

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Lösungen 6

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Vektorpotential eines quellenfreien Vektorfeldes

Wir wollen zeigen, dass für ein beliebiges Vektorfeld \vec{V} , das „quellenfrei“ ist, für das also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

gilt, stets ein Vektorpotential \vec{A} existiert, so dass

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2)$$

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass \vec{A} nur bis auf den Gradienten eines Skalarfeldes bestimmt sein kann, d.h. wenn \vec{A} (2) erfüllt, so erfüllt auch

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \quad (3)$$

für beliebige skalare Felder χ diese Gleichung.

Lösung: Wir berechnen die Rotation

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{V}. \quad (4)$$

Dabei haben wir verwendet, dass

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \chi) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_1 \chi \\ \partial_2 \chi \\ \partial_3 \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \partial_3 \chi - \partial_3 \partial_2 \chi \\ \partial_3 \partial_1 \chi - \partial_1 \partial_3 \chi \\ \partial_1 \partial_2 \chi - \partial_2 \partial_1 \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ist.

- (b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass man für eine beliebige Lösung \vec{A} von Gl. (2) man stets ein Feld χ finden kann, so dass gemäß (3) $A'_3 = 0$ ist. Wir dürfen im Folgenden also annehmen, dass das Vektorpotential neben der Gleichung (2) die zusätzliche „axiale Eichbedingung“

$$A_3 = 0 \quad (6)$$

erfüllt.

Lösung: Für die 3. Komponente von \vec{A}' gilt $A'_3 = A_3 + \partial_3 \chi \stackrel{!}{=} 0$. Damit folgt

$$\partial_3 \chi = -A_3 \Rightarrow \chi(x_1, x_2, x_3) = - \int dx_3 A_3(x_1, x_2, x_3). \quad (7)$$

- (c) (5 Punkte) Schreiben Sie nun die Gleichung (18) für ein Potential, das die axiale Eichbedingung (6) erfüllt, in Komponentenschreibweise explizit hin und lösen Sie die Gleichungen für A_1 und A_2 durch direkte Integration und zeigen Sie, dass dann tatsächlich (18) gelöst ist, vorausgesetzt die Bedingung der Quellenfreiheit (1) für das Vektorfeld \vec{V} ist erfüllt.

Lösung: Es ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_3 A_2 \\ \partial_3 A_1 \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Aus der ersten Komponente der Gleichung schließen wir, dass wir

$$A_2(x_1, x_2, x_3) = - \int_{x_{03}}^{x_3} dx'_3 V_1(x_1, x_2, x'_3) + \tilde{A}_2(x_1, x_2) \quad (9)$$

setzen müssen. Dabei ist x_{03} beliebig im Definitionsbereich von \vec{V} und \tilde{A}_2 eine beliebige Funktion, die nur von x_1 und x_2 , *nicht* aber von x_3 abhängt.

Aus der zweiten Komponente der Gleichung (9) folgt

$$A_1(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_{03}}^{x_3} dx'_3 V_2(x_1, x_2, x'_3) + \tilde{A}_1(x_1, x_2), \quad (10)$$

wobei \tilde{A}_1 eine beliebige Funktion ist, die nur von x_1 und x_2 , *nicht* aber von x_3 abhängt.

Setzen wir (9) und (10) in die dritte Komponente von (8) ein, folgt

$$- \int_{x_{03}}^{x_3} dx'_3 [\partial_1 V_1(x_1, x_2, x'_3) + \partial_2 V_2(x_1, x_2, x'_3)] + \partial_1 \tilde{A}_2(x_1, x_2) - \partial_2 \tilde{A}_1(x_1, x_2) \stackrel{!}{=} V_3(x_1, x_2, x_3). \quad (11)$$

