Übungen zur Nichtgleichgewichtsthermodynamik – Blatt 4 – Lösungen

Aufgabe: Bremsstrahlung in Materie[1]

Wir betrachten geladene Brownsche Teilchen in einem Medium, das sich im thermischen Gleichgewicht befindet. Die Photonenproduktionsrate aufgrund der stochastischen Bewegung der geladenen Teilchen ist durch die Korrelationsfunktion

$$\Pi^{\mu\nu}(t,\vec{q}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x} \exp(-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}) \left\langle j_\mu(t,\vec{x}) j_\nu(0,0) \right\rangle_T \tag{1}$$

gegeben (s.u.). Dabei ist $j^\mu(t,\vec{x}) = [\rho(t,\vec{x}), \vec{j}(t,\vec{x})]$ die Viererstromdichte der elektrischen Ladung, wobei wir natürliche Einheiten $c = 1$ und $k_{\mathrm{B}} = 1$ verwenden. Der Erwartungswert bezeichnet das Gibbs-Ensemblemittel über ein thermisches System der Temperatur T. Die Phasenraumverteilung der Teilchen soll durch die Fokker-Planck-Gleichung

$$\partial_t f(t,\vec{x},\vec{v}) = \left(-\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_x + \gamma\vec{\nabla}_v\cdot\vec{v} + D\Delta_v\right) f(t,\vec{x},\vec{p}) \tag{2}$$

beschrieben werden.

Zur Berechnung der Korrelationsfunktion benötigen wir

$$f_2(t,\vec{x},\vec{v};\vec{x}_0,\vec{v}_0) = G(t,\vec{x};\vec{x}_0,\vec{v}_0) f_0(\vec{x}_0,\vec{v}_0), \tag{3}$$

wobei wir die Markov-Eigenschaft des der Fokker-Planck-Gleichung zugrundeliegenden Markov-Prozesses verwendet haben. Dabei bezeichnet G die Greensche Funktion der Fokker-Planck-Gleichung, d.h. sie erfüllt (2) mit der Anfangsbedingung

$$G(t=0,\vec{x},\vec{v};\vec{x}_0,\vec{v}_0) = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_0)\delta^{(3)}(\vec{v}-\vec{v}_0), \tag{4}$$

und

$$f_0(\vec{x}_0,\vec{v}_0) = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\vec{v}_0^2}{2T}\right) \tag{5}$$

die Maxwell-Boltzmann-Gleichgewichtsverteilung mit der räumlich konstanten Teilchendichte n.

(a) Zeigen Sie, daß für die Fourier-Transformierte $\tilde{G}$ der Greenschen Funktion

$$G(t,\vec{x},\vec{v};\vec{x}_0,\vec{v}_0) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{y}}{(2\pi)^3} \exp(\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x} - \mathrm{i}\vec{y}\cdot\vec{v}) \tilde{G}(t,\vec{q},\vec{y};\vec{x}_0,\vec{y}_0) \tag{6}$$

die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\partial_t\tilde{G} + (\vec{q}+\gamma\vec{y})\cdot\vec{\nabla}_y\tilde{G} = -D\vec{y}^2\tilde{G} \tag{7}$$

mit der Anfangsbedingung $\tilde{G}(t=0,\vec{q},\vec{y};\vec{x}_0,\vec{v}_0) = \tilde{G}_0 = \exp(-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}_0 + \mathrm{i}\vec{y}\cdot\vec{v}_0)$ gilt.

[1] Vgl. J. Knoll and D. Voskresensky, Classical and Quantum Many-Body Description of Bremsstrahlung in Dense Matter (Landau-Pomeranchuk-Migdal Effect). Ann. Phys. **249**, 532 (1996), `arXiv:hep-ph/9510417`.

