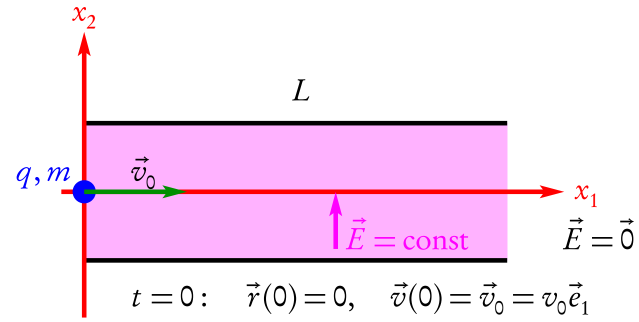
Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Lösungen 1

Aufgabe 1: Geladenes Teilchen im homogenen elektrostatischen Feld

Wie wir später in der Vorlesung lernen werden, kann man zwischen zwei parallelen leitenden Platten (Plattenkondensator) ein näherungsweise homogenes elektrisches Feld erzeugen. Die Platten besitzen die Länge L, und wir nehmen näherungsweise an, dass zwischen den Platten ein konstantes elektrisches Feld $\vec{E} = E\vec{e}_2$ herrscht, und außerhalb der Platten das Feld verschwindet. Zur Zeit $t = 0$ gelange ein Punktteilchen der Ladung q in den Kondensator bei $\vec{r} = 0$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_1$. Einfachheitshalber sei die Schwerkraft der Erde in dieser Aufgabe vernachlässigt.



(a) Berechnen Sie die Kraft die auf das Teilchen innerhalb und außerhalb des Kondensators wirkt.

Lösung: Die Kraft auf eine Punktladung in einem elektrischen Feld ist überall $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$. Für unseren Fall gilt also

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} q\vec{E} = \text{const} & \text{innerhalb des Kondensators,} \\ 0 & \text{außerhalb des Kondensators.} \end{cases} \tag{1}$$

(b) Wie lautet die Bewegungsgleichung für das Teilchen?

Lösung: Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet

$$m\vec{a}(t) = m\dot{\vec{v}}(t) = m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}). \tag{2}$$

In unserem Fall gilt also in kartesischen Koordinaten $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$

$$m\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ qE \\ 0 \end{pmatrix} & \text{innerhalb des Kondensators,} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{außerhalb des Kondensators.} \end{cases} \tag{3}$$

(c) Welche Geschwindigkeit und welchen Ort besitzt das Teilchen, wenn es am Ende des Kondensators angekommen ist?

Lösung: Da in unserem Fall $E = \text{const}$ ist, finden wir die allgemeine Lösung unter Anwendung der oben angegebenen Anfangsbedingung $\vec{v}(0) = (v_0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ durch einfache Integration. Solange sich das Teilchen *innerhalb des Kondensators* befindet, gilt

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathrm{d}t' \frac{qE}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ qEt/m \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Dieses Resultat können wir gleich nochmals nach der Zeit integrieren, um die Trajektorie des Teilchens zu erhalten. Mit der Anfangsbedingung $\vec{r} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \int_0^t \mathrm{d}t' \begin{pmatrix} v_1(t') \\ v_2(t') \\ v_3(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ qEt^2/(2m) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Das Teilchen verlässt den Kondensator wenn $x_1(t_{\text{end}}) = L$ ist, d.h.

$$x_1(t_{\text{end}}) = v_0 t_{\text{end}} = L \Rightarrow t_{\text{end}} = \frac{L}{v_0}. \tag{6}$$

Setzen wir dies in (4) ein, finden wir

$$\vec{v}_{\text{end}} = \vec{v}(t_{\text{end}}) = \begin{pmatrix} v_0 \\ qEL/(mv_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Der Ort des Teilchens ist dann

$$\vec{x}_{\text{end}} = \vec{x}(t_{\text{end}}) = \begin{pmatrix} L \\ qEL^2/(2mv_0^2) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

(d) Wie fliegt es danach weiter?

Lösung: Da sich das Teilchen für $t > t_{\text{end}}$ offenbar außerhalb des Zylinders befindet, gilt dort

$$m\dot{\vec{v}} = 0 \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_{\text{end}} = \text{const} \quad \text{für} \quad t > t_{\text{end}}. \tag{9}$$

Das Teilchen bewegt sich also mit konstanter Geschwindigkeit weiter (Trägheitsgesetz!). Für den Ort gilt

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_{\text{end}} + \int_{t_{\text{end}}}^t \mathrm{d}t' \vec{v}(t') = \begin{pmatrix} L + v_0(t - t_{\text{end}}) \\ qEL^2/(2mv_0^2) + qEL(t - t_{\text{end}})/(mv_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Aufgabe 2: Geladenes Teilchen im homogenen statischen Magnetfeld

Auf ein Teilchen der Ladung q wirkt in einem Magnetfeld die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Im folgenden sei $\vec{B} = B\vec{e}_3 = \text{const}$.

