Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Lösungen 5

Aufgabe 1: Kondensator mit Dielektrikum

Wir betrachten einen Kondensator, der zunächst mit Luft (Vakuum) gefüllt sei. Nun füllen wir den Kondensator mit Wasser ($\epsilon_{\text{rel}} = 88$).

(a) Zeigen Sie anhand der Rechnung für den Plattenkondensator vom vorigen Übungsblatt, dass sich die Kapazität gemäß $C = \epsilon_{\text{rel}} C_{\text{vac}}$ ändert, wobei C_{vac} die Kapazität des Kondensator ohne Dielektrikum ist.

Lösung: Die Rechnung erfolgt genau wie in Aufgabe 1 auf Blatt 5. Mit dem Potential folgt aus $\Delta\Phi = 0$ mit dem Ansatz $\Phi = \Phi(x_3)$

$$\Phi = \Phi(x_3) = A_1 x_3, \quad A_1 = \text{const.} \tag{1}$$

Der Unterschied ist, dass nun statt ϵ_0 die Permittivität $\epsilon = \epsilon_{\text{rel}}\epsilon_0$ einzusetzen ist. Dann ergibt das Gaußsche Gesetz für einen Quader parallel zur oberen Platte mit einer Fläche innerhalb und der dazu parallelen Fläche außerhalb des Leiters im Raum zwischen den Platten

$$\vec{e}_3(\vec{D}_{\text{leiter}} - \vec{D}_{\text{Zwischenraum}}) = \frac{Q}{A}. \tag{2}$$

Nun ist aber

$$-\vec{e}_3 \cdot \vec{D}_{\text{Zwischenraum}} = +\epsilon \partial_3 \Phi(x_3) = \epsilon A_1 = \frac{Q}{A}. \tag{3}$$

Weiter ist $\Phi(x_3 = d) = U$ und damit $A_1 = U/d$, d.h.

$$Q = \frac{\epsilon A}{d} U = \epsilon_{\text{rel}} \frac{\epsilon_0 A}{d} U = C U = \epsilon_{\text{rel}} C_{\text{vac}} U \;\Rightarrow\; C = \epsilon_{\text{rel}} C_{\text{vac}}. \tag{4}$$

(b) Der leere Kondensator werde vor dem Füllen mit einer Batterie der Spannung U verbunden und dann von der Batterie getrennt. Wie ändern sich die Ladung auf den Kondensatorplatten, die Spannung und die im Kondensator gespeicherte Feldenergie, wenn das Wasser eingefüllt wird?

Lösung: Im folgenden seien U, Q und W Spannung, Ladung und Feldenergie des Kondensators vor dem Einfüllen des Wassers und U', Q' und W' die entsprechenden Größen nach dem Einfüllen.

Da der Kondensator vor dem Einfüllen auf die Spannung U aufgeladen wurde und nun von der Batterie getrennt wurde, gilt $Q' = Q$, denn es können keine Ladungen zu- oder abfließen. Damit ist

$$Q' = C U' = Q = C_{\text{vac}} U \;\Rightarrow\; U' = \frac{C_{\text{vac}}}{C} U = \frac{1}{\epsilon_{\text{rel}}} U. \tag{5}$$

Da stets $\epsilon_{\text{rel}} > 1$ nimmt also nach dem Einfüllen des Wassers die anliegende Spannung stets ab, während die Ladung gleich bleibt. Die Änderung der Feldenergie ist

$$\Delta W = W' - W = \frac{C}{2} U'^2 - \frac{C_{\text{vac}}}{2} U^2 = \frac{C_{\text{vac}}}{2} U^2 \left(\frac{1}{\epsilon_{\text{rel}}} - 1\right) < 0, \tag{6}$$

d.h. man gewinnt mechanische Energie, denn das Dielektrikum wird in den Kondensator hineingezogen.

(c) Betrachten Sie dieselbe Fragestellung, wie in der vorigen Teilaufgabe, nur dass diesmal die Batterie mit dem Kondensator verbunden bleibt.

