Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Wintersemester 2015/2016**

Übungen zur Nichtgleichgewichtsthermodynamik – Blatt 4

Aufgabe: Bremsstrahlung in Materie[1]

Wir betrachten geladene Brownsche Teilchen in einem Medium, das sich im thermischen Gleichgewicht befindet. Die Photonenproduktionsrate aufgrund der stochastischen Bewegung der geladenen Teilchen ist durch die Korrelationsfunktion

$$\Pi^{\mu\nu}(t,\vec{q}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x} \exp(-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}) \left\langle j_\mu(t,\vec{x}) j_\nu(0,0) \right\rangle_T \tag{1}$$

gegeben (s.u.). Dabei ist $j^\mu(t,\vec{x}) = [\rho(t,\vec{x}), \vec{j}(t,\vec{x})]$ die Viererstromdichte der elektrischen Ladung, wobei wir natürliche Einheiten $c = 1$ und $k_{\mathrm{B}} = 1$ verwenden. Der Erwartungswert bezeichnet das Gibbs-Ensemblemittel über ein thermisches System der Temperatur T. Die Phasenraumverteilung der Teilchen soll durch die Fokker-Planck-Gleichung

$$\partial_t f(t,\vec{x},\vec{v}) = \left(-\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_x + \gamma\vec{\nabla}_v\cdot\vec{v} + D\Delta_v\right) f(t,\vec{x},\vec{p}) \tag{2}$$

beschrieben werden.

Zur Berechnung der Korrelationsfunktion benötigen wir

$$f_2(t,\vec{x},\vec{v};\vec{x}_0,\vec{v}_0) = G(t,\vec{x};\vec{x}_0,\vec{v}_0) f_0(\vec{x}_0,\vec{v}_0), \tag{3}$$

wobei wir die Markov-Eigenschaft des der Fokker-Planck-Gleichung zugrundeliegenden Markov-Prozesses verwendet haben. Dabei bezeichnet G die Greensche Funktion der Fokker-Planck-Gleichung, d.h. sie erfüllt (2) mit der Anfangsbedingung

$$G(t=0,\vec{x},\vec{v};\vec{x}_0,\vec{v}_0) = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_0)\delta^{(3)}(\vec{v}-\vec{v}_0), \tag{4}$$

und

$$f_0(\vec{x}_0,\vec{v}_0) = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\vec{v}_0^2}{2T}\right) \tag{5}$$

die Maxwell-Boltzmann-Gleichgewichtsverteilung mit der räumlich konstanten Teilchendichte n.

(a) Zeigen Sie, daß für die Fourier-Transformierte $\tilde{G}$ der Greenschen Funktion

$$G(t,\vec{x},\vec{v};\vec{x}_0,\vec{v}_0) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{y}}{(2\pi)^3} \exp(\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x} - \mathrm{i}\vec{y}\cdot\vec{v}) \tilde{G}(t,\vec{q},\vec{y};\vec{x}_0,\vec{y}_0) \tag{6}$$

die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\partial_t \tilde{G} + (\vec{q} + \gamma\vec{y})\cdot\vec{\nabla}_y \tilde{G} = -D\vec{y}^2\tilde{G} \tag{7}$$

mit der Anfangsbedingung $\tilde{G}(t=0,\vec{q},\vec{y};\vec{x}_0,\vec{v}_0) = \tilde{G}_0 = \exp(-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}_0 + \mathrm{i}\vec{y}\cdot\vec{v}_0)$ gilt.

[1] Vgl. J. Knoll and D. Voskresensky, Classical and Quantum Many-Body Description of Bremsstrahlung in Dense Matter (Landau-Pomeranchuk-Migdal Effect). Ann. Phys. **249**, 532 (1996), `arXiv:hep-ph/9510417`.

(b) Lösen Sie die Gleichung (7).