(a) Schreiben Sie die Kraft explizit in kartesischen Koordinaten!

Lösung: Wir müssen einfach die Rechenregel für das Vektorprodukt in kartesischen Koordinaten anwenden:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} v_2 B \\ -v_1 B \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

(b) Wie lautet die Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit? Es gilt

$$m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = m \begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix} = qB \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Mit der sog. Zyklotronkreisfrequenz $\omega = qB/m$ folgen für die einzelnen Komponenten die Differentialgleichungen

$$\dot{v}_1 = \omega v_2 \tag{13}$$

$$\dot{v}_2 = -\omega v_1 \tag{14}$$

$$\dot{v}_3 = 0. \tag{15}$$

Hier haben wir es also mit einem echten Differentialgleichungssystem zu tun, denn die Zeitableitung der Geschwindigkeitskomponenten hängt von der Geschwindigkeit ab, und man kann nicht mehr so einfach die Bewegungsgleichungen durch einfache Integration nach der Zeit lösen.

(c) Finden Sie eine Differentialgleichung für v_1 allein, indem Sie die Bewegungsgleichung für v_1 einmal nach der Zeit ableiten und dann die Bewegungsgleichung für v_2 verwenden!

Hinweis: Erinnern Sie sich an den harmonischen Oszillator aus der Mechanik-Vorlesung!

Lösung: Um eine Differentialgleichung für v_1 allein zu erhalten, folgen wir der Anleitung und Differenzieren zunächst (13) nach der Zeit:

$$\ddot{v}_1 = \omega \dot{v}_2. \tag{16}$$

Jetzt können wir (14) verwenden, um auf der rechten Seite $\dot{v}_2$ zu eliminieren. Dies ergibt

$$\ddot{v}_1 = -\omega^2 v_1. \tag{17}$$

(d) Anfangs, zur Zeit $t = 0$, sei $\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_1$. Lösen Sie die in der vorigen Teilaufgabe gefundene Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit.

Lösung: Aus der Mechanikvorlesung kennen wir die Differentialgleichung (17) als Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators, wobei sie dort für den Ort des harmonischen Oszillators gilt. Freilich ist die Lösungsstrategie hier die gleiche. Da wir eine lineare Differentialgleichung haben, müssen wir nur zwei linear unabhängige Lösungen finden. Die allgmeine Lösung ist dann die Superposition aus diesen Lösungen. Wir benötigen also zwei Funktionen, für die die zweite Ableitung bis auf einen Faktor gerade das Negative dieser Funktionen ergibt. Das gilt aber für cos und sin:

$$v_1(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t). \tag{18}$$

Dabei sind C_1 und C_2 Integrationskonstanten, die wir aus der Anfangsbedingung bestimmen müssen. Es soll gelten $v_1(0) = v_0$, d.h.

$$v_1(0) = C_1 = v_0. \tag{19}$$

Um auch C_2 zu bestimmen, verwenden wir (13), um v_2 auszurechnen

$$v_2(t) = \frac{1}{\omega}\dot{v}_1(t) = -C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t). \tag{20}$$

Für $t = 0$ ist $v_2 = 0$, d.h.

$$v_2(0) = C_2 = 0. \tag{21}$$

Damit haben wir die Lösungen

$$v_1(t) = v_0 \cos(\omega t), \tag{22}$$

$$v_2(t) = -v_0 \sin(\omega t). \tag{23}$$

Für v_3 gilt wegen (12)

$$\dot{v}_3 = 0 \ \Rightarrow \ v_3(t) = \text{const} \ \Rightarrow \ v_3(t) = 0. \tag{24}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Anfangsbedingung $v_3(0) = 0$ verwendet.

(e) Berechnen Sie nun noch die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(t = 0) = \vec{0}$. Welche geometrische Form besitzt diese Kurve?

Lösung: Wir können nun einfach die Trajektorie des Teilchens berechnen, indem wir (22)-24) nach der Zeit integrieren. Mit der Anfangsbedingung $\vec{r}(0) = 0$ gilt

$$x_1(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' v_1(t') = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), \tag{25}$$

$$x_2(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' v_2(t') = \frac{v_0}{\omega}[\cos(\omega t) - 1], \tag{26}$$

$$x_3(t) = x_3(0) = 0. \tag{27}$$

Offenbar handelt es sich bei der Bahnkurve um einen Kreis, denn es gilt für alle Zeiten

$$x_1^2 + (x_2 + v_0/\omega)^2 = v_0^2/\omega^2. \tag{28}$$

Der Mittelpunkt liegt demnach bei $(0, -v_0/\omega, 0)$, und der Radius ist $a = v_0/\omega$. Die Winkelgeschindigkeit ist $\omega = qB/m$, und der Kreis wird im Uhrzeigersinn in der x_1x_2-Ebene durchlaufen.