Lösung: Jetzt bleibt die Spannung konstant, d.h. es ist $U' = U$, und die Ladung ist

$$Q' = CU' = CU = \epsilon_{\text{rel}} C_{\text{vac}} U = \epsilon_{\text{rel}} Q. \tag{7}$$

Die Ladung erhöht sich also um den Faktor ϵ_{rel}. Für die Energiebilanz folgt

$$\Delta W = W' - W = \frac{C_{\text{vac}}}{2}(\epsilon_{\text{rel}} - 1)U^2 > 0. \tag{8}$$

Es muss also zusätzlich Energie von der Spannungsquelle aufgebracht werden, um die zusätzliche Ladung auf die Platte zu transportieren.

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Review zur Elektrostatik (mögliches Thema in der Prüfung)

Beschreiben Sie kurz die wichtigsten Eigenschaften elektrostatischer Felder. Gehen Sie dabei von der grundlegenden phänomenologischen Definition des elektrischen Feldes über die Wechselwirkungskraft zwischen Punktladungen aus. Erläutern Sie anhand dieses Beispiels den Unterschied zwischen „Fern-“ und „Nahwirkungsbeschreibung“ der Kräfte und den Feldbegriff. Erklären Sie anhand einfacher klassischer Modellvorstellungen vom Aufbau der Materie das Verhalten von Leitern und Nichtleitern (Dielektrika) unter dem Einfluss elektrostatischer Felder. Erläutern Sie dabei auch kurz die wichtigsten Formeln (Feldgleichungen, elektrostatisches Potential, Feldenergie, Coulomb-Kraft) in differentieller und integraler Form.

Lösung: Neben der aus der Mechanik bekannten Masse besitzt die Materie als weitere Eigenschaft auch elektrische Ladung, die sich durch Wechselwirkungskräfte bemerkbar macht, die nicht durch die ebenfalls aus der Mechanik bekannte Gravitationswechselwirkung erfasst werden.

Die Ladung kann positiv und negativ sein und wird im Internationalen Einheitensystem (SI) durch die Einheit Coulomb (C) beschrieben. Diese Einheit ist seit 2019 dadurch festgelegt, dass die Elementarladung (also die Ladung eines Protons bzw. die negative Ladung eines Elektrons) den exakten Wert $1{,}602176634 \cdot 10^{-19}$ C besitzt.

Die Kraftwirkung zwischen zwei ruhenden Punktladungen Q_1 und Q_2, die sich an den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ wird durch das Coulomb-Gesetz

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \tag{9}$$

Es handelt sich also um eine Zentralkraft, deren Betrag umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes zwischen den beiden Ladungen abfällt. Für $Q_1 Q_2 > 0$ (also beide Ladungen positiv oder negativ) ist die Kraft abstoßend (repulsiv), für $Q_1 Q_2 < 0$ (also eine Ladung positiv und die andere negativ) anziehend (attraktiv). Die Proportionalitätskonstante $1/(4\pi\epsilon_0)$ muss prinzipiell gemessen werden. Prinzipiell kann man dazu zwei Protonen betrachten, deren Ladung durch die Definition der SI-Einheit C exakt festgelegt ist und die Coulomb-Kraft zwischen den Protonen messen. Der derzeit genaueste Messwert ist durch $\epsilon_0 = 8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{C}^2/(\text{N m}^2)$, die sog. Permittivität des Vakuums gegeben (die Ziffern in den Klammern gibt die Messunsicherheit der beiden letzten signifikanten Ziffern des Messresultats an).

Wechselwirkungskräfte können prinzipiell auf zwei Arten interpretiert werden: Die ältere auf Newton im Zusammenhang mit dem Gravitationsgesetz erdachte Interpretation stellt einfach fest, dass es sich um eine Fernwirkung handelt, die man nicht genauer erklären kann. Dabei gilt das Kraftgesetz instantan auch für sich bewegende Körper, d.h. zu jedem Zeitpunkt würde gemäß dieses Fernwirkungsstandpunktes stets das Coulomb-Gesetz (9) gelten, d.h. selbst wenn die Ladungen sehr weit voneinander entfernt sind wirkt sich eine Änderung des Relativvektors $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ aufgrund einer Bewegung der Körper instantan auf die Kraft aus. Man sollte sich darüber klar sein, dass dieser Fernwirkungsbegriff nach unserem heutigen Kenntnisstand nur näherungsweise gültig sein kann, denn gemäß der Relativitätstheorie (Einstein 1905) kann es solche instantanen Fernwirkungen nicht geben. Bewegt sich z.B. die Ladung 1, kann die daraus resultierende Änderung des Relativvektors sich nicht instantan auf die Kraft, die auf Ladung 2 wirkt, auswirken, denn dies könnte man zu einer überlichtschnellen Signalübertragung verwenden, was aufgrund der Relativitätstheorie nicht möglich ist, da sich kausale Wirkungen nicht schneller als mit der Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum) ausbreiten können.

