H. van Hees **Wintersemester 2026/2027**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 1 Lösungen

Schul-Mathe-Test

Ziel dieses Mathe-Tests ist es, dass wir (Dozent und Tutoren) Ihre Vorkenntnisse in der Schulmathematik besser einschätzen können. Der Test wird *nicht* in irgendeiner Form bewertet.

Aufgabe 1: Kurvendiskussion (Ableitungen von Funktionen usw.)

Gegeben ist die reelle Funktion

$$f(x)=\frac{x^2}{x+1}. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion $D\subseteq\mathbb{R}$.

Lösung: Die Funktion ist offenbar überall definiert außer an der Nullstelle des Nenners, d.h. $D=x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

(b) Bestimmen Sie Nullstellen sowie singuläre Stellen der Funktion und den Schnittpunkt des Graphen der Funktion $y=f(x)$ mit der y-Achse.

Lösung: Die Funktion wird Null, wenn der Zähler Null wird, also bei $x_0=0$. Damit ist auch der „y-Achsenabschnitt“ $f(0)=0$ bestimmt. Die Singularität ist durch die Nullstellen des Nenners gegeben, also $x_\mathrm{s}=-1$.

(c) Wie verhält sich die Funktion im Limes $x\to\pm\infty$ (Asymptoten)?

Lösung: Offenbar geht der Zähler schneller gegen Unendlich als der Nenner, d.h. $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$. Um die Asymptoten zu bestimmen, führen wir eine Partialbruchzerlegung durch. Das geht hier am einfachsten wie folgt

$$f(x)=\frac{x^2-1+1}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}. \tag{2}$$

Die Asymptoten sind dann dadurch gegeben, dass der letzte Term für $x\to\pm\infty$ gegen Null strebt, d.h.

$$f(x)\underset{x\to\pm\infty}{\cong}x-1. \tag{3}$$

Die Funktion besitzt also für $x\to\infty$ dieselbe Asymptote, die eine Gerade im Graphen der Funktion ist (s. Skizze unten).

(d) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen (Maxima und Minima)!

Lösung: Die notwendige Bedingung für lokale Extremstellen ist $f'(x_\mathrm{E})=0$. Die Ableitung bilden wir am bequemsten aus dem Ausdruck (2):

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2} \tag{4}$$

$$=\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1+1)(x+1-1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+2)x}{(x+1)^2}. \tag{5}$$

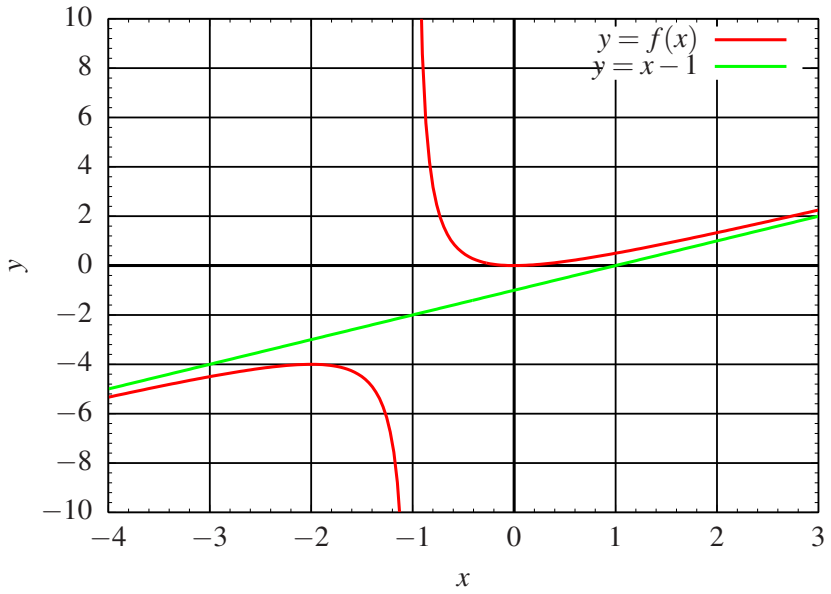
Die Nullstellen der Ableitung sind die Nullstellen des Zählers, also $x_{E1} = -2$ und $x_{E0} = 0$. Beide Stellen liegen im Definitionsbereich der Funktion und deren Ableitung, d.h. sie sind mögliche lokale Extremwerte.

