Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Lösungen 4

Aufgabe 1: Elektrisches Potential eines homogen geladenen Zylinders

Gegeben sei ein unendlich langer Zylinder parallel zur x_3-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Der Mittelpunkt der Kreisquerschnittsflächen sei bei $x_1 = x_2 = 0$ und der Kreisradius a. Der Zylinder bestehe aus homogen geladener Materie, d.h. im Zylinder sei die Ladungsdichte $\rho = \text{const}$ und außerhalb 0. Rechnen Sie in Zylinderkoordinaten. Die Formeln in Anhang A.2 des Manuskripts dürfen im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.

(a) Argumentieren Sie, dass aus Symmetriegründen das elektrostatische Potential nur von R abhängen kann. Überlegen Sie dazu zuerst, welche Symmetrien der Zylinder aufweist.

Lösung: Der Zylinder wird offenbar durch Translationen in x_3-Richtung sowie durch Rotationen um die x_3-Achse in sich selbst abgebildet. Das Potential $\Phi(\vec{r})$ kann sich demnach ebenfalls unter diesen Transformationen nicht ändern. Eine Translation um z_0 in x_3-Richtung ist in Zylinderkoordinaten eine Verschiebung von z, d.h. sie wird durch $z \rightarrow z - z_0$ dargestellt. Dabei darf sich $\Phi(\vec{r}) = \Phi(R, \varphi, z)$ nicht ändern, d.h. es gilt $\Phi(R, \varphi, z) = \Phi(R, \varphi, z - z_0)$. Da das für alle $z_0 \in \mathbb{R}$ gilt, kann Φ nicht von z abhängen. Genauso argumentiert man, dass einer Drehung um die x_3-Achse und den Winkel φ_0 einer Verschiebung von $\varphi \rightarrow \varphi - \varphi_0$ entspricht. Das bedeutet aber, dass Φ auch nicht φ abhängen kann. Demnach gilt in der Tat der Ansatz $\Phi(\vec{r}) = V(R)$.

(b) Verwenden Sie nun den Ansatz $\Phi(\vec{r}) = V(R)$, um die Poisson-Gleichung

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

durch einfache Integrationen zu lösen und berechnen Sie daraus $\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$.

Tipp: Verwenden Sie die Stetigkeit von Φ und $\vec{E}$ bei $R = a$ sowie die Bedingung, dass Φ in $R = 0$ keine Singularität besitzen darf, um die auftretenden Integrationskonstanten für die Bereiche $R < a$ und $R > a$ vollständig festzulegen.

Lösung: Mit Gl. (A.2.7) im Manuskript vereinfacht sich wegen des Ansatzes die Poisson-Gleichung zu der gewöhnlichen DGL

$$\Delta \Phi = \frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \begin{cases} \rho_0/\epsilon_0 & \text{für} \quad R \leq a, \\ 0 & \text{für} \quad R > a. \end{cases} \tag{2}$$

Lösen wir die Gleichung zunächst für $R > a$. Wir nennen die Lösung $V_>$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R \frac{\mathrm{d}V_>}{\mathrm{d}R}\right) = 0 \\
\Rightarrow\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R \frac{\mathrm{d}V_>}{\mathrm{d}R}\right) = 0 \\
\Rightarrow\ &R \frac{\mathrm{d}V_>}{\mathrm{d}R} = C_1 = \text{const} \\
\Rightarrow\ &\frac{\mathrm{d}V_>}{\mathrm{d}R} = \frac{C_1}{R} \\
\Rightarrow\ &V_>(R) = C_1 \ln\left(\frac{R}{a}\right) + C_2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Dabei haben wir im Logarithmus R/a geschrieben, damit keine dimensionsbehafteten Größen im Logarithmus auftauchen, und a die einzige ausgezeichnete Größe von der Dimension einer Länge ist.