Nach dem neueren Nahwirkungsstandpunkt interpretiert man das Coulomb-Gesetz entsprechend anders, indem man das Konzept des Feldes einführt. Demnach impliziert die Ladung des Körpers 1, ein elektrisches Feld, also eine an jedem Ort $\vec{r}$ definierte vektorielle Größe

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}. \tag{10}$$

Die Coulomb-Kraft auf Ladung 2 wirkt dann aufgrund dessen, dass an der Stelle $\vec{r}_2$, an der sich die Ladung 2 befindet, also am Ort dieser Ladung, das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ vorhanden ist:

$$\vec{F}_{21} = Q_2 \vec{E}(\vec{r}_2). \tag{11}$$

Die elektrische Ladung beschreibt in diesem Bild zwei Phänomene: Zum Einen ist Q_1 die Quelle des elektrischen Feldes (10) und zum Anderen gibt Q_2 die Stärke der Kraftwirkung auf Teilchen 2 aufgrund des Vorhandenseins des von der Ladung 1 ausgehenden Elektrischen Feldes an, d.h. Q_2 quantifiziert die Kopplungsstärke des betreffenden Körpers an das elektrische Feld. Das Konzept vom elektrischen Feld ermöglicht also die Uminterpretation der alten Fernwirkung zwischen den beiden Ladungen als Nahewirkung bzw. das in der modernen Physik sehr wichtige Konzept der Lokalität: Die Kraftwirkung auf die Ladung 2 wird auf das elektrische Feld, das aufgrund von Ladung 1 im ganzen Raum vorhanden ist, an der Stelle der Ladung 2, also eine Eigenschaft am Ort der Ladung 2 (d.h. eine lokale Eigenschaft) zurückgeführt.

Für den Fall der Elektrostatik, wo man voraussetzt, dass alle Ladungen ruhen und das elektrische Feld zeitunabhängig ist, wird das Feld durch die beiden lokalen Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \tag{12}$$

beschrieben. Dabei ist ρ die Ladungsdichte.

Die erste Gleichung impliziert, dass das elektrische Feld ein skalares Potential besitzt, d.h. dass es ein skalares Feld Φ gibt, so dass

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \tag{13}$$

ist. Die zweite Gleichung, das Gaußsche Gesetz, besagt, dass die Quelle des elektrostatischen Feldes die ruhende (d.h. zeitunabhängige) Ladungsdichte ist.

Setzt man (13) in (12) ein, erhält man die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}). \tag{14}$$

Die Lösung für eine vorgegebene (räumlich begrenzte bzw. im Unendlichen hinreichend schnell abfallende) Ladungsverteilung lautet

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}, \tag{15}$$

und das Feld ist demnach

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{16}$$

Mit dem Stokesschen bzw. Gaußschen Integralsatz kann man die beiden Feldgleichungen (12) auch mittels Integralen ausdrücken.

Sei dazu F eine beliebige Fläche und ∂F die geschlossene Randkurve (in beliebiger Orientierung, so dass wie beim Stokesschen Integralsatz die Flächennormalenvektoren $\mathrm{d}^2\vec{f}$ und die Orientierung des Weges ∂F gemäß der Rechte-Hand-Regel festgelegt sind):

$$\int_F \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E} = 0, \tag{17}$$

d.h. das Wegintegral von $\vec{E}$ entlang jeder geschlossenen Kurve verschwindet.

