Separierbare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Hendrik van Hees

26. Mai 2020

Hier soll noch einmal die Lösung separierbarer Differentialgleichungen 1. Ordnung in einer mathematisch etwas saloppen Weise vereinfacht dargestellt werden. Dazu betrachten wir eine Differentialgleichung der Form

$$p(t) + \dot{x} q(x) = 0. \tag{1}$$

Dies ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung, d.h. die höchste vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion $x(t)$ ist die 1. Ableitung, Differentialgleichungen dieser Art heißen **separierbare Differentialgleichungen**. Damit die Lösung eindeutig ist, muss man noch eine **Anfangsbedingung** $x(t_0) = x_0$ vorgeben.

Wir können nun die Lösung für solche separierbaren Differentialgleichungen finden, indem wir einfach $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ wie einen gewöhnlichen Bruch behandeln (was mathematisch freilich nicht ganz sauber ist, da es sich ja um einen Differentialquotienten handelt, also den entsprechenden Limes eines Differenzenquotienten) und die Differentialgleichung formal mit $\mathrm{d}t$ multiplizieren. Dann nimmt sie die Form

$$\mathrm{d}t p(t) + \mathrm{d}x q(x) = 0 \tag{2}$$

an. Nun können wir alles, was mit t zu tun hat auf die eine Seite und alles, was mit x zu tun hat auf die andere Seite der Gleichung bringen, d.h.

$$\mathrm{d}t p(t) = -\mathrm{d}x q(x). \tag{3}$$

Jetzt können wir einfach formal eine Gleichung für Integrale herstellen, indem wir die linke Seite von t_0 bis t und die rechte Seite von x_0 bis x integrieren, wobei wir aber die Integrationsvariablen jeweils mit t' bzw. x' umbenennen müssen, damit keine Verwechslungen mit den besagten Grenzen der Integrale entstehen. Damit erhält man

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' p(t') = -\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' q(x'). \tag{4}$$

Bezeichnen wir dann wie im Skript die entsprechenden Stammfunktion von p und q mit P und Q, erhalten wir

$$P(t) = -Q(x). \tag{5}$$

Lösen wir dies nach x auf, erhalten wir eine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung, denn setzen wir diese Lösung in die Gl. (5) ein, erhalten wir

$$P(t) = -Q[x(t)]. \tag{6}$$

Bilden wir daraus die Zeitableitung, folgt (auf der rechten Seite mit der Kettenregel)

$$\dot{P}(t) = -\dot{x}Q'(x) \;\Rightarrow\; p(t) = -\dot{x}q(x), \tag{7}$$

denn die Ableitungen der Stammfunktionen liefern ja die Funktionen zurück.

Weiter gilt wegen der Wahl der Integrationsgrenzen $P(t_0) = -Q(x_0) = 0$, d.h. durch diese Wahl der Integrationsgrenzen ist auch die Anfangsbedingung bereits eingearbeitet und somit ebenfalls erfüllt, d.h. kann man die Gl. (5) nach x auflösen, hat man die Lösung für die Differentialgleichung (1) gefunden.