Anleitung: Verwenden Sie die Methode der Charakteristiken. Dazu führt man die neuen Variablen τ und η für $t(\tau,\eta)$ und $\vec{y}(\tau,\eta)$ ein. Einsetzen in (7) liefert dann die

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde{G}[t(\tau,\vec{\eta}),\vec{q},\vec{y}(\tau,\eta);\vec{x}_0,\vec{v}_0] = \dot{t}\partial_t\tilde{G} + \dot{\vec{y}}\cdot\vec{\nabla}_y\tilde{G} \stackrel{!}{=} -D\vec{y}^2\tilde{G}, \tag{8}$$

wobei der Punkt die Ableitung nach τ bedeutet. Koefizientenvergleich mit (7) liefert dann das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{t}(\tau,\vec{\eta}) = 1, \quad \dot{y}(\tau,\vec{\eta}) = \vec{q} + \gamma\vec{y}, \dot{\tilde{G}} = -D\vec{y}^2\tilde{G} \tag{9}$$

die man mit den Anfangsbedingungen $t(\tau=0,\vec{\eta})=0$ und $\vec{y}(\tau=0,\vec{\eta})=\vec{\eta}$, $\tilde{G}|_{\tau=0} = \tilde{G}_0(\vec{q},\vec{\eta};\vec{x}_0,\vec{v}_0)$ löst. Aus dieser Lösung bildet man dann die Umkehrfunktionen $\tau=\tau(t,\vec{y})$, $\vec{\eta}=\vec{\eta}(t,\vec{y})$ und erhält damit die Lösung von (7).

(c) Berechnen Sie schließlich die Korrelationsfunktion (1), wobei $\rho[\vec{x}'](t,\vec{x}) = e\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'(t))$, $\vec{j}(t,\vec{x}) = e\vec{v}(t)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'(t))$ gilt. Dabei ist $\vec{x}'(t)$ die stochastische Trajektorie des Brownschen Teilchens im Medium.

Hinweis: Da die Gleichgewichtsverteilung $f_0(\vec{x}_0,\vec{v}_0)$ nicht von $\vec{x}_0$ abhängt, läuft dies letztlich auf die Berechnung der Integrale

$$\begin{aligned}
\Pi^{00}(t,\vec{q}) &= e^2\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{v}_0\tilde{G}(t,\vec{q},\vec{y}=0;\vec{x}_0=0,\vec{v}_0)f_0(\vec{v}_0),\\
\Pi^{0j}(t,\vec{q}) = \Pi^{j0}(t,\vec{q}) &= e^2\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{v}_0 v_0^j\tilde{G}(t,\vec{q},\vec{y}=0;\vec{x}_0=0,\vec{v}_0)f_0(\vec{v}_0),\\
\Pi^{jk}(t,\vec{q}) &= e^2\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{v}_0 v_0^k(-\mathrm{i})\left[\frac{\partial}{\partial y_j}\tilde{G}(t,\vec{q},\vec{y};\vec{x}_0=0,\vec{v}_0)\right]_{\vec{y}=0}f_0(\vec{v}_0)
\end{aligned} \tag{10}$$

hinaus.

(d) Beweisen Sie (10).

Bemerkung: Der Bezug zur Bremsstrahlung von geladenen Teilchen in Materie ergibt sich daraus, daß für den Fall, daß das Medium für die Bremsstrahlungsphotonen dünn ist, d.h. die Wechselwirkung der Photonen mit dem Medium vernachlässigt werden kann, die Photonenproduktionsrate durch

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}^3\vec{q}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\vec{x}} = \sum_{jk=1}^{3}\sum_{\lambda=1}^{2}\frac{\epsilon^j(\vec{q},\lambda)\epsilon^k(\vec{q},\lambda)}{(2\pi)^3 2\omega}\tilde{\Pi}^{jk}(\omega=|\vec{q}|,\vec{q}) \tag{11}$$

gegeben ist. Dabei sind $\vec{\epsilon}(\vec{q},\lambda)$ zwei beliebige zueinander und zu $\vec{q}$ orthogonale Einheitsvektoren (transversale Polarisationsvektoren des elektromagnetischen Feldes) und

$$\tilde{\Pi}^{jk}(\omega,\vec{q}) = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}t\,\Pi^{jk}(|t|,\vec{q})\exp(+\mathrm{i}\omega t) \tag{12}$$

die Fourier-Transformierte der räumlichen Komponenten der Korrelationsfunktion (10). Mehr dazu folgt auf dem Lösungsblatt.
