H. van Hees **Wintersemester 2026/2027**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 3

Aufgabe 1: Berechnen von Ableitungen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und berechnen Sie deren Ableitungen.

(a) $f(x) = (x^2)^{-1/3}$

Lösung: Die Funktion ist offenbar in $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Nach der Kettenregel ist die Ableitung

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2)^{-4/3} 2x = -\frac{2x}{3}(x^2)^{-4/3} = -\frac{2}{3x}(x^2)^{-1/3}. \tag{1}$$

(b) $f(x) = (x^4-1)/(x^2-1)$

Lösung: $D = \mathbb{R} \setminus -1, 1$. Bevor wir die Funktion ableiten, vereinfachen wir sie, indem wir im Zähler die „3. binomische Formel" $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ mit $a = x^2$ und $b = 1$ anwenden:

$$f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1} = x^2+1 \Rightarrow f'(x) = 2x. \tag{2}$$

Bemerkung: In diesem Fall können die Definitionslücken der Funktion f bei $x = \pm 1$ „behoben" werden. Streng genommen ist aber $\tilde{f} = x^2 + 1$ mit $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine von f verschiedene Funktion, da f nur in D definiert ist. Allerdings gilt für $x \in D$ stets $f(x) = \tilde{f}(x)$.

(c) $f(x) = \arctan(x^2)$

Lösung: Der arctan ist in ganz $\mathbb{R}$ definiert, und damit ist für f der Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$. Mit der Kettenregel folgt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^4} 2x = \frac{2x}{1+x^4}. \tag{3}$$

Aufgabe 2: Hyperbelfunktionen

Die Hyperbelfunktionen sind durch

$$\sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}, \quad \cosh x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{4}$$

definiert. Sie heißen „sinus hyperbolicus", „cosinus hyperbolicus" und „tangens hyperbolicus".

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der drei Hyperbelfunktionen und berechnen Sie deren Ableitungen.

Lösung: Da $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind sinh und cosh ebenfalls in ganz $\mathbb{R}$ definiert. Da weiter $\exp x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\cosh x \neq 0$ und folglich auch tanh in ganz $\mathbb{R}$ definiert. Es gilt $\exp'(x) = \exp x$ und folglich mit der Kettenregel $\mathrm{d}/\mathrm{d}x \exp(-x) = -\exp(-x)$. Damit ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh x = \sinh x. \tag{5}$$

Mit der Quotientenregel folgt daraus wiederum

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh x = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x. \tag{6}$$

Mit der Formel (8) kann man das auch in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{7}$$

ausdrücken.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{8}$$

gilt.

Lösung: Man kann diese Aufgabe auf zwei Arten lösen:

(i) Man verwendet einfach die Definition der Hyperbelfunktionen und wendet die binomischen Formeln an:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x &= \frac{1}{4}[\exp x + \exp(-x)]^2 = \frac{1}{4}[\exp(2x) + \exp(-2x) + 2], \\ \sinh^2 x &= \frac{1}{4}[\exp(2x) + \exp(-2x) - 2] \\ &\Rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \end{aligned} \tag{9}$$

(ii) Wir definieren $f(x) = \cosh^2 x - \sinh^2 x$. Mit der Kettenregel findet man für die Ableitung $f'(x) = 2\cosh x \sinh x - 2\sinh x \cosh x = 0$. Eine Funktion, deren Ableitung verschwindet, ist konstant, d.h. $f(x) = f(0) = 1$.

(c) Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen arcosh, arsinh und artanh („area cosinus hyperbolicus" usw.). Dabei ist $\text{arcosh} : [1, \infty] \to [0, \infty]$. Berechnen Sie die Ableitungen mit Hilfe der Formel von der Ableitung der Umkehrfunktion.

Lösungen: (i) Wir setzen $y = \sinh x$ dann ist $x = \text{arsinh}\, y$ und aus der Ableitungsformel für die Umkehrfunktion folgt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}. \tag{10}$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \text{arsinh}\, y = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}. \tag{11}$$

(ii) Wir setzen $y = \cosh x$ dann ist $x = \text{arcosh}\, y$ und aus der Ableitungsformel für die Umkehrfunktion folgt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}. \tag{12}$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \text{arcosh}\, y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}. \tag{13}$$

(iii) Wir setzen $y = \tanh x$ dann ist $x = \text{artanh}\, y$ und aus der Ableitungsformel für die Umkehrfunktion folgt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{1 - \tanh^2 x} = . \tag{14}$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \text{artanh}\, y = \frac{1}{1 - y^2}. \tag{15}$$

(d) Drücken Sie arsinh, arcosh und artanh mit Hilfe des ln aus und bestätigen Sie die in der vorigen Teilaufgabe gefundenen Ableitungsformeln.