Wegen (1) ist $\partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 = -\partial_3 V_3$. Setzen wir dies in (12) ein, folgt

$$\begin{aligned} \int_{x_{03}}^{x_3} dx'_3 \partial_3 V_3(x_1, x_2, x'_3) + \partial_1 \tilde{A}_2(x_1, x_2) - \partial_2 \tilde{A}_1(x_1, x_2) &= V_3(x_1, x_2, x_3) - V_3(x_1, x_2, x_{03}) \\ &+ \partial_1 \tilde{A}_2(x_1, x_2) - \partial_2 \tilde{A}_1(x_1, x_2) \\ &\stackrel{!}{=} V_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (12)$$

Wählen wir nun willkürlich $\tilde{A}_1 = 0$, folgt

$$\tilde{A}_1 = 0 \Rightarrow \partial_1 \tilde{A}_2(x_1, x_2) = V_3(x_1, x_2, x_{30}). \quad (13)$$

Man beachte, dass die rechte Seite *nicht* von x_3 abhängt, d.h. wir können die Gleichung einfach integrieren, um

$$\tilde{A}_2(x_1, x_2) = \int_{x_{10}}^{x_1} dx'_1 V_3(x'_1, x_2, x_{30}) \quad (14)$$

zu erhalten.

Das gefundene Vektorpotential ist also insgesamt durch

$$\begin{aligned} A_1(x_1, x_2, x_3) &\stackrel{(10,13)}{=} \int_{x_{03}}^{x_3} dx'_3 V_2(x_1, x_2, x'_3) \\ A_2(x_1, x_2, x_3) &\stackrel{(9,13)}{=} - \int_{x_{03}}^{x_3} dx'_3 V_1(x_1, x_2, x'_3) + \int_{x_{10}}^{x_1} dx'_1 V_3(x'_1, x_2, x_{30}). \\ A_3(x_1, x_2, x_3) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Man prüft leicht durch direkte Berechnung von $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ nach, dass mit diesen Komponenten tatsächlich $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{V}$ gilt, und das war zu zeigen.

Aufgabe 2: Magnetfeld des unendlich langen Drahtes

Ein zylinderförmiger unendlich langer Draht mit Radius a entlang der x_3 -Achse eines kartesischen Koordinatensystems sei von einem Strom $I = \text{const}$ durchflossen. Die Stromdichte sei entsprechend $\vec{j} = I\Theta(a - R)\vec{e}_3/(\pi a^2)$, wobei $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ist.

- (a) Bestimmen Sie das Vektorpotential \vec{A} ($\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$), indem Sie mit Hilfe des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (16)$$

zeigen, dass es in kartesischen Koordinaten die vektorielle Poisson-Gleichung

$$\text{rot rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (17)$$

erfüllt, vorausgesetzt, das Vektorpotential genügt der Coulomb-Eichbedingung

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (18)$$

Hinweis: Sie können die Formeln in Anhang C.3 des Manuskripts verwenden!

Lösung: In Anhang C.3 des Manuskripts wurde die Formel

$$\text{rot rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad (19)$$

für beliebige Vektorfelder angegeben. Sie lässt sich mit Hilfe der Formel

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad (20)$$

für die Kontraktion des Levi-Civita-Symbols zeigen (vgl. Anhang C.2 im Manuskript). Damit erhält man

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_j &= \epsilon_{jki}\partial_k\epsilon_{ilm}\partial_l A_m = \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}\partial_k\partial_l A_m \\ &= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\partial_k\partial_l A_m \\ &= \partial_j\partial_k A_k - \partial_k\partial_k A_j = [\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}]_j. \end{aligned} \quad (21)$$

In Coulomb-Eichung gilt die Eichfixierungsbedingung

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (22)$$

und damit wegen $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A}, \quad (23)$$

und das war zu zeigen.

- (b) Begründen Sie, dass aufgrund der Symmetrie des Problems der Ansatz

$$\vec{A} = A(R)\vec{e}_z \quad (24)$$

plausibel ist, wobei (R, φ, z) die üblichen Zylinderkoordinaten (vgl. Anhang A.2 des Manuskripts) sind.

