

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 7

Aufgabe 1 (10 Punkte): Resonanzkatastrophe

Betrachten Sie den ungedämpften harmonischen Oszillator mit einer harmonischen äußeren Kraft, deren Kreisfrequenz der Eigenfrequenz des Oszillators entspricht, also die lineare inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega_0 t) \quad (1)$$

bzw. die entsprechende „komplexifizierte Gleichung“

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = A \exp(-i\omega_0 t), \quad x(t) = \operatorname{Re} z(t). \quad (2)$$

Sie dürfen ohne weitere Rechnung die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$z_{\text{hom}}(t) = C_1 \exp(i\omega_0 t) + C_2 \exp(-i\omega_0 t) \quad (3)$$

als bekannt voraussetzen.

Wir suchen also nur noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass der Standardansatz

$$z_{\text{inh}}(t) = C \exp(-i\omega_0 t) \quad (4)$$

nicht zum Ziel führt.

Diskutieren Sie, warum man dies aus physikalischen Gründen erwarten kann.

- (b) [5 Punkte] Verwenden Sie nun den Ansatz

$$z_{\text{inh}}(t) = C(t) \exp(-i\omega_0 t), \quad (5)$$

um doch noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden.

- (c) [3 Punkte] Lösen Sie nun unter Verwendung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (3) und der soeben gefundenen speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung das Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ und skizzieren Sie diese Lösung.

Argumentieren Sie nun nochmals physikalisch, warum man mit dem Standardansatz (4) scheitert.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Lösung mit Potenzreihenansatz (Frobenius-Methode)

Wir betrachten die homogene Lineare DGL 2. Ordnung mit *zeitabhängigen Koeffizienten*

$$t^2 \ddot{x} + 2t \dot{x} = 0. \quad (6)$$

Setzen Sie nun einen allgemeinen Potenzreihenansatz der Form

$$x(t) = t^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^j = \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^{j+\lambda} \quad (7)$$

an.

- (a) [5 Punkte] Setzen Sie den Ansatz in die DGL ein und bestimmen Sie mögliche Werte für λ und damit dann Formeln für die Koeffizienten C_j .
- (b) [5 Punkte] Bestimmen Sie nun zwei linear unabhängige Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$, indem Sie geeignete λ und C_j bestimmen. Dabei darf man stets annehmen, dass $C_0 \neq 0$ ist (*warum?*).