Für $R \leq a$ sei die Lösung mit $V_<$ bezeichnet. Aus (3) folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R\frac{\mathrm{d}V_<}{\mathrm{d}R}\right)=-\frac{\rho}{\epsilon_0} \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R\frac{\mathrm{d}V_<}{\mathrm{d}R}\right)=-\frac{\rho}{\epsilon_0}R \\
&\Rightarrow R\frac{\mathrm{d}V_<}{\mathrm{d}R}=-\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}+D_1, \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}V_<}{\mathrm{d}R}-\frac{\rho R}{2\epsilon_0}+\frac{D_1}{R} \\
&\Rightarrow V_<=-\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}+D_1\ln\left(\frac{R}{a}\right)+D_2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Jetzt müssen wir die Integrationskonstanten C_1, C_2, D_1 und D_2 bestimmen. Da die Ladungsverteilung außer dem Sprung bei $R = a$ keine Singularitäten aufweist, müssen V und $\vec{E}$ stetig sein. Außerdem kann es bei $R = 0$ keine Singularität geben, so dass bereits $D_1 = 0$ festgelegt ist. Weiter können wir über eine willkürliche additive Konstante verfügen. Setzen wir also $C_2 = 0$. Damit gilt

$$V(R)=\begin{cases} -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}+D_2 & \text{für} \quad R \leq a, \\ C_1\ln(R/a) & \text{für} \quad R > a. \end{cases} \tag{5}$$

Die Stetigkeit von V bei $R = a$ verlangt

$$-\frac{\rho a^2}{4\epsilon_0}+D_2=0 \Rightarrow D_2=\frac{\rho a^2}{4\epsilon_0}. \tag{6}$$

Mit (A.2.4) im Manuskript folgt

$$\vec{E}=-\operatorname{grad} V(R)=-\vec{e}_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}V(R)=\begin{cases} \frac{\rho R}{2\epsilon_0}\vec{e}_R & \text{für} \quad R \leq a, \\ -\frac{C_1}{R}\vec{e}_R & \text{für} \quad R > a. \end{cases} \tag{7}$$

Die Stetigkeit bei $r = a$ verlangt

$$\frac{\rho a}{2\epsilon_0}=-\frac{C_1}{a} \Rightarrow C_1=-\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}. \tag{8}$$

Damit ist schließlich gemäß (5) und (7) die Lösung gefunden:

$$V(R)=\begin{cases} \frac{\rho(a^2-R^2)}{4\epsilon_0} & \text{für} \quad R \leq a, \\ -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln(R/a) & \text{für} \quad R > a, \end{cases} \tag{9}$$

$$\vec{E}=\begin{cases} \frac{\rho R}{2\epsilon_0}\vec{e}_R & \text{für} \quad R \leq a, \\ \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 R}\vec{e}_R & \text{für} \quad R > a. \end{cases} \tag{10}$$

(c) Überprüfen Sie die Lösung, indem Sie zeigen, dass in der Tat überall

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \tag{11}$$

gilt.

Lösung: Mit (A.2.5) aus dem Manuskript folgt aus (10)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{R} \frac{\partial (R E_R)}{\partial R} = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{für} \quad R \leq a, \\ 0 & \text{für} \quad R > a, \end{cases} \tag{12}$$

d.h. unsere Lösung erfüllt in der Tat das Gaußsche Gesetz, wie es sein muss.

(d) Lösen Sie dieselbe Aufgabe nochmals direkt mit dem Gaußschen Gesetz in Integralform und dem der Symmetrie des Problems entsprechenden Ansatz für das elektrische Feld: $\vec{E}(\vec{R}) = E_R(R)\vec{e}_R$ und einer geeigneten Wahl für das Integrationsvolumen.

Lösung: Als Integrationsvolumen verwenden wir natürlich einen Kreiszylinder Z mit Radius R und Höhe h um die x_3-Achse. Dann lautet das Gaußsche Gesetz in Integralform lautet

$$\int_{\partial Z} \mathrm{d}^2 \vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_Z \mathrm{d}^3 x \rho = \frac{1}{\epsilon_0} Q_Z \tag{13}$$

Für die Ladung im Zylinder müssen wir unterscheiden zwischen den Fällen $R \leq a$ und $R > a$. Wegen $\rho = \text{const}$ für $R \leq a$ und $\rho = 0$ für $R > a$ erhalten wir

$$Q_Z = \begin{cases} \pi R^2 h \rho & \text{für} \quad R \leq a, \\ \pi a^2 h \rho & \text{für} \quad R > a. \end{cases} \tag{14}$$

Für das Oberflächenintegral müssen wir den Zylindermantel sowie die Boden- und Deckfläche betrachten. Für die letzteren ist allerdings $\mathrm{d}^2 \vec{f} = \pm \mathrm{d}^2 f \vec{e}_z$ und damit $\mathrm{d}^2 f E_R \vec{e}_R \cdot \vec{e}_z = 0$, d.h. es trägt nur die Mantelfläche zum Flächenintegral bei. Die Mantelfläche parametrisieren wir durch

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = R\vec{e}_R + z\vec{e}_z, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, h]. \tag{15}$$