Lösungen: Im folgenden schreiben wir zur Abkürzung $A = \exp x$ dann ist

(i) $y = \sinh x = (A - 1/A)/2$. Wir lesen dies als Gleichung für A. Multiplizieren wir die Gleichung mit $2A$ folgt $2Ay = A^2 - 1$ und damit $A^2 - 2Ay - 1 = 0$. Die quadratische Gleichung besitzt die Lösungen

$$A_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}. \tag{16}$$

Da $A = \exp x > 0$, kommt nur die Lösung mit dem oberen Vorzeichen in Frage. Damit folgt

$$x = \ln A = \operatorname{arsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1}). \tag{17}$$

Die Ableitung erfolgt mit der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \ln(y + \sqrt{y^2+1}) = \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right) = \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} \frac{\sqrt{y^2+1}+y}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}. \tag{18}$$

(ii) $y = \cosh x = (A + 1/A)/2$. Wir lesen dies als Gleichung für A. Multiplizieren wir die Gleichung mit $2A$ folgt $2Ay = A^2 + 1$ und damit $A^2 - 2Ay + 1 = 0$. Die quadratische Gleichung besitzt die Lösungen

$$A_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2-1}. \tag{19}$$

Offenbar muss für $y \to \infty$ auch $A \to \infty$ gehen. Also gilt wieder eindeutig das obere Vorzeichen und damit

$$x = \ln A = \operatorname{arcosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2-1}). \tag{20}$$

Die Ableitung erfolgt mit der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \ln(y + \sqrt{y^2-1}) = \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\right) = \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} \frac{\sqrt{y^2-1}+y}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}. \tag{21}$$

(iii) $y = \tanh x = (A - 1/A)(A + 1/A) = (A^2 - 1)(A^2 + 1)$. Multipliziert man mit $A^2 + 1$, folgt $y(A^2+1) = A^2 - 1$ und damit $(y-1)A^2 + y + 1 = 0$ bzw. $A^2 - (1+y)/(1-y) = 0$. Damit folgt

$$x = \operatorname{artanh} y = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right). \tag{22}$$

Mit der Ketten- und Quotientenregel erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1+y}{1-y}} \frac{1-y-(-1-y)}{(1-y)^2} = \frac{1}{2} \frac{1-y}{1+y} \frac{2}{(1-y)^2} = \frac{1}{(1+y)(1-y)} = \frac{1}{1-y^2}. \tag{23}$$

Anmerkung: Die Ausdrücke für die Areafunktionen durch den Logarithmus lassen sich auf elegantere Weise wie folgt gewinnen. Beginnen wir mit

$$y = \operatorname{arcosh} x \;\Leftrightarrow\; x = \cosh y \quad \text{mit} \quad x \geq 1, \quad y \geq 0. \tag{24}$$

Nun bemerken wir, dass

$$\cosh y + \sinh y = \frac{\exp y + \exp(-y)}{2} + \frac{\exp y - \exp(-y)}{2} = \exp y \tag{25}$$

ist und damit (für $y > 0$)

$$\cosh y + \sinh y = \cosh y + \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \exp y. \tag{26}$$

Wegen $\cosh y = x$ folgt daraus durch Logarithmieren

$$y = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad \text{für} x \geq 1. \tag{27}$$

Sei nun weiter

$$y = \operatorname{arsinh} x, \quad x = \sinh x \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Dann können wir (26) in die Form

$$\exp y = \sqrt{\sinh^2 y + 1} + \sinh y = \sqrt{x^2+1} + x \;\Rightarrow\; y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \tag{29}$$

bringen.
Sei schließlich

$$y = \operatorname{artanh} x \; x = \tanh y \quad \text{mit} \quad x \in (-1,1), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

Dann ist

$$1 - \tanh^2 y = 1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y} = \frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\cosh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y} \tag{31}$$

und wegen $\cosh y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\cosh y = \sqrt{\cosh^2 y} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{32}$$

und damit wiederum

$$\sinh y = \tanh y \cosh y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{33}$$

Mit (29) folgt daraus schließlich

$$\begin{aligned} y = \operatorname{artanh} x &= \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \ln\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \ln\sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}} = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned} \tag{34}$$