# Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 3

---

## Aufgabe 1: Vektorprodukt

Im Manuskript haben wir das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ geometrisch definiert. Demnach soll $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ wieder ein Vektor sein, dessen Betrag $|\vec{c}| = a\,b \sin\angle(\vec{a},\vec{b})$ der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist. Die Richtung ist senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gemäß der Rechte-Hand-Regel. Es ist ziemlich schwierig, aus dieser Definition das Distributivgesetz, d.h. $(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ zu beweisen. Nimmt man aber an, dass das Distributivgesetz gilt und dass $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ eine rechtshändige kartesische Basis bilden, so folgt für die kartesischen Komponenten des Vektorprodukts

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir definieren nun einfach das Vektorprodukt algebraisch auf diese Weise, d.h. wir setzen voraus, dass (1) für die kartesischen Komponenten beliebiger Vektoren gilt.

Zeigen Sie dann die folgenden Rechenregeln durch direktes Nachrechnen

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \tag{2}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0, \tag{3}$$

$$(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \tag{4}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), \tag{5}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \tag{6}$$

Zeigen Sie schließlich, dass in der Tat die geometrische Bedeutung erfüllt ist.

**Tipp:** Dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beide auf $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht stehen, haben wir mit Gl. (3) schon gezeigt. Es fehlt also noch die Berechnung des Betrags. Verwenden Sie dazu nacheinander (6) und (5), um

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = [a\,b \sin\angle(\vec{a},\vec{b})]^2 \tag{7}$$

zu berechnen. Machen Sie sich anhand einer Skizze klar, dass das der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist.

---

## Aufgabe 2: Elektrisches Potential eines homogen geladenen Zylinders

Gegeben sei ein unendlich langer Zylinder parallel zur $x_3$-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Der Mittelpunkt der Kreisquerschnittsflächen sei bei $x_1 = x_2 = 0$ und der Kreisradius $a$. Der Zylinder bestehe aus homogen geladener Materie, d.h. im Zylinder sei die Ladungsdichte $\rho = \text{const}$ und außerhalb $0$. Rechnen Sie in Zylinderkoordinaten. Die Formeln in Anhang A.2 des Manuskripts dürfen im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.

(a) Argumentieren Sie, dass aus Symmetriegründen das elektrostatische Potential nur von $R$ abhängen kann. Überlegen Sie dazu zuerst, welche Symmetrien der Zylinder aufweist.

(b) Verwenden Sie nun den Ansatz $\Phi(\vec{r}) = V(R)$, um die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{8}$$

durch einfache Integrationen zu lösen und berechnen Sie dann $\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi$.

**Tipp:** Verwenden Sie die Stetigkeit von $\Phi$ und $\vec{E}$ bei $R = a$ sowie die Bedingung, dass $\Phi$ in $R = 0$ keine Singularität besitzen darf, um die auftretenden Integrationskonstanten für die Bereiche $R < a$ und $R > a$ vollständig festzulegen.

(c) Überprüfen Sie die Lösung, indem Sie zeigen, dass in der Tat überall

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \tag{9}$$

gilt.

---

**Aufgabe 3: Potentialwirbel**

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{e}_3 \times \frac{\vec{r}}{r^2}. \tag{10}$$

(a) Berechnen Sie Rotation und Divergenz des Feldes in kartesischen Koordinaten!

(b) Stellen Sie das Vektorfeld in Standardzylinderkoordinaten $(R, \varphi, z)$ dar und berechnen Sie abermals Rotation und Divergenz. Dabei dürfen wieder die Formeln in Anhang A.2 des Manuskripts verwendet werden.

(c) Existiert ein skalares Potential, so dass

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi = -\operatorname{grad}\Phi \tag{11}$$

gilt?

(d) Berechnen Sie das Wegintegral

$$J = \int_{K_a} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{V} \tag{12}$$

entlang des Kreises in der $x_1$-$x_2$-Ebene mit dem Mittelpunkt bei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und Radius $a$, der durch

$$K_a: \quad \vec{r}(\varphi) = a \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \tag{13}$$

parametrisiert sei.

(e) **Zum Knobeln:** Wie lässt sich das mit dem in Abschnitt 1.5.5 des Manuskripts besprochenen Lemma von Poincaré vereinbaren? Ist der Satz von Stokes auf das Wegintegral anwendbar?

---