Lösung: Wir setzen den Fourier-Ansatz (6) auf der rechten Seite der Fokker-Planck-Gleichung (3) ein. Dann folgt

$$\begin{aligned}\partial_t G(t,\vec{x},\vec{v};\vec{x}_0,\vec{v}_0) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{y}}{(2\pi)^3} \tilde{G}(t,\vec{q},\vec{y};\vec{x}_0,\vec{y}_0) \\ \times \left[\vec{\nabla}_y \cdot \vec{q} + \gamma \vec{\nabla}_y \cdot \vec{y} - D\vec{y}^2\right] \exp(\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x} - \mathrm{i}\vec{y}\cdot\vec{v}).\end{aligned} \tag{8}$$

Durch partielle Integration folgt schließlich

$$\begin{aligned}\partial_t G(t,\vec{x},\vec{v};\vec{x}_0,\vec{v}_0) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{y}}{(2\pi)^3} \exp(\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x} - \mathrm{i}\vec{y}\cdot\vec{v}) \\ \times \left[-\vec{q}\cdot\vec{\nabla}_y - \gamma\vec{y}\cdot\vec{\nabla}_y - D\vec{y}^2\right] \tilde{G}(t,\vec{q},\vec{y};\vec{x}_0,\vec{y}_0).\end{aligned} \tag{9}$$

Schreibt man auch die linke Seite als Fourier-Integral, folgt sofort (7).

(b) Lösen Sie die Gleichung (7).

Anleitung: Verwenden Sie die Methode der Charakteristiken. Dazu führt man die neuen Variablen τ und η für $t(\tau,\eta)$ und $\vec{y}(\tau,\eta)$ ein. Einsetzen in (7) liefert dann die

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \tilde{G}[t(\tau,\vec{\eta}),\vec{q},\vec{y}(\tau,\eta);\vec{x}_0,\vec{v}_0] = \dot{t}\partial_t \tilde{G} + \dot{\vec{y}}\cdot\vec{\nabla}_y \tilde{G} \stackrel{!}{=} -D\vec{y}^2\tilde{G}, \tag{10}$$

wobei der Punkt die Ableitung nach τ bedeutet. Koefizientenvergleich mit (7) liefert dann das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{t}(\tau,\vec{\eta}) = 1, \quad \dot{y}(\tau,\vec{\eta}) = \vec{q} + \gamma\vec{y}, \dot{\tilde{G}} = -D\vec{y}^2\tilde{G} \tag{11}$$

die man mit den Anfangsbedingungen $t(\tau=0,\vec{\eta}) = 0$ und $\vec{y}(\tau=0,\vec{\eta}) = \vec{\eta}$, $\tilde{G}|_{\tau=0} = \tilde{G}_0(\vec{q},\vec{\eta};\vec{x}_0,\vec{v}_0)$ löst. Aus dieser Lösung bildet man dann die Umkehrfunktionen $\tau = \tau(t,\vec{y})$, $\vec{\eta} = \vec{\eta}(t,\vec{y})$ und erhält damit die Lösung von (7).

Lösung: Die Kettenregel liefert

$$\dot{\tilde{G}} = \dot{t}\partial_t\tilde{G} + \dot{\vec{y}}\cdot\vec{\nabla}_y\tilde{G} \stackrel{!}{=} -D\vec{y}^2\tilde{G}. \tag{12}$$

Der Koeffzientenvergleich mit (7) verlangt dann

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{\vec{y}} = \vec{q} + \gamma\vec{y}, \quad \dot{\tilde{G}} = -D\vec{y}^2\tilde{G}. \tag{13}$$

Dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen, die Charakteristiken-Gleichungen der linearen partiellen DGL (7), lösen wir mit den Anfangsbedingungen

$$t(0,\vec{\eta}) = 0, \quad \vec{y}(0,\vec{\eta}) = \vec{\eta}, \quad \tilde{G}|_{\tau=0} = \tilde{G}_0|_{\vec{y}=\vec{\eta}}. \tag{14}$$

Zunächst lösen wir die Gleichungen für t und $\vec{y}$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$t = \tau, \quad \vec{y}(\tau,\vec{\eta}) = \left(\vec{\eta} + \frac{\vec{q}}{\gamma}\right)\exp(\gamma\tau) - \frac{\vec{q}}{\gamma}. \tag{15}$$

Dann folgt weiter aus der Gleichung für $\tilde{G}$

$$\tilde{G} = \tilde{G}_0|_{\vec{y}=\vec{\eta}} \exp\left[-D\int_0^\tau \mathrm{d}\tau' \vec{y}^2(\tau',\vec{\eta})\right] = \exp[-A + \mathrm{i}\vec{B}\cdot\vec{y} - C\vec{y}^2]. \tag{16}$$

