Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 7

Aufgabe 1: Resonanzkatastrophe

Betrachten Sie den ungedämpften harmonischen Oszillator mit einer harmonischen äußeren Kraft, deren Kreisfrequenz der Eigenfrequenz des Oszillators entspricht, also die lineare inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega_0 t) \tag{1}$$

bzw. die entsprechende „komplexifizierte Gleichung"

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = A\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t), \quad x(t) = \operatorname{Re} z(t). \tag{2}$$

Sie dürfen ohne weitere Rechnung die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$z_{\text{hom}}(t) = C_1 \exp(\mathrm{i}\omega_0 t) + C_2 \exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) \tag{3}$$

als bekannt voraussetzen.

Wir suchen also nur noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

(a) Zeigen Sie, dass der Standardansatz „vom Typ der rechten Seite"

$$z_{\text{inh}}(t) = C\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) \tag{4}$$

nicht zum Ziel führt.

Diskutieren Sie, warum man dies aus physikalischen Gründen erwarten kann.

(b) Verwenden Sie nun den Ansatz vom Typ „Variation der Konstanten"

$$z_{\text{inh}}(t) = C(t)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t), \tag{5}$$

um doch noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden.

(c) Lösen Sie nun unter Verwendung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (3) und der soeben gefundenen speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung das Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ und skizzieren Sie diese Lösung.

Argumentieren Sie nun nochmals physikalisch, warum man mit dem Standardansatz (4) scheitert.

Aufgabe 2: Lösung mit Potenzreihenansatz (Frobenius-Methode)

Wir betrachten die homogene Lineare DGL 2. Ordnung mit *zeitabhängigen Koeffizienten*

$$t^2\ddot{x} + 2t\dot{x} = 0. \tag{6}$$

Setzen Sie nun einen allgemeinen Potenzreihenansatz der Form

$$x(t) = t^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^j = \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^{j+\lambda} \tag{7}$$

an.

(a) Setzen Sie den Ansatz in die DGL ein und bestimmen Sie mögliche Werte für λ und damit dann Formeln für die Koeffizienten C_j.

(b) Bestimmen Sie nun zwei linear unabhängige Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$, indem Sie geeignete λ und C_j bestimmen. Dabei darf man stets annehmen, dass $C_0 \neq 0$ ist (*warum?*).