Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 10

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Vektorprodukt

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}=(1,2,0)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$, $\vec{c}=(-1,-1,3)$.

(a) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Vektoren $\vec{a}\times\vec{b}$ und $\vec{b}\times\vec{a}$.

(b) **[2 Punkte]** Berechnen Sie mittels der Definition des Vektorproduktes den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Berechnen Sie zur Probe ebenfalls den Winkel mittels des Skalarproduktes.

(c) **[2 Punkte]** Berechnen Sie den Vektor $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

(d) **[2 Punkte]** Zeigen Sie durch Berechnung der beiden Seiten, daß die Beziehung

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}),$$

die sog. “bac-cab-Regel”, erfüllt ist.

(e) **[2 Punkte]** Beweisen Sie die Beziehung in (d) für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Kronecker-Symbol

Die Indizes i,j und k können jeweils die Werte 1,2 oder 3 annehmen. Das Kronecker-Symbol ist definiert als

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{falls} \quad i=j,\\ 0 & \text{falls} \quad i\neq j.\end{cases}$$

Vereinfachen Sie, soweit wie möglich, folgende Ausdrücke:

(a) $\sum_{i,j=1}^{3}(a_i b_j \delta_{ij})$, (b) $\sum_{i,j=1}^{3}(a_i b_j \delta_{i1}\delta_{ij})$, (c) $\sum_{i,j,k=1}^{3}(a_i b_j c_k \delta_{i2}\delta_{jk})$

Aufgabe 3 [10 Punkte]: Levi-Civita-Symbol 1

Im folgenden können alle Indizes jeweils die Werte 1, 2 oder 3 annehmen. Das Levi-Civita-Symbol ist definiert als

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{falls} \quad (i,j,k) \quad \text{gerade Permutation von} \quad (1,2,3),\\ -1 & \text{falls} \quad (i,j,k) \quad \text{ungerade Permutation von} \quad (1,2,3),\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dazu äquivalent ist die Definition, daß $\epsilon_{123}=1$ ist und ansonsten ϵ_{ijk} total antisymmetrisch unter Indexvertauschungen ist. Zeigen Sie (durch Nachdenken oder explizit), daß die folgenden Formeln gelten **[(a) 8 Punkte, (b) 2 Punkte]**:

(a) $\sum_{k=1}^{3}(\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm})=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$, (b) $\sum_{j,k=1}^{3}(\epsilon_{ijk}\epsilon_{mjk})=2\delta_{im}$.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://th.physik.uni-frankfurt.de/~hees/mameth-l3-SS20/index.html`