

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 7

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Strahlungseichung für freie Felder

In der Vorlesung haben wir die Potentiale Φ und \vec{A} für das elektromagnetische Feld im Vakuum eingeführt. Bei Anwesenheit von (vorgegebenen) Ladungs- und Stromverteilungen ρ bzw. \vec{j} lauten die entsprechenden Gleichungen

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \Phi, \quad (1)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (2)$$

$$\square \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (3)$$

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (4)$$

Dabei müssen die Potentiale die Lorenz-Eichbedingung

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5)$$

erfüllen.

Im Folgenden betrachten wir den Fall **freier elektromagnetischer Wellen**, d.h. $\rho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$.

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass in diesem Fall *zusätzlich* zur Lorenz-Eichbedingung noch

$$\Phi' = 0 \quad (6)$$

gefordert werden darf, und dass dies durch eine Eichtransformation

$$\Phi' = \Phi + \partial_t \chi \stackrel{!}{=} 0, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \chi \quad (7)$$

mit der Nebenbedingung

$$\square \chi = 0 \quad (8)$$

erreicht werden kann.

- (b) [2 Punkte] Vergewissern Sie sich, dass nun auch für die neuen Potentiale $\Phi' = 0$, \vec{A}' immer noch die Lorenz-Eichbedingung erfüllt ist. Welche Eichbedingung ergibt sich daraus für \vec{A}' ? Man nennt diese Eichung die **Strahlungseichung**. Warum kann es Potentiale in dieser Eichung nur für $\rho = 0$ geben?

- (c) [3 Punkte] Finden Sie nun die allgemeine Ebene-Wellen-Lösung für in \vec{k} -Richtung fortschreitende Wellen mit dem komplexen Ansatz

$$\vec{A}'(t, \vec{r}) = \vec{A}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t), \quad \vec{A}_0 = \text{const.} \quad (9)$$

Was ergibt sich für $\omega = \omega(\vec{k})$? Welche Einschränkung muss \vec{A}_0 erfüllen, damit die Strahlungseichbedingung für \vec{A}' erfüllt ist.

- (d) [3 Punkte] Berechnen Sie nun \vec{E} und \vec{B} mittels (1). Dazu beachte man, dass die physikalischen Felder durch den Realteil der soeben berechneten komplexen Felder gegeben sind.

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Eichtransformation von Lorenz- zu Coulomb-Eichung

In der Vorlesung haben wir als spezielle Eichbedingungen an die elektromagnetischen Potentiale die Lorenz-Eichung

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi_L + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_L = 0 \quad (10)$$

und die Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_C = 0 \quad (11)$$

kennengelernt.

- (a) [3 Punkte] Finden Sie eine partielle Differentialgleichung für das skalare Eichfeld χ , mit dem die beiden Eichungen via

$$\Phi_C = \Phi_L + \frac{1}{c^2} \partial_t \chi, \quad \vec{A}_C = \vec{A}_L - \vec{\nabla} \chi \quad (12)$$

ineinander umgerechnet werden können.

- (b) [4 Punkte] Verwenden Sie die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}, \quad (14)$$

um Feldgleichungen für die Potentiale in Coulomb-Eichung Φ_C und \vec{A}_C herzuleiten.

- (c) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass die gefundenen Feldgleichungen mit der Coulomb-Eichbedingung (11) kompatibel sind.

Aufgabe 3 [10 Punkte]: Review zur Vektoranalysis

Fassen Sie kurz die grundlegende Mathematik der Vektoranalysis zusammen.

- die Operationen grad, div, rot und der Operator $\vec{\nabla}$ in kartesischen Koordinaten
- Weg-, Flächen- und Volumenintegrale
- Koordinatenunabhängige Definitionen von div und rot mittels Flächen- bzw. Wegintegralen
- Gaußscher und Stokesscher Integralsatz
- Existenz eines skalaren Potentials für wirbelfreie Vektorfelder
- Existenz eines Vektorpotentials für quellenfreie Vektorfelder; Eichinvarianz
- Helmholtzscher Zerlegungssatz (Fundamentalsatz der Vektoranalysis)

Das Skript und Lehrbücher dürfen selbstverständlich verwendet werden!

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo2-13-SS24/index.html>