Sei weiter V ein beliebiges Volumen mit der Randfläche ∂V, wobei die Flächennormalenvektoren vom Volumen weg zeigen. Dann folgt aufgrund des Gaußschen Integralsatzes aus der 2. Gleichung in (12), also dem Gaußschen Gesetz

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{\partial V} \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\vec{r}) = \frac{Q_V}{\epsilon_0}, \tag{18}$$

d.h. der „Fluss des elektrischen Feldes“ entspricht Q_V/ϵ_0, wobei Q_V die im Volumen befindliche Gesamtladung ist.

Die Materie kann man grob in Leiter und Nichtleiter einteilen. Mikroskopisch setzt sich die Materie aus postiv geladenen Atomkernen und Elektronen zusammen. Ein einzelnes Atom oder Molekül ist dabei i.a. elektrische neutral, und die Elektronen sind an den Atomkern gebunden. Dieser Sachverhalt kann nicht im Rahmen der klassischen Physik beschrieben werden, man kann sich aber für ausgedehnte aus vielen Atomen bestehende Materie zumindest qualitativ ein Bild vom Verhalten der Materie unter dem Einfluss eines elektrostatischen Feldes machen.

Bei einem Leiter (z.B. Metallen) ist ein Teil der Elektronen nicht mehr an ein einzelnes Atom gebunden sondern kann sich quasi frei innerhalb des Metalls bewegen. Ohne äußeres Feld sind diese Leitungselektronen relativ zu den restlichen entsprechend positiv geladenen Ionen in Ruhe. Legt man dann ein äußeres elektrostatisches Feld an, bewegen sich zunächst die Leitungselektronen, d.h. es fließt ein Strom, der aber nach einer Weile aufgrund der Reibung zum Erliegen kommt. Es stellt sich ein neues elektrostatisches Gleichgewicht ein, und zwar so, dass im Inneren des Leiters $\vec{E} = 0$ ist. An der Oberfläche des Leiters befinden sich entsprechende Flächenladungsverteilungen σ, wobei der Sprung der Normalkomponente von $\vec{E}$ durch σ/ϵ_0 gegeben ist. Da die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ an der Oberfläche verschwinden müssen, weil sonst wegen der dort vorhandenen frei beweglichen Leitungselektronen Ströme entlang der Fläche fließen würden, steht $\vec{E}$ stets senkrecht auf einer Leiteroberfläche, die entsprechend Äquipotentialfläche des elektrostatischen Potentials ist.

Bei einem Isolator, also einem nichtleitenden Material, das man auch als Dielektrikum bezeichnet, sind die Elektronen und Atomkerne relativ fest aneinander gebunden, d.h. es gibt keine frei beweglichen Ladungsträger in dem Material. Legt man ein elektrostatisches Feld an, werden aber die positiven Atomkerne und die negativen Elektronen in zueinander entgegensetzte Richtungen ausgelenkt, so dass sich eine Verteilung von elektrischen Dipolen ausbildet. Für nicht zu starke äußere Felder kann man die entsprechende dieser Auslenkung entgegenwirkenden Bindungskräfte als proportional zur Auslenkung betrachten, und die Dipoldichte (oder Polarisation) in der Materie ist proportional zum elektrischen Feld. Gewöhnlich führt man daher das dielektrische Verschiebungsfeld $\vec{D}$ ein, das die zusätzlich zur Materie zur Erzeugung des äußeren Feldes angebrachte Ladungsverteilung ("die freien Ladungen") zur Quelle hat:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\mathrm{f}}. \tag{19}$$

Das gesamte elektrische Feld setzt sich nun zusammen aus dem elektrischen Feld aufgrund der freien Ladungen und der Polarisation der Materie, und für schwache äußere Felder kann man aufgrund der obigen Überlegung annehmen, dass diese proportional zueinander sind. Dies beschreibt man durch die Materialgleichung

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_{\mathrm{rel}} \vec{E}. \tag{20}$$

Dabei ist ϵ_{rel} eine (i.a., ortsabhängige) dimensionslose Größe, die relative Permeabilität der Materie, die von der Art der Materie abhängt und im Rahmen dieser klassischen phänomenologischen Theorie nicht theoretisch berechnet werden kann sondern gemessen werden muss. Als weitere Gleichung gilt auch in Anwesenheit von Isolatoren weiterhin

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \tag{21}$$

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo2-l3-SS24/index.html`