Das Oberflächenelement ist

$$\mathrm{d}^2 \vec{f} = \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z (\partial_\varphi \underline{x}) \times (\partial_z \underline{x}) = R \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = R\vec{e}_R. \tag{16}$$

Damit ist das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial Z} \mathrm{d}^2 \vec{f} \cdot \vec{E} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h \mathrm{d}z R E_R(R) = 2\pi R h E_R(R). \tag{17}$$

Setzen wir also (14) und (17) in (13) ein und lösen nach E_R auf, erhalten wir

$$E_R(R) = \begin{cases} \frac{R\rho}{2\pi\epsilon_0} & \text{für} \quad R \leq a, \\ \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 R} & \text{für} \quad R > a. \end{cases} \tag{18}$$

Dies stimmt natürlich mit (10) überein.

Aufgabe 2: Potentialwirbel

Gegeben sei das Vektorfeld (in kartesischen Koordinaten $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$)

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{e}_3 \times \frac{\vec{r}}{x_1^2 + x_2^2}. \tag{19}$$

(a) Berechnen Sie Rotation und Divergenz in kartesischen Koordinaten!

Lösung: Es ist in kartesischen Koordinaten

$$\underline{V} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Wir setzen zur Abkürzung $x_1^2 + x_2^2 = R^2$. Dann ist für $R > 0$

$$\operatorname{rot} \underline{V} = \underline{\nabla} \times \underline{V} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \left[\frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/R^2 - 2(x_1^2 + x_2^2)/R^4 \end{pmatrix} = \underline{0} \tag{21}$$

und

$$\operatorname{div} \underline{V} = \underline{\nabla} \cdot \underline{V} = \partial_1 \left(\frac{-x_2}{R^2} \right) + \partial_2 \left(\frac{x_1}{R^2} \right) = -\frac{2x_1 x_2}{R^4} + \frac{2x_1 x_2}{R^4} = 0. \tag{22}$$

Bei $R = 0$, d.h. entlang der gesamten x_3-Achse, ist das Vektorfeld singulär und daher auch Rotation und Divergenz nicht definiert.

(b) Stellen Sie das Vektorfeld in Standardzylinderkoordinaten (R, φ, z) dar und berechnen Sie abermals Rotation und Divergenz. Dabei dürfen wieder die Formeln in Anhang A.2 des Manuskripts verwendet werden.

Lösung: Es gilt $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$, $\vec{r} = R\vec{e}_R + z\vec{e}_z$ und $R^2 = x_1^2 + x_2^2$ und damit

$$\vec{V} = \frac{1}{R^2} \vec{e}_z \times (R\vec{e}_R + z\vec{e}_z) = \frac{1}{R} \vec{e}_\varphi. \tag{23}$$

Damit findet man für $R > 0$ mit Hilfe der Formeln (A.2.6) bzw. (A.2.5) für Rotation und Divergenz sofort (21) und (22).

(c) Existiert ein skalares Potential, so dass

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi = -\operatorname{grad}\Phi \tag{24}$$

gilt?

Lösung: Da $\operatorname{rot} \vec{V} = 0$ ist, sollte es zumindest lokal ein skalares Potential geben. Es ist klar, dass wir es in Zylinderkoordinaten am einfachsten bestimmen können. Mit (A.2.4) folgt, dass $\Phi = \Phi(\varphi)$ sein muss, und dann gilt

$$-\vec{\nabla}\Phi = -\vec{e}_\varphi \frac{1}{R} \partial_\varphi \Phi(\varphi) \stackrel{!}{=} \vec{V} = \frac{1}{R} \vec{e}_\varphi. \tag{25}$$

Damit ist $\partial_\varphi \Phi = -1$ und also

$$\Phi(\varphi) = -\varphi. \tag{26}$$

Bemerkung: Es ist klar, dass das Potential eine Singularität besitzt, je nachdem welches Intervall der Länge 2π man für φ definiert. Eine Standardwahl für diesen Fall ist $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Dann ist das Potential entlang der Halbebene $\varphi = \pi$, was das Gleiche ist wie $\varphi = -\pi$, singulär, denn nähert man sich der Halbebene von der einen Seite her, also $\varphi \to \pi - 0^+$ wird $\Phi(\varphi) \to -\pi$ und von der anderen Seite her $\varphi \to -\pi + 0^+$ wird $\Phi(\varphi) \to \pi$, d.h. das Potential weist entlang der besagten Halbebene einen Sprung der Höhe 2π auf.

