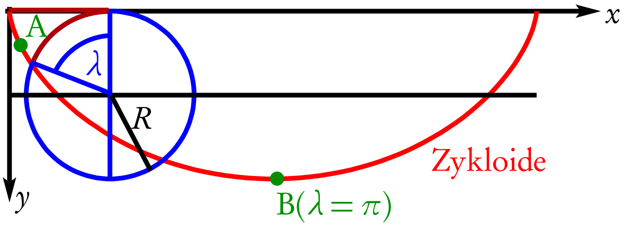
H. van Hees **Wintersemester 2023/2024**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 7

Aufgabe 1 (10 Punkte): Bewegung auf der Brachistochrone

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Brachistochrone, also die Kurve entlang derer ein Massenpunkt, aus der Ruhe losgelassen, unter Einfluss der Schwerkraft am schnellsten von einem vorgegebenen Anfangspunkt A bei zum ebenfalls vorgegebenen Endpunkt B gelangt.



(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Brachistochrone, deren Parameterdarstellung

$$x(\lambda) = R(\lambda - \sin\lambda), \quad y(\lambda) = R(1 - \cos\lambda) \tag{1}$$

aus der Vorlesung bekannt ist, eine Zykloide ist, also die Kurve, die ein auf einem Kreis befestigter Punkt mit Radius R, der entlang der x-Achse abrollt, beschreibt. Der Parameter λ ist der in der Zeichnung oben angegebene Winkel.

Tip: Die Rollbedingung besagt, dass der dunkelrot eingezeichnete Kreisbogen und die ebenfalls dunkelrote Strecke auf der x-Achse die gleiche Länge besitzen.

Lösung: Das dunkelrote Kreissegment und die auf der x-Achse abgetragene dunkelrote Strecke besitzen die Länge $R\lambda$. Für den entsprechenden Punkt auf der Zykloide liest man damit unmittelbar

$$\underline{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} R\lambda - R\sin\lambda \\ R - R\cos\lambda \end{pmatrix} \tag{2}$$

ab, was den in der Aufgabenstellung angegebenen Gleichungen entspricht.

(b) (2 Punkte) Betrachten Sie nun einen Massenpunkt m, der sich entlang der Zykloide im homogenen Schwerefeld der Erde bewegt (d.h. die Kraft auf den Massenpunkt ist $\vec{F} = mg\vec{e}_y = \text{const}$). Berechnen Sie die Geschwindigkeit (als Funktion von λ und $\dot{\lambda}$), die kinetische Energie und das Potential der Kraft.

Lösung: Die Geschwindigkeit ist

$$\underline{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{r}(\lambda) = \dot{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\underline{r}(\lambda) = R\dot{\lambda}\begin{pmatrix} 1 - \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Daraus folgt die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\underline{v}^2 = \frac{m}{2}R^2\dot{\lambda}^2[(1-\cos\lambda)^2 + \sin^2\lambda] = mR^2\dot{\lambda}^2(1-\cos\lambda). \tag{4}$$

Für das Potential der Kraft muss gelten

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} = -\underline{\nabla}V = -\begin{matrix} \partial_x V \\ \partial_y V \end{matrix} \Rightarrow V = -mgy = -mgR(1-\cos\lambda). \tag{5}$$

(c) (3 Punkte) Führen Sie nun den neuen Parameter $u = \cos(\lambda/2)$ ein und zeigen Sie, dass sich dann die Gesamtenergie zu

$$E = T + V = 8mR^2\dot{u}^2 - 2mgR(1-u^2) \tag{6}$$

ergibt.

Lösung: Es ist gemäß (4) und (5)

$$E = T + V = m\left(R^2\dot{\lambda}^2 - gR\right)(1-\cos\lambda). \tag{7}$$

Setzen wir also nun $u = \cos(\lambda/2)$. Zunächst ist nach dem Doppelwinkeltheorem für den Cosinus $\cos\lambda = \cos(2\lambda/2) = \cos^2(\lambda/2) - \sin^2(\lambda/2) = 2\cos^2(\lambda/2) - 1 = 2u^2 - 1$ und folglich $1 - \cos\lambda = 2(1-u^2)$. Weiter ist $\dot{u} = -\sin(\lambda/2)\dot{\lambda}/2$ und folglich $\dot{u}^2 = (1-u^2)\dot{\lambda}^2/4 = \dot{\lambda}^2(1-\cos\lambda)/8$. Damit wird

$$E = mR^2\dot{\lambda}^2(1-\cos\lambda) - mgR(1-\cos\lambda) = 8mR^2\dot{u}^2 - 2mgR(1-u^2), \tag{8}$$

und das beweist (6).

(d) (2 Punkte): Finden Sie die Bewegungsgleichung durch Ableiten der Gesamtenergie und Anwendung des Energieerhaltungssatzes $\dot{E} = 0$.

Lösen Sie die Bewegungsgleichung unter der Anfangsbedingung $\lambda(0) = \lambda_A$ und $\dot{\lambda}(0) = 0$.

Lösung: Da $E = \text{const}$ folgt durch Zeitableiten

$$16mR^2\dot{u}\ddot{u} + 4mgRu\dot{u} = 0 \Rightarrow \ddot{u} = -\frac{g}{4R}u. \tag{9}$$

Das ist die Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}$. Die Anfangsbedingung übersetzt sich in $u(0) = \sin(\lambda_A/2) = u_0$ und $\dot{u}(0) = \dot{\lambda}(0)\sin[\lambda(0)/2]/2 = 0$. Die eindeutige Lösung ist somit

$$u(t) = u_0\cos(\omega t). \tag{10}$$

(e) **Zusatzaufgabe:** (3 Extrapunkte) Vergleichen Sie die Laufzeiten für verschiedene Anfangswerte $\lambda_A \in [0,\pi)$ bis zum Punkt B (bei $\lambda = \pi$).

Lösung: Für $\lambda = \pi$ ist $u = \cos(\pi/2) = 0$, d.h. der Massenpunkt kommt, unabhängig vom Anfangspunkt λ_A nach stets der gleichen Zeit τ bei B an. Es ist $\cos(\omega\tau) = 0$. Die kleinste positive Nullstelle des Cosinus ist aber $\omega\tau = \pi/2$ und also $\tau = \pi/(2\omega) = 2\pi/(4\omega) = T/4$, wobei $T = 2\pi/\omega$ die Schwingungsdauer der harmonischen Bewegung des Teilchens.

Es ist klar, dass das Teilchen ständig zwischen den Punkten A und A' hin- und herschwingt. Dabei ist die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude der Schwingung. Man nennt die Brachistochrone daher auch die **Tautochrone**.

Historisch interessant ist, dass Christiaan Huygens (1629-1695) bereits wusste, dass die Zykloide diejenige Kurve ist, entlang derer ein Massenpunkt unter dem Einfluss der homogenen Schwerkraft unabhängig von der Amplitude immer die gleiche Schwingungsdauer besitzt (im Gegensatz zum gewöhnlichen Pendel, wo dies nur näherungsweise für kleine Schwingungen gilt). Huygens machte sich dies zunutze, mittels der Konstruktion eines solchen **Zykloidenpendels** eine sehr genau gehende Pendeluhr zu bauen.

`https://de.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Zykloide`