Um zu entscheiden, ob wirklich lokale Extremwerte vorliegen, benötigen wir die zweite Ableitung. Diese bilden wir am bequemsten, indem wir f' in der Form (4) ableiten:

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}. \tag{6}$$

Nun ist $f''(x_{E1}) = -2 < 0$, d.h. es liegt bei $x_{E1} = -2$ ein Maximum vor. Weiter ist $f''(x_{E2}) = 2 > 0$, d.h. es liegt bei $x_{E2} = 0$ ein Minimum vor.

(e) Sizzieren Sie die Funktion.



Aufgabe 2: Geometrie und Extremwert

Welche Abmessungen muss eine Konservendose in Form eines geraden Kreiszylinders (Radius R und Höhe h) mit einem Volumen $V = 1\,\mathrm{l} = 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ besitzen, damit zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech verbraucht wird (d.h. für welche Abmessungen wird die Oberfläche des Zylinders minimal)?

Lösung: Das Volumen des Zylinders ist durch „Grundfläche × Höhe“ gegeben, d.h.

$$V = \pi R^2 h, \tag{7}$$

denn die Grundfläche ist ein Kreis mit Radius R mit der Fläche $A_{\text{Boden}} = A_{\text{Deckel}} = \pi R^2$.

Die Oberfläche besteht aus Deckel und Boden sowie der Mantelfläche. Die Mantelfläche kann man auf ein Rechteckt von der Länge des Kreisumfangs $2\pi R$ und der Höhe h abwickeln. Diese Fläche ist also $A_{\text{Mantel}} = 2\pi R h$. Die Oberfläche ist also

$$O = A_{\text{Boden}} + A_{\text{Deckel}} + A_{\text{Mantel}} = 2\pi R(h + R). \tag{8}$$

Da $V = 1\mathrm{l}$ vorgegeben ist, können wir wegen (7) hier $h = V/(\pi R^2)$ einsetzen. Das ergibt

$$O = 2\pi R\left(R + \frac{V}{\pi R^2}\right) = 2\pi\left(R^2 + \frac{V}{\pi R}\right). \tag{9}$$

Um das Extremum zu finden, leiten wir dies nach R ab, denn die notwendige Bedingung für ein Extremum ist, dass diese Ableitung verschwindet:

$$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}R} = 2\pi\left(2R - \frac{V}{\pi R^2}\right) \stackrel{!}{=} 0. \tag{10}$$

Die Nullstelle lässt sich durch einfache Umformungen finden:

$$2R - \frac{V}{\pi R^2} = 0 \Rightarrow 2\pi R^3 = V \Rightarrow R_{\min} = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}. \tag{11}$$

Um zu prüfen, ob auch wirklich ein Minimum vorliegt, müssen wir zeigen, dass die zweite Ableitung positiv ist. In der Tat gilt

$$\frac{\mathrm{d}^2O}{\mathrm{d}R^2} = 2\pi\left(2 + \frac{2V}{\pi R^3}\right). \tag{12}$$

Für $R = R_{\min}$ ergibt sich $V/(\pi R_{\min}^3) = 2$ und damit

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2O}{\mathrm{d}R^2}\right)_{R=R_{\min}} = 12\pi > 0. \tag{13}$$

Es liegt also tatsächlich ein Minimum vor. Für die Höhe der optimalen Dose folgt aus (7)

$$h = \frac{V}{\pi R_{\min}^2} = \frac{2\pi R_{\min}^3}{\pi R_{\min}^2} = 2R_{\min}, \tag{14}$$

d.h. die optimale Dose hat quadratischen Querschnitt, denn deren Höhe entspricht gerade dem Zylinderdurchmesser $2R_{\min}$.

Aufgabe 3: Integralrechnung
Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen

(a) $f(x) = 3x^2 + 7x + 1$

Lösung:

$$F(x) = \int \mathrm{d}x\, f(x) = x^3 + \frac{7}{2}x^2 + x + \text{const}, \tag{15}$$

denn offenbar ist in der Tat $F'(x) = f(x)$.