Die Funktion (26) sieht dabei gar nicht singulär aus, es liegt aber eine Koordinatensingularität vor, weil φ als Winkel eine zyklische Koordinate ist, und Werte, die sich nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, denselben geometrischen Ort bezeichnen.

Das Potential wird dadurch eindeutig bestimmt, dass man eine beliebige Halbebene aus dem Definitionsbereich herausnimmt, und das entsprechende Wegintegral von irgendeinem festgehaltenen Punkt aus bestimmt, wobei man nur Wege zulässt, die diese Halbebene nicht überschreiten. Entlang der Halbebene springt Φ immer um den Wert 2π.

(d) Berechnen Sie das Wegintegral

$$J = \int_{K_a} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{V} \tag{27}$$

entlang des Kreises in der Ebene $x_3 = 0$ mit Mittelpunkt bei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und Radius a, der durch

$$K_a: \quad \vec{r}(\varphi) = a \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \tag{28}$$

parametrisiert sei.

Lösung: Es gilt

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\varphi\, a \vec{e}_\varphi. \tag{29}$$

Mit (25) folgt daraus sofort

$$J = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi a \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{a} \vec{e}_\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi. \tag{30}$$

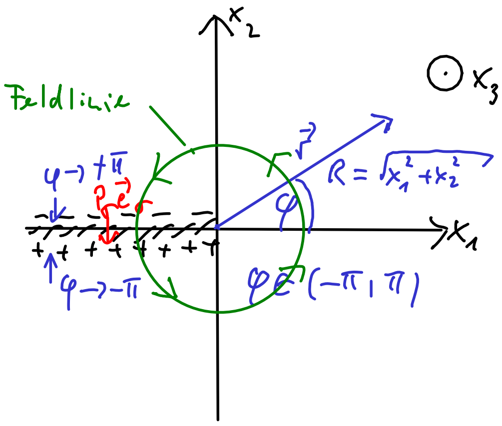
(e) **Zum Knobeln:** Wie lässt sich das mit dem in Abschnitt 1.5.5 des Manuskripts besprochenen Lemma von Poincaré vereinbaren? Ist der Satz von Stokes auf das Wegintegral anwendbar?

Lösung: Das Beispiel ist mit dem Lemma von Poincaré vereinbar, denn es gilt nur, wenn der Definitionsbereich des wirbelfreien Vektorfeldes ein *einfach* zusammenhängendes Gebiet ist. In unserem Fall besitzt das Vektorfeld entlang der gesamten x_3-Achse eine Singularität, und man kann den Kreis aus der vorigen Teilaufgabe nicht ganz innerhalb des Definitionsbereichs stetig auf einen Punkt zusammenziehen.

Beim Beweis des Lemmas von Poincaré haben wir den Stokesschen Integralsatz verwendet. Um das für unsere Kreislinie K_a tun zu können, müssten wir eine Fläche F finden, so dass der Rand $\partial F = K_a$ ist, so dass die Rotation des Vektorfeldes entlang dieser gesamten Fläche definiert ist. Eine jede solche Fläche schneidet aber unweigerlich die x_3-Achse, wo eben die Rotation nicht definiert ist.

Physikalische Realisierung des Potentialwirbels als elektrostatisches Feld

Wir haben oben gesehen, dass in diesem Beispiel das Potential nur dadurch eindeutig bestimmt werden kann, dass man eine willkürliche halbseitig unendlich ausgedehnte Fläche mit der x_3-Achse als Rand wählt und entlang dieser Fläche das Potential um einen Betrag von 2π springt. Dabei ist allerdings das Feld $\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi$ nur entlang der x_3-Achse singulär und ansonsten überall quellen- und wirbelfrei. Im Folgenden wählen wir als singuläre Fläche die x_1-x_3-Halbebene $(x_1, 0, x_3)$ mit $x_1 \in (-\infty, 0)$ und $x_3 \in \mathbb{R}$. Der Winkelbereich für die Zylinderkoordinaten ist dann wieder $\varphi \in (-\pi, \pi)$.



Das deutet darauf hin, dass wir als Quellen für ein entsprechendes elektrostatisches Feld eine Flächenladungsdichte entlang dieser Halbebene annehmen müssen. Allerdings sind dort keine Singularitäten des elektrischen Feldes, und das Flächenintegral von $\vec{E}$ eines beliebigen Volumens, das keine auf der x_3-Achse liegende Punkte enthält muss wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ verschwinden, d.h. es sind auch auf der besagten Halbebene keine „Netto-Ladungen" vorhanden. Das bedeutet, dass es sich um eine Art Doppelschicht beliebig nahe beieinanderliegender entgegengesetzt gleicher Flächenladungsdichten handeln muss, wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt. Aus Symmetriegründen nehmen wir an, dass wir eine homogene Dipolflächendichte vorliegen haben.

