

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 5

Aufgabe 1 (10 Punkte): Getriebener ungedämpfter Oszillator

Betrachten Sie einen ungedämpften harmonischen Oszillator, der mit einer harmonischen Kraft der Kreisfrequenz Ω angetrieben wird. Die Bewegungsgleichung lautet also

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + mA \cos(\Omega t). \quad (1)$$

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass mit dem Ansatz $x = \operatorname{Re} z$ für eine komplexe Funktion $z(t)$ die Bewegungsgleichung äquivalent zur Gleichung

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = A \exp(-i\Omega t) \quad (2)$$

ist.

Lösung: Da ω_0 , A und Ω reell sind, ergibt sich aus (2) und $\operatorname{Re} \exp(-i\Omega t) = \cos(\Omega t)$ sofort, dass jede Funktion z , die (2) erfüllt, $x = \operatorname{Re} z$ (1) löst.

- (b) (2 Punkte) Geben Sie zunächst die allgemeine Lösung für die homogene Gleichung

$$\ddot{z}_{\text{hom}} + \omega_0^2 z_{\text{hom}} = 0 \quad (3)$$

an.

Lösung: Die allgemeine Lösung der DGL (3) ist durch die allgemeine Superposition zweier beliebiger linear unabhängiger Lösungen gegeben:

$$z_{\text{hom}}(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t). \quad (4)$$

Da $\cos(\omega_0 t)$ und $\sin(\omega_0 t)$ beide (3) lösen und offenbar linear unabhängig voneinander sind, ist dies die allgemeine Lösung der homogenen DGL (3).

- (c) (2 Punkte) Finden Sie nun eine spezielle Lösung für die inhomogene Gleichung für $\Omega \neq \omega_0$. Geben Sie insbesondere auch die reelle physikalische Lösung $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ an.

Lösung: Wie bei der in der Vorlesung behandelten Fall eines gedämpften Oszillators erscheint hier der Ansatz

$$z = AB \exp(-i\Omega t) \Rightarrow \dot{z} = -ABi\Omega \exp(-i\Omega t), \quad \ddot{z} = -AB\Omega^2 \exp(-i\Omega t) \quad (5)$$

aussichtsreich. Setzen wir dies nämlich in (2) ein und kürzen mit dem allen Termen gemeinsamen Faktor $A \exp(-i\Omega t)$ ergibt sich

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (6)$$

Hierbei muss natürlich $\Omega \neq \omega_0$ sein. Für diesen Fall ist also eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$z_{\text{inh}}(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} \exp(-i\Omega t), \quad (7)$$

und es ist

$$x_{\text{inh}}(t) = \text{Re } z_{\text{inh}}(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad (8)$$

eine spezielle Lösung der Bewegungsgleichung (1). Deren allgemeine Lösung ergibt sich dann durch Superposition mit der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (4), also

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad (9)$$

mit Integrationskonstanten C_1 und C_2 .

(d) (3 Punkte) Was passiert im Resonanzfall $\Omega = \omega_0$?

Hinweis: In diesem Fall empfiehlt sich ein Ansatz der Form

$$z(t) = \tilde{z}(t) \exp(-i\omega_0 t). \quad (10)$$

Es ergibt sich durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung (2) eine einfach zu lösende Gleichung für \tilde{z} . Beachten Sie, dass Sie nur eine spezielle Lösung finden müssen, da die allgemeine Lösung die Superposition aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung z_{hom} und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Lösung: Hier führt offenbar der Ansatz (5) nicht zum Ziel. Für (10) folgt

$$\dot{z} = (\dot{\tilde{z}} - i\omega_0 \tilde{z}) \exp(-i\omega_0 t), \quad \ddot{z} = (\ddot{\tilde{z}} - 2i\omega_0 \dot{\tilde{z}} - \omega_0^2 \tilde{z}) \exp(-i\omega_0 t). \quad (11)$$

Setzt man dies in (2) mit $\Omega = \omega_0$ ein, folgt nach Kürzen des gemeinsamen Faktors $\exp(-i\omega_0 t)$

$$\ddot{\tilde{z}} - 2i\omega_0 \dot{\tilde{z}} = A. \quad (12)$$

Wir benötigen nur eine spezielle Lösung, und offensichtlich ist der Ansatz

$$\tilde{z}(t) = ABt \Rightarrow \dot{\tilde{z}} = AB \Rightarrow \ddot{\tilde{z}} = 0 \quad (13)$$

erfolgreich, denn Einsetzen in (12) liefert

$$-2i\omega_0 AB = A \Rightarrow B = \frac{i}{2A} \quad (14)$$

und damit als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$z_{\text{inh}}(t) = \frac{iA}{2\omega_0} t \exp(-i\omega_0 t) \quad (15)$$

und für die physikalische reelle Lösung von (1) also

$$x_{\text{inh}}(t) = \text{Re } z_{\text{inh}}(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t). \quad (16)$$

Die allgemeine Lösung von (1) ist also in diesem Fall

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + \left(C_2 + \frac{A}{2\omega_0} t \right) \sin(\omega_0 t). \quad (17)$$

Für große t ergibt sich also eine Lösung $\propto t \sin(\omega_0 t)$, also eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_0 mit einer linear mit t wachsenden Amplitude. Die Amplitude wird also mit der Zeit beliebig groß. Dies bezeichnet man als „Resonanzkatastrophe“.

(e) (2 Punkte) Geben Sie schließlich für alle Ω jeweils die Lösungen des Anfangswertproblems für vorgegebene Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ an.

Lösung: Für $\Omega \neq \omega_0$ setzen wir in (9) die Anfangsbedingungen ein. Die erste Ableitung ist

$$\dot{x} = -C_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + C_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{A \omega_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin(\omega_0 t) \quad (18)$$

und damit

$$x(0) = C_1 + \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} = x_0, \quad \dot{x}(0) = C_2 \omega_0 = v_0. \quad (19)$$

Das lineare Gleichungssystem ergibt schließlich für die Integrationskonstanten

$$C_1 = x_0 - \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}. \quad (20)$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also in diesem Fall

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t). \quad (21)$$

Für $\Omega = \omega_0$ haben wir als allgemeine Lösung (17). Die erste Ableitung lautet

$$\dot{x} = \left(C_2 + \frac{At}{2} \right) \omega_0 \cos(\omega_0 t) + \left(\frac{A}{2\omega_0} - C_1 \omega_0 \right) \sin(\omega_0 t). \quad (22)$$

Für die Anfangsbedingungen ergibt sich also

$$x(0) = C_1 = x_0, \quad \dot{x}(0) = C_2 \omega_0 = v_0. \quad (23)$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \left(\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{At}{2\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t). \quad (24)$$