Lösung: Wie soeben gezeigt gilt

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (25)$$

Da \vec{j} überall in die Richtung \vec{e}_z weist, sollte dies auch für \vec{A} der Fall sein. Da ferner das Problem symmetrisch unter Translationen entlang der x_3 -Achse und unter Rotationen um die x_3 -Achse ist, muss \vec{A} von der Form (24) sein, d.h. der Betrag von \vec{A} kann in den Standard-Zylinderkoordinaten (R, φ, z) geschrieben nur von R abhängen.

- (c) Zeigen Sie unter Verwendung der Formeln in Anhang A.2 des Manuskripts, dass die Coulomb-Eichbedingung (18) für beliebige Funktionen $A(R)$ erfüllt ist.

Lösung: Da $\vec{A} = A(R)\vec{e}_z$, gilt nach Gl. (A.2.5) einfach $\operatorname{div} \vec{A} = \partial_z A(R) = 0$, d.h. (18) ist für beliebiges $A(R)$ erfüllt.

- (d) Schreiben Sie nun die Gleichung (16) in Zylinderkoordinaten und lösen Sie unter Beachtung der Randbedingungen des Magnetfeldes am Zylinderrand die Differentialgleichung für $A(R)$. Berechnen Sie dann via $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ das Magnetfeld.

Lösung: Mit Gl. (A.2.6) im Manuskript folgt

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = -\vec{e}_\varphi A'(R) \quad (26)$$

und damit weiter, nochmals vermöge Gl. (A.2.6) im Manuskript

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = -\frac{1}{R} [RA'(R)]' \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \Theta(a-R) \vec{e}_z. \quad (27)$$

Bemerkung: Hier dürfte übrigens auch die naive Formel (A.2.7) für den Laplace-Operator angewandt werden, weil der Basisvektor $\vec{e}_z = \text{const}$ ist.

Für $R < a$ gilt

$$[RA'_<(R)]' = -\frac{\mu_0 I R}{\pi a^2} \Rightarrow RA'_<(R) = -\frac{\mu_0 I R^2}{2\pi a^2} + C_1 \Rightarrow A'_<(R) = -\frac{\mu_0 I R}{4\pi a^2} + C_1 \ln\left(\frac{R}{a}\right) + C_2. \quad (28)$$

Da $A'_<$ in $R=0$ nicht singulär werden darf, ist $C_1 = 0$.

Für $R > a$ erhält man dieselbe allgemeine Lösung mit $I = 0$, d.h.

$$A'_>(R) = C'_1 \ln\left(\frac{R}{a}\right) + C'_2. \quad (29)$$

Da ohnehin nur $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ physikalisch relevant ist, können wir $C'_2 = 0$ setzen. Weiter sollte \vec{A} stetig bei $R = a$ sein, d.h.

$$A'_>(a) = 0 = A'_<(a) = C_2 - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Rightarrow C_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}. \quad (30)$$

Damit haben wir bis jetzt

$$A(R) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) & \text{für } R < a, \\ C'_1 \ln\left(\frac{R}{a}\right) & \text{für } R \geq a. \end{cases} \quad (31)$$

Da keine Flächenstromdichten vorhanden sind, muss auch \vec{B} bei $R = a$ stetig sein. Mit (26) und (31) folgt

$$\vec{B} = -\vec{e}_\varphi A'(R) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I R}{2\pi a^2} \vec{e}_\varphi & \text{für } R < a, \\ \frac{C'_1}{R} \vec{e}_\varphi & \text{für } R \geq a. \end{cases} \quad (32)$$

Stetigkeit bei $R = a$ verlangt also

$$\frac{C'_1}{a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \Rightarrow C'_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}. \quad (33)$$

Damit ist

$$\vec{B} = -\vec{e}_\varphi A'(R) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I R}{2\pi a^2} \vec{e}_\varphi & \text{für } R < a, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\varphi & \text{für } R \geq a. \end{cases} \quad (34)$$