Dabei sind A, $\vec{B}$ und C zunächst Funktionen von τ, $\vec{\eta}$ und $\vec{q}$. Die Anfangsbedingung für $\tilde{G}$ ergibt sich aus der Anfangsbedingung (4) durch Fourier-Transformation zu

$$\tilde{G}_0(\vec{q},\vec{y};\vec{x}_0,\vec{v}_0) = \exp(-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}_0 + \mathrm{i}\vec{y}\cdot\vec{v}_0). \tag{17}$$

Nun wollen wir die Lösung in Abhängigkeit von den ursprünglichen Variablen t und $\vec{y}$ anstelle von τ und $\vec{\eta}$. Dazu lösen wir (15) nach τ und t auf. Wegen $t = \tau$ folgt sofort

$$\vec{\eta}(t,\vec{y}) = \left(\vec{y} + \frac{\vec{q}}{\gamma}\right)\exp(-\gamma t) - \frac{\vec{q}}{\gamma}. \tag{18}$$

Ausführen des Integrals in (16) und Einsetzen von (18) für $\vec{\eta}$ liefert nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned}
A &= \frac{D}{2\gamma^3}\vec{q}^2[2\gamma t - 3 - \exp(-2\gamma t) + 4\exp(-\gamma t)] + \frac{\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{v}_0}{\gamma}[1-\exp(-\gamma t)] - \mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}_0,\\
\vec{B} &= \vec{v}_0\exp(-\gamma t) - \frac{\mathrm{i}D}{\gamma^2}\vec{q}\,[1-\exp(-\gamma t)]^2,\\
C &= \frac{D}{2\gamma}[1-\exp(-2\gamma t)].
\end{aligned} \tag{19}$$

(c) Berechnen Sie schließlich die Korrelationsfunktion (1), wobei $\rho[\vec{x}'](t,\vec{x}) = e\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'(t))$, $\vec{j}(t,\vec{x}) = e\vec{v}(t)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'(t))$ gilt. Dabei ist $\vec{x}'(t)$ die stochastische Trajektorie des Brownschen Teilchens im Medium.

Hinweis: Da die Gleichgewichtsverteilung $f_0(\vec{x}_0,\vec{v}_0)$ nicht von $\vec{x}_0$ abhängt, läuft dies letztlich auf die Berechnung der Integrale

$$\begin{aligned}
\Pi^{00}(t,\vec{q}) &= e^2\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{v}_0\,\tilde{G}(t,\vec{q},\vec{y}=0;\vec{x}_0=0,\vec{v}_0)f_0(\vec{v}_0),\\
\Pi^{0j}(t,\vec{q}) = \Pi^{j0}(t,\vec{q}) &= e^2\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{v}_0\,v_0^j\,\tilde{G}(t,\vec{q},\vec{y}=0;\vec{x}_0=0,\vec{v}_0)f_0(\vec{v}_0),\\
\Pi^{jk}(t,\vec{q}) &= e^2\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{v}_0\,v_0^k(-\mathrm{i})\left[\frac{\partial}{\partial y_j}\tilde{G}(t,\vec{q},\vec{y};\vec{x}_0=0,\vec{v}_0)\right]_{\vec{y}=0}f_0(\vec{v}_0)
\end{aligned} \tag{20}$$

hinaus.

Lösung: Einsetzen von (16) in (20) liefert nach Auswerten der entsprechenden Gauß-Integrale

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(t,\vec{q}) = {} & e^2 n\exp\left[-\frac{D\vec{q}^2[\gamma t - 1 + \exp(-\gamma t)]}{\gamma^3}\right]\times\\
&\times\begin{cases}
1 & \text{für } \mu=\nu=0,\\
-\mathrm{i}\frac{D}{\gamma^2}q_\nu[1-\exp(-\gamma t)] & \text{für } \mu=0,\ \nu\in\{1,2,3\},\\
\frac{D}{\gamma}\delta_{\mu\nu}\exp(-\gamma t) - \frac{D^2}{\gamma^4}q_\mu q_\nu[\exp(-\gamma t)-1]^2 & \text{für } \mu,\nu\in\{1,2,3\}.
\end{cases}
\end{aligned} \tag{21}$$

(d) Beweisen Sie (20).