Knobelfrage zum Nachdenken: J. J. Thomson wies 1896 nach, dass Kathodenstrahlen aus geladenen Teilchen bestehen, indem er deren Ablenkung in elektrischen bzw. magnetischen Feldern vermaß. Es waren derzeit weder Ladung noch Masse dieser Teilchen bekannt. Hätte Thomson, durch irgendeine clevere Wahl von elektrischen und magnetischen Feldern sowohl Ladung als auch Masse bestimmen können?

Heute wissen wir, dass die Kathodenstrahlen Elektronen mit einer Ladung $q_e = -e = -1{,}602176634 \cdot 10^{-19}$ C und einer Masse $m = 9{,}1093837015(28) \cdot 10^{-31}$ kg sind.

Bemerkung: Die Ladung $e = +1{,}602176634 \cdot 10^{-19}$ C (exakt, da durch Definition der elektrischen Ladungseinheit im SI festgelegt) heißt **Elementarladung**. Die uns umgebende Materie besteht aus Atomen, die ihrerseits aus einem **Atomkern**, die ihrerseits aus **Protonen** und **Neutronen** mit um diesen herumgruppierten **Elektronen** zusammengesetzt sind. Da die Materie erfahrungsgemäß elektrisch neutral ist, müssen die Protonen die exakt entgegengesetzte Ladung des Elektrons besitzen, also $q_p = +e$, und ein neutrales Atom besitzt genauso viele Elektronen wie Protonen im Kern enthalten sind. Die Neutronen sind elektrisch neutral, d.h. $q_n = 0$.

Heute wissen wir, dass die Protonen und Neutronen (zusammenfassend auch **Nukleonen** genannt) selbst keine elementaren Teilchen sind sondern ein komplizierter Bindungszustand aus **Quarks** (und **Gluonen**). Die Bindung wird durch die starke Kernkraft hervorgerufen. Die Nukleonen setzen sich aus den beiden leichtesten Quarks (up und down) zusammen. Jedes Nukleon besitzt 3 sog. Valenzquarks. Da die Ladung eines zusammengesetzten Objekts sich additiv aus der Ladung der Konstituenten zusammensetzt müssen die Ladungen der Quarks demnach Vielfache von $e/3$ sein. Es zeigt sich, dass das up-Quark die Ladung $q_{\text{up}} = +2e/3$ und das down-Quark die Ladung $q_{\text{down}} = -e/3$ besitzt. Demzufolge setzt sich das Proton aus 2 up- und einem down-Quark zusammen, während das Neutron zwei down- und ein up-Quark enthält. Aufgrund einer komplizierten, bislang noch nicht wirklich vollständig verstandenen, Eigenschaft der starken Wechselwirkung kann man Quarks (und auch Gluonen) nie als freie Teilchen beobachten, sondern nur als sog. Hadronen. Dies nennt man **Confinement**. Bekannt sind Bindungszustände aus 3 Quarks (**Baryonen**), zu denen wie eben beschrieben auch die Protonen und Neutronen gehören und Bindungszustände aus einem Quark und einem Antiquark (**Mesonen**). Deshalb lassen sich (wenigstens bislang) nur Elementarteilchen und zusammengesetzte Teilchen mit ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung e beobachten.

Ein genaues Verständnis dieses mikroskopischen Aufbaus der Materie ist nur im Rahmen der Quantentheorie möglich. In der klassischen Elektrodynamik, die wir in diesem Semester behandeln, wird die makroskopische Materie nur im Sinne einer „effektiven Theorie“ phänomenologisch behandelt. Ihre Eigenschaften werden dabei durch Ladungs-, Strom- und Magnetisierungsverteilungen sowie Materialkonstanten wie Dielektrizität, Permeabilität und elektrische Leitfähigkeit beschrieben.

Lösung: Für ein allgemeines elektromagnetisches Feld (auch zeitabhängige!) gilt die Newtonsche Bewegungsgleichung mit der Lorentz-Kraft

$$m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}} = q[\vec{E}(\vec{r}(t), t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}(t), t)]. \tag{29}$$

Dividieren wir durch m sehen wir, dass die Lösungen, unabhängig davon wie kompliziert die Gleichungen aufgrund der vorgegebenen elektrischen und magnetischen Felder auch sein mögen, nur vom Verhältnis q/m abhängen.

Thomson konnte (1912) für „Kanalstrahlen“ (also positiv geladene Ionen) durch eine Kombination paralleler konstanter Felder $\vec{E} = E\vec{e}_3$ und $\vec{B} = B\vec{e}_3$ recht genau das Ladungs-zu-Masse-Verhältnis dieser Ionen bestimmen, nicht aber die jeweils für sich Ladung oder Masse. Das Verfahren heißt Parabelmethode. Eine schöne Beschreibung findet sich z.B. bei LEIFI Physik:

https://www.leifiphysik.de/elektrizitaetslehre/bewegte-ladungen-feldern/versuche/thomson
-spektrograph Link

Mehr zu J. J. Thomson gibt es in der englischsprachigen Wikipedia:

https://en.wikipedia.org/wiki/J._J._Thomson