Um die entsprechende singuläre Ladungsdichte zu finden, betrachten wir zunächst eine homogene Flächenladungsdichte σ_+ an der Unter- und eine Flächenladungsdichte $-\sigma_+$ an der Oberseite bei $x_2 = \pm d/2$. Das ergibt die Ladungsdichte

$$\rho_d(\vec{x}) = \sigma_+ \Theta(-x_1)[\delta(x_2 + d/2) - \delta(x_2 - d/2)]. \tag{31}$$

Die Heavisidesche Sprungfunktion grenzt die Ladungsbeledgung auf die Halbebene $x_1 < 0$ ein.

Im Limes $d \to 0$ mit $\sigma_+ d = P_\sigma = \text{const}$, wobei P_σ die konstante Dipolstärke pro Flächeneinheit entlang der Fläche ist, erhalten wir durch Taylor-Entwicklun von (31) nach d und der entsprechenden Grenzwertbildung

$$\rho(\vec{x}) = P_\sigma \partial_2 \delta(x_2) \Theta(-x_1). \tag{32}$$

Wir berechnen nun das Potential mit Hilfe der entsprechenden Green-Funktion des Laplace-Operators, d.h.

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}'-\vec{x}|} \\
&= \frac{P_\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x_1' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_3' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2' \frac{1}{|\vec{x}'-\vec{x}|} \partial_2' \delta(x_2') \\
&= -\frac{P_\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x_1' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_3' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2' \delta(x_2') \partial_2' \frac{1}{|\vec{x}'-\vec{x}|} \\
&= +\frac{P_\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x_1' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_3' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2' \delta(x_2') \frac{x_2'-x_2}{|\vec{x}'-\vec{x}|^3} \\
&= -\frac{P_\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x_1' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_3' \frac{x_2}{[(x_1'-x_1)^2+x_2^2+(x_3'-x_3)^2]^{3/2}} \\
&= -\frac{P_\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x_1' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_3' \frac{x_2}{[(x_1'-x_1)^2+x_2^2+x_3'^2]^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt $x_3' \rightarrow x_3' - x_3$ substituiert. Wir berechnen zunächst die entsprechende Stammfunktion

$$I(x_3') = \int \mathrm{d}x_3' \frac{1}{(a^2+x_3'^2)^{3/2}} \tag{34}$$

Dazu substituieren wir $x_3' = a\sinh u$, $\mathrm{d}x_3' = a \sinh u$:

$$I(x_3') = \int \mathrm{d}u \frac{a\cosh u}{(a^2+a^2\sinh^2 u)^{3/2}} = \int \mathrm{d}u \frac{1}{a^2\cosh^2 u} = \frac{\tanh u}{a^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{x_3'}{a^2\sqrt{a^2+x_3'^2}}. \tag{35}$$

In (33) benötigen wir $I(\infty) - I(-\infty) = 2/a^2$ mit $a^2 = (x_1'-x_1)^2 + x_2^2$, d.h. (für $x_2 > 0$)

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{x}) &= -\frac{P_\sigma x_2}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x_1' \frac{1}{(x_1'-x_1)^2+x_2^2} \\
&= -\frac{P_\sigma}{2\pi\epsilon_0 x_2} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+(x_1'-x_1)^2/x_2^2} \\
&= -\frac{P_\sigma}{2\pi\epsilon_0} \arctan\left(\frac{x_1'-x_1}{x_2}\right)_{x_1'\rightarrow-\infty}^0 \\
&= -\frac{P_\sigma}{2\pi\epsilon_0}[-\arctan(x_1/x_2)+\pi/2] = -\frac{P_\sigma}{2\pi\epsilon_0}\varphi.
\end{aligned} \tag{36}$$

Für das elektrische Feld erhalten wir dann in der Tat

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) = -\vec{e}_\varphi \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = +\frac{P_\sigma}{2\pi\epsilon_0 R}\vec{e}_\varphi. \tag{37}$$

Es ergibt sich also für $\vec{E}$ tatsächlich ein Potentialwirbelfeld der Art (23)

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo2-l3-SS24/index.html`