Lösung: Es gilt

$$
\begin{aligned}
\Pi^{00}(t,\vec{q}) &= e^2 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \langle \rho(t,\vec{x})\rho(0,0)\rangle \exp(-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}) \\
\langle \rho(t,\vec{x})\rho(0,0)\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}_1 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{v}_1 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{v}_0 f_2(t,\vec{x}_1,\vec{v}_1;\vec{x}_0,\vec{v}_0) e^2 \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_1)\delta^{(3)}(\vec{x}_0) \\
&= e^2 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{v}_1 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{v}_0 f_2(t,\vec{x},\vec{v}_1;\vec{x}_0=0,\vec{v}_0).
\end{aligned} \tag{22}
$$

Setzt man nun (3) ein und führt die Fourier-Transformation bzgl. $\vec{x}$ aus, erhält man mit der Fourier-Darstellung (6)

$$
\Pi^{00}(t,\vec{q}) = q^2 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{v}_0 \tilde{G}(t,\vec{q},\vec{y}=0;\vec{x}_0=0,\vec{v}_0) f_0(\vec{v}_0). \tag{23}
$$

Die Herleitung der anderen Komponenten des Korrelationstensors erfolgen analog. Man muß nur beachten, daß $\vec{v}_1$ für die Fourier-Transformierte durch $-\mathrm{i}\vec{\nabla}_y$ repräsentiert wird.

Bemerkung: Der Bezug zur Bremsstrahlung von geladenen Teilchen in Materie ergibt sich daraus, daß für den Fall, daß das Medium für die Bremsstrahlungsphotonen dünn ist, d.h. die Wechselwirkung der Photonen mit dem Medium vernachlässigt werden kann, die Photonenproduktionsrate durch

$$
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}^3\vec{q}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\vec{x}} = \sum_{j,k=1}^{3} \sum_{\lambda=1}^{2} \frac{\epsilon^j(\vec{q},\lambda)\epsilon^k(\vec{q},\lambda)}{(2\pi)^3 2\omega} \tilde{\Pi}^{jk}(\omega=|\vec{q}|,\vec{q}) \tag{24}
$$

gegeben ist. Dabei sind $\vec{\epsilon}(\vec{q},\lambda)$ zwei beliebige zueinander und zu $\vec{q}$ orthogonale Einheitsvektoren (transversale Polarisationsvektoren des elektromagnetischen Feldes) und

$$
\tilde{\Pi}^{jk}(\omega,\vec{q}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t\, \Pi^{jk}(|t|,\vec{q}) \exp(+\mathrm{i}\omega t) \tag{25}
$$

die Fourier-Transformierte der räumlichen Komponenten der Korrelationsfunktion (20). Dabei steht in (25) $|t|$ als Argument in der Korrelationsfunktion, weil für $t<0$ die Anfangsbedingung $t_0 = t$ ist und $0>t$ dem Argument t in der vorigen Rechnung entspricht. Wir können aber wegen der Translationsinvarianz des Gleichgewichtszustandes in Raum und Zeit den Fall $t<0$ auf den Fall $t>0$ zurückführen, denn es gilt

$$
\langle j^\mu(t,\vec{x}) j^\nu(0,0)\rangle = \langle j^\mu(0,0) j^\nu(-t,-\vec{x})\rangle. \tag{26}
$$

Für die Fourier-Transformierte entspricht $\vec{x}\to-\vec{x}$ im Ortsraum $\vec{q}\to\vec{q}$ im Impulsraum, d.h. wir haben insgesamt

$$
\Pi^{\mu\nu}(t,\vec{q}) = \Pi^{\mu\nu}(|t|,\vec{q}\,\mathrm{sign}\,t). \tag{27}
$$

