H. van Hees **Sommersemester 2024**

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 6

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Vektorpotential eines quellenfreien Vektorfeldes

Wir wollen zeigen, dass für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{V}$, das „quellenfrei" ist, für das also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{1}$$

gilt, stets ein Vektorpotential $\vec{A}$ existiert, so dass

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{2}$$

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\vec{A}$ nur bis auf den Gradienten eines Skalarfeldes bestimmt sein kann, d.h. wenn $\vec{A}$ (2) erfüllt, so erfüllt auch

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \tag{3}$$

für beliebige skalare Felder χ diese Gleichung.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass man für eine beliebige Lösung $\vec{A}$ von Gl. (2) man stets ein Feld χ finden kann, so dass gemäß (3) $A_3' = 0$ ist. Wir dürfen im Folgenden also Annehmen, dass das Vektorpostential neben der Gleichung (2) die zusätzliche „axiale Eichbedingung"

$$A_3 = 0 \tag{4}$$

erfüllt.

(c) (5 Punkte) Schreiben Sie nun die Gleichung (7) für ein Potential, das die axiale Eichbedingung (4) erfüllt, in Komponentenschreibweise explizit hin und lösen Sie die Gleichungen für A_1 und A_2 durch direkte Integration und zeigen Sie, dass dann tatsächlich (7) gelöst ist, vorausgesetzt die Bedingung der Quellenfreiheit (1) für das Vektorfeld $\vec{V}$ ist erfüllt.

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Magnetfeld des unendlich langen Drahtes

Ein zylinderförmiger unendlich langer Draht mit Radius a entlang der x_3-Achse eines kartesischen Koordinatensystems sei von einem Strom $I = \text{const}$ durchflossen. Die Stromdichte sei entsprechend $\vec{j} = I\Theta(a - R)\vec{e}_3/(\pi a^2)$, wobei $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ist.

(a) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie das Vektorpotential $\vec{A}$ ($\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$), indem Sie mit Hilfe des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j} \tag{5}$$

zeigen, dass es in kartesischen Koordinaten die vektorielle Poisson-Gleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \tag{6}$$

erfüllt, vorausgesetzt, das Vektorpotential genügt der Coulomb-Eichbedingung

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \tag{7}$$

Hinweis: Sie können die Formeln in Anhang C.3 des Manuskripts verwenden!

(b) **[2 Punkte]** Begründen Sie, dass aufgrund der Symmetrie des Problems der Ansatz

$$\vec{A} = A(R)\vec{e}_z \tag{8}$$

plausibel ist, wobei (R, φ, z) die üblichen Zylinderkoordinaten (vgl. Anhang A.2 des Manuskripts) sind.

(c) **[2 Punkte]** Zeigen Sie unter Verwendung der Formeln in Anhang A.2 des Manuskripts, dass die Coulomb-Eichbedingung (7) für beliebige Funktionen $A(R)$ erfüllt ist.

(d) **[3 Punkte]** Schreiben Sie nun die Gleichung (5) in Zylinderkoordinaten und lösen Sie unter Beachtung der Randbedingungen des Magnetfeldes am Zylinderrand die Differentialgleichung für $A(R)$. Berechnen Sie dann via $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ das Magnetfeld.
