c$.