

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 9

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Berechnen einer Determinante

Betrachten Sie die Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Berechnen Sie die Determinante

- (a) [4 Punkte] mit dem Determinantenentwicklungssatz durch Entwicklung nach der ersten Zeile,
- (b) [3 Punkte] als Spatprodukt der Spaltenvektoren,
- (c) [3 Punkte] indem Sie die Matrix zunächst durch Gaußelimination auf obere Dreiecksgestalt bringen.

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Transformationsverhalten des Vektorprodukts

Hinweis: In dieser Aufgabe verwenden wir die Einsteinsche Summationskonvention, d.h. über in einer Gleichung doppelt auftretende Indizes wird stets von 1 bis 3 summiert!

Wir wollen zeigen, dass sich die kartesischen Komponenten des Vektors

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (2)$$

unter einem orthogonalen Basiswechsel mit der Drehmatrix \hat{O}

$$\vec{e}_j = O_{kj} \vec{e}'_k, \quad (3)$$

wie kartesische Vektorkomponenten transformieren. Sie dürfen dazu verwenden, dass die Drehmatrix orthogonal, d.h. dass

$$\hat{O}^T \hat{O} = \hat{O} \hat{O}^T = \mathbb{1}_3 \quad (4)$$

gilt und orientierungserhaltend ist, d.h. es ist

$$\det \hat{O} = +1. \quad (5)$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (a) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass aus (3) für die Komponenten der Vektoren \vec{a} und \vec{b} bzgl. der beiden Basen die Beziehung

$$a'_k = O_{kj} a_j, \quad b'_k = O_{kj} b_j \quad (6)$$

folgt.

- (b) [6 Punkte] Verwenden Sie diese Transformationsformeln nun in der Formel für die Komponenten des Vektorprodukts

$$c'_j = \epsilon_{jkl} a'_k b'_l, \quad (7)$$

um daraus herzuleiten, dass

$$c'_j = O_{jk} c_k \quad (8)$$

gilt, wobei

$$c_k = \epsilon_{klm} a_l b_m \quad (9)$$

ist, d.h. in Matrix-Vektor-Schreibweise gilt

$$\underline{a}' \times \underline{b}' = (\hat{O}\underline{a}) \times (\hat{O}\underline{b}) = \hat{O}(\underline{a} \times \underline{b}). \quad (10)$$

- (c) (Knobelaufgabe) [2 **Extrapunkte**] Wie verhält sich das Kreuzprodukt zweier Vektoren unter Raumspiegelungen. Die Raumspiegelung entspricht dabei der Transformation $\vec{a} \rightarrow -\vec{a}$.