(b) $f(x) = x/\sqrt{x^2+1}$ (Tip: Substituieren Sie $y = x^2$)

Lösung: Substituieren wir $y = x^2$ ist $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\, 2x$, d.h.

$$F(x) = \int \mathrm{d}x\, f(x) = \int \mathrm{d}y \frac{1}{2}\frac{1}{(y+1)^{1/2}} = \sqrt{y+1} + \text{const} = \sqrt{x^2+1} + \text{const}. \tag{16}$$

Man prüft durch Ableitung unter Verwendung der Kettenregel nach, dass tatsächlich $F'(x) = f(x)$ ist:

$$F'(x) = 2x\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \tag{17}$$

(c) $f(x) = \sin x \cos x$ (Tip: Substituieren Sie $y = \sin x$)

Lösung: Die Substitution impliziert $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \cos x$ und damit

$$F(x) = \int \mathrm{d}y\, y = \frac{1}{2}y^2 + \text{const} = \frac{1}{2}\sin^2 x + \text{const}. \tag{18}$$

Die Probe kann man wieder leicht durch Ableiten mit Hilfe der Kettenregel vornehmen:

$$F'(x) = \frac{1}{2}2\sin x \cos x = \sin x \cos x = f(x). \tag{19}$$

Aufgabe 4: Integral zur Flächenberechnung

Ein Halbkreis mit Radius R in der x-y-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems ist durch $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ($x \in [-R, R]$) gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des entsprechenden Integrals die Fläche des Halbkreises. Tip: Substituieren Sie $x = R\cos\phi$. Dann können Sie

$$\int \mathrm{d}\phi\, \sin^2\phi = \frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4} \tag{20}$$

ohne Beweis verwenden.

Lösung: Die Substitution ergibt $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\phi R \sin\phi$. Das Intervall $x \in [-R, R]$ wird umkehrbar eindeutig auf das Intervall $\phi = [0, \pi]$ abgebildet. Damit folgt

$$\begin{aligned} A &= \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \sqrt{R^2 - x^2} \\ &= \int_{+\pi}^{0} \mathrm{d}\phi(-R\sin\phi)\sqrt{R^2 - R^2\cos^2\phi} \\ &= +\int_{0}^{\pi} \mathrm{d}\phi R^2 \sin^2\phi \\ &= R^2\left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4}\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} \\ &= R^2\frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^2}{2}, \end{aligned} \tag{21}$$

wie man aus der Elementargeometrie weiß.

Aufgabe 5: Gleichförmige Kreisbewegung

Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit Radius R in der x_1-x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems. Die Bewegung ist dann durch

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

gegeben. Dabei sind der Radius des Kreises R und die Winkelgeschwindigkeit ω zeitlich konstant.

(a) Berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung (Vektoren!) und deren Beträge.

Hinweis: Geschwindigkeit und Beschleunigung sind die 1. bzw. 2. Ableitung des Ortsvektors:

$$\underline{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{r}(t) = \dot{\underline{r}}(t), \quad \underline{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{v}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\underline{r}(t) = \ddot{\underline{r}}(t). \tag{23}$$

Lösung: Wir erhalten die Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Ableitung nach der Zeit t. Mit der Kettenregel folgt

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}} = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ -R\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2\underline{r}. \tag{24}$$

Die Beträge der Vektoren sind

$$|\underline{v}| = \sqrt{R^2\omega^2[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]} = R\omega, \quad |\underline{a}| = \omega^2|\underline{r}| = R\omega^2. \tag{25}$$

(b) Welche Kraft (Vektor!) müssen Sie auf das Teilchen ausüben, damit es diese Kreisbewegung ausführt?

Lösung: Nach dem 2. Newtonschen Axiom gilt

$$\underline{F} = m\underline{a} = -m\omega^2\underline{r}. \tag{26}$$

Es muss also eine Zentralkraft, die stets in Richtung auf den Koordinatenursprung weist aufgebracht werden. Der Betrag ist $|\underline{F}| = m\omega^2 R$.

Bemerkung: Diese Kraft heißt in diesem Zusammenhang die Zentripetalkraft.
