

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 10

Aufgabe 1 [20 Punkte]: Rotierende homogen geladene Kugel (Magnetostatik)

Wir betrachten eine homogen geladene Kugel vom Radius a mit Mittelpunkt im Ursprung des kartesischen Bezugssystems und Gesamtladung Q , die mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega} = (0, 0, \omega)$ um die 3-Achse rotiert.

- (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Ladungs- und Stromdichte durch

$$\rho(\underline{x}) = \rho_0 \Theta(a - r), \quad \vec{j}(\underline{r}) = \rho(\underline{r}) \underline{v}(\underline{r}) = \rho_0 \underline{\omega} \times \underline{r} \Theta(a - r) \quad (1)$$

gegeben sind. Dabei ist

$$\rho_0 = \frac{3Q}{4\pi a^3}, \quad r = |\vec{r}|, \quad \Theta(a - r) = \begin{cases} 1 & \text{für } r < a, \\ 0 & \text{für } r > a. \end{cases} \quad (2)$$

- (b) (5 Punkte) Berechnen Sie das Potential für das elektrostatische Feld mit Hilfe der Poisson-Gleichung

$$-\Delta \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

Hinweis: Aufgrund der Kugelsymmetrie führt der Ansatz $\Phi = \Phi(r)$ zum Ziel. Schreiben Sie die Gleichung unter Verwendung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten jeweils für $r < a$ und $r > a$ hin und beachten Sie, dass das Potential sowie $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$ an der Kugeloberfläche stetig sein müssen. Berechnen Sie daraus das elektrische Feld.

- (c) (2 Punkte) Welcher Art ist das elektrische Feld im ladungs- und stromfreien Bereich $r > a$?
- (d) (3 Punkte) Für das Magnetfeld berechnen Sie das Vektorpotential in der Coulomb-Eichung

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0 \quad (4)$$

vermöge der Poisson-Gleichung

$$-\Delta \underline{A} = \mu_0 \underline{j}, \quad (5)$$

indem Sie den Ansatz

$$\underline{A} = (\underline{\omega} \times \underline{r}) f(r) \quad (6)$$

verwenden. Zeigen Sie zunächst, dass (4) für beliebige $f(r)$ erfüllt ist. Setzen Sie dann (6) in (5) ein und stellen Sie Differentialgleichungen für $f(r)$ jeweils für $r < a$ und $r > a$ auf. Beachten Sie dabei, dass der Laplace-Operator eines Vektorfeldes nur in kartesischen Koordinaten gilt, d.h. schreiben Sie \underline{A} *nicht* in Kugelkoordinaten um!

- (e) (2 Punkte) Berechnen Sie $\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$ für den Ansatz (6) für \underline{A} .
- (f) (3 Punkte) Lösen Sie die Gleichungen für $f(r)$ unter Beachtung, dass \vec{A} und $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ an der Kugeloberfläche stetig sein müssen.
- (g) (2 Punkte) Welcher Art ist das Feld im Ladungs- und stromfreien Bereich $r > a$?
-

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo2-13-SS22/index.html>