Wir bemerken weiter, daß offenbar $\Pi^{\mu\nu}$ transversal in dem Sinne ist, daß

$$
\partial_t \Pi^{0\mu} + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{3} q^j \Pi^{j\mu} = 0, \Leftrightarrow q_\mu \tilde{\Pi}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu\in\{0,1,2,3\} \tag{28}
$$

ist. Dies ist eine unmittelbare Folge der Stromerhaltung $\partial_\mu j^\mu = 0$. Die Photonenrate (24), die wir in (24) für die sog. Strahlungseichung des freien electromagnetischen Feldes,

$$
A^0 = 0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0, \tag{29}
$$

hingeschrieben haben, eine eichinvariante Größe ist. Denn Umeichung des Feldes $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$ mit einem beliebigen Skalarfeld χ ändert die $\epsilon^\mu(\vec{q},\lambda)$ im Impulsraum lediglich um $q^\mu \chi$, was wegen (28) keine Auswirkungen auf die Rate (24) besitzt.
Wir berechnen noch die Fourier-Transformierte (25) für

$$\Pi_\perp(t,\vec{q}) = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon^j(\vec{q},\lambda)\epsilon^k(\vec{q},\lambda)\Pi^{jk}(t,\vec{q}) = \frac{e^2 nD}{\gamma} \exp(-\gamma|t|) \exp\left[-\frac{D\vec{q}^2}{\gamma^3}(\gamma|t| - 1 + \exp(-\gamma|t|))\right]. \tag{30}$$

Dabei haben wir (21) verwendet und, daß $\vec{\epsilon} \cdot \vec{q} = 0$ ist. Die Fourier-Transformation bzgl. t läßt sich natürlich nicht geschlossen ausführen. Wir können aber den störenden Teil mit Hilfe der Exponentialreihe entwickeln. Es gilt

$$\Pi_\perp(t,\vec{q}) = \frac{e^2 nD}{\gamma} \exp\left(\frac{D\vec{q}^2}{\gamma^3}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \exp\left[-|t|\gamma\left(k+1+\frac{D\vec{q}^2}{\gamma^3}\right)\right]\left(-\frac{D\vec{q}^2}{\gamma^3}\right)^k \tag{31}$$

Mit der durch elementares Ausrechnen gegebenen Fourier-Transformation

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \exp(-\Gamma|t| + \mathrm{i}\omega t) = \frac{2\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} \tag{32}$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_\perp(\omega,\vec{q}) &= \int_{\mathbb{R}} \Pi_\perp(t,\vec{q}) \exp(\mathrm{i}\omega t) \\ &= \frac{e^2 nD}{\gamma} \exp\left(\frac{D\vec{q}^2}{\gamma^3}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{D\vec{q}^2}{\gamma^3}\right)^k \frac{2\gamma(k+1+D\vec{q}^2/\gamma^3)}{\omega^2 + \gamma^2(k+1+D\vec{q}^2/\gamma^3)^2}. \end{aligned} \tag{33}$$

Das Bemerkenswerte daran ist, daß dies für die Photonenproduktionsrate (24) im Limes $\omega \to 0$ zu einem endlichen Resultat führt. Eine naive Aufsummation des Wirkungsquerschnitts für die Bremsstrahlung in niedrigster Ordnung der QED für Mehrfachstreuung im Medium würde zu einer Infrarotdivergenz führen (Bethe-Heitler-Querschnitt für Bremsstrahlung). Die hier durchgeführte Rechnung summiert hingegen die Strahlungsanteile, die von vielen Stößen der geladenen Teilchen im Medium herrühren kohärent. Da zwischen zwei Stößen eine endliche mittlere Zeit $\propto 1/\gamma$ vergeht, können sich keine Strahlungsanteile mit sehr kleinen Wellenlängen ausbilden, weil diese eine Formationszeit $\tau_{\text{form}} \simeq 1/\omega$ besitzen. Für $1/\omega \gg 1/\gamma$ wird demnach die kohärente Aufsummation der Strahlungsanteile relevant und führt durch destruktive Interferenz zu einem endlichen Resultat für die Photonenproduktionsrate. Dies ist auch als Landau-Pomeranchuk-Migdal-Effekt bekannt (vgl. das oben zitierte Paper von Knoll und Voskresensky).