H. van Hees **Sommersemester 2024**

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 10

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Magnetisches Moment einer stationären Stromdichte

Wir betrachten eine beliebige stationäre Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, für die $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$ gelten muss (Ladungserhaltung für zeitunabhängige Felder und Quellen). Sie sei weiter auf eine Kugel mit Radius a um den Ursprung begrenzt, d.h. es sei $\vec{j}(\vec{r})=0$ für $r=|\vec{r}|\geq a$. Aus den Gleichungen für das statische Magnetfeld

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}. \tag{2}$$

folgt wegen (1), dass es ein Vektorpotential $\vec{A}$ gibt, so dass $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ und für das wir die „Eichfreiheit" verwenden können, um die Nebenbedingung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ zu fordern („Coulomb-Eichung"). Für die zweite Gleichung ergibt sich dann

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\Delta\vec{A}=-\Delta\vec{A}=\mu_0\vec{j}. \tag{3}$$

Mit der Green-Funktion für den Laplace-Operator folgt daraus

$$\vec{A}(\vec{r})=\int_{K_a}\mathrm{d}^3r'\,\frac{\mu_0\vec{j}(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{4}$$

Dabei ist K_a die Kugel mit Radius a mit Mittelpunkt im Ursprung. Man kann nun für $r=|\vec{r}|\gg a$ die Taylor-Entwicklung von $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ bzgl. $\vec{r}'$ verwenden und mit der linearen Ordnung abbrechen:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{r}-(\vec{r}'\cdot\vec{\nabla})\frac{1}{r}+\mathcal{O}(r'^2)=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3}+\cdots \tag{5}$$

Damit folgt schließlich

$$\vec{A}(\vec{r})\simeq\int_{K_a}\frac{\mu_0\vec{j}(r')}{4\pi}\left(\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3}\right). \tag{6}$$

Mit den folgenden Aufgaben werten wir die beiden Integrale genauer aus. Dazu nutzen wir zunächst $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$ aus und verwenden den Gaußschen Integralsatz

$$\int_{K_a}\mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\nabla}\cdot[F(\vec{r})\vec{j}(\vec{r})]=\int_{\partial K_a}\mathrm{d}^2\vec{r}\cdot F(\vec{r})\vec{j}(\vec{r})=0 \tag{7}$$

an. Dabei ist F ein beliebiges Skalarfeld.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass daraus

$$\int_{K_a}\mathrm{d}^3r\,\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}F=0 \tag{8}$$

folgt.

(b) (2 Punkte) Wenden Sie (8) für $F(\vec{r}) = r_j$ ($j \in \{1,2,3\}$) an, wobei r_j die j-te kartesische Komponente von $\vec{r}$ ist, und argumentieren Sie daraus, dass

$$\int_{\mathbb{K}_a} \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}\,') = 0 \tag{9}$$

folgt.

(c) (2 Punkte) Wenden Sie nun (8) für $F(\vec{r}) = r_j r_k$ an, um zu zeigen, dass

$$\int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' r_j' j_k(\vec{r}\,') = -\int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' r_k' j_j(\vec{r}\,') \tag{10}$$

ist.

(d) (3 Punkte) Mit (9) und (10) folgt dann aus (6)

$$A_j(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' j_j(\vec{r}\,') r_k' r_k = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' [j_j(\vec{r}\,') r_k' - j_k(\vec{r}\,') r_j'] r_k. \tag{11}$$

Zeigen Sie, dass man diese Formel als

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \tag{12}$$

mit dem **magnetischen Dipolmoment** der Stromdichte $\vec{j}$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{K_a} \mathrm{d}^3 r' [\vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')]. \tag{13}$$

(e) (3 Punkte) Zeigen Sie schließlich, dass (12) zu einem Dipolfeld für $\vec{B}$ führt, d.h.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - \vec{m} r^2]. \tag{14}$$