

Mathematische Methoden für das Lehramt L3 – Lösungen 14

Aufgabe 2: Potentialwirbel

Gegeben sei das Vektorfeld (in kartesischen Koordinaten $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$)

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{e}_3 \times \frac{\vec{r}}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (1)$$

- (a) Berechnen Sie Rotation und Divergenz in kartesischen Koordinaten!

Lösung: Es ist in kartesischen Koordinaten

$$\underline{V} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Wir setzen zur Abkürzung $x_1^2 + x_2^2 = R^2$. Dann ist für $R > 0$

$$\text{rot } \underline{V} = \underline{\nabla} \times \underline{V} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \left[\frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/R^2 - 2(x_1^2 + x_2^2)/R^4 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (3)$$

und

$$\text{div } \underline{V} = \underline{\nabla} \cdot \underline{V} = \partial_1 \left(\frac{-x_2}{R^2} \right) + \partial_2 \left(\frac{x_1}{R^2} \right) = -\frac{2x_1x_2}{R^4} + \frac{2x_1x_2}{R^4} = 0. \quad (4)$$

Bei $R = 0$, d.h. entlang der gesamten x_3 -Achse, ist das Vektorfeld singulär und daher auch Rotation und Divergenz nicht definiert.

- (b) Stellen Sie das Vektorfeld in Standardzylinderkoordinaten (R, φ, z) dar und berechnen Sie abermals Rotation und Divergenz. Dabei dürfen die Formeln in Abschnitt 3.7.4 des Manuskripts verwendet werden.

Lösung: Es gilt $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$, $\vec{r} = R\vec{e}_R + z\vec{e}_z$ und $R^2 = x_1^2 + x_2^2$ und damit

$$\vec{V} = \frac{1}{R^2} \vec{e}_z \times (R\vec{e}_R + z\vec{e}_z) = \frac{1}{R} \vec{e}_\varphi. \quad (5)$$

Damit findet man für $R > 0$ mit Hilfe der Formeln (3.7.38) bzw. (3.7.39) für Rotation und Divergenz sofort (3) und (4).

- (c) Existiert ein skalares Potential, so dass

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi = -\text{grad } \Phi \quad (6)$$

gilt?

Lösung: Da $\text{rot } \vec{V} = 0$ ist, sollte es zumindest lokal ein skalares Potential geben. Es ist klar, dass wir es in Zylinderkoordinaten am einfachsten bestimmen können. Mit (3.7.37) folgt, dass $\Phi = \Phi(\varphi)$ sein muss, und dann gilt

$$-\vec{\nabla}\Phi = -\vec{e}_\varphi \frac{1}{R} \partial_\varphi \Phi(\varphi) \stackrel{!}{=} \vec{V} = \frac{1}{R} \vec{e}_\varphi. \quad (7)$$

Damit ist $\partial_\varphi \Phi = -1$ und also

$$\Phi(\varphi) = -\varphi. \quad (8)$$

Bemerkung: Es ist klar, dass das Potential eine Singularität besitzt, je nachdem welches Intervall der Länge 2π man für φ definiert. Eine Standardwahl für diesen Fall ist $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Dann ist das Potential entlang der Halbebene $\varphi = \pi$, was das Gleiche ist wie $\varphi = -\pi$, singular, denn nähert man sich der Halbebene von der einen Seite her, also $\varphi \rightarrow \pi - 0^+$ wird $\Phi(\varphi) \rightarrow -\pi$ und von der anderen Seite her $\varphi \rightarrow -\pi + 0^+$ wird $\Phi(\varphi) \rightarrow \pi$, d.h. das Potential weist entlang der besagten Halbebene einen Sprung der Höhe 2π auf.

Die Funktion (8) sieht dabei gar nicht singular aus, es liegt aber eine Koordinatensingularität vor, weil φ als Winkel eine zyklische Koordinate ist, und Werte, die sich nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, denselben geometrischen Ort bezeichnen.

Das Potential wird dadurch eindeutig bestimmt, dass man eine beliebige Halbebene aus dem Definitionsbereich herausnimmt, und das entsprechende Wegintegral von irgendeinem festgehaltenen Punkt aus bestimmt, wobei man nur Wege zulässt, die diese Halbebene nicht überschreiten. Entlang der Halbebene springt Φ immer um den Wert 2π .

- (d) Berechnen Sie das Wegintegral

$$J = \int_{K_a} d\vec{r} \cdot \vec{V} \quad (9)$$

entlang des Kreises in der Ebene $x_3 = 0$ mit Mittelpunkt bei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und Radius a , der durch

$$K_a: \quad \vec{r}(\varphi) = a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (10)$$

parametrisiert sei.

Lösung: Es gilt

$$d\vec{r} = d\varphi a \vec{e}_\varphi. \quad (11)$$

Mit (7) folgt daraus sofort

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi a \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{a} \vec{e}_\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi. \quad (12)$$

- (e) **Zum Knobeln:** Wie lässt sich das mit dem in Abschnitt 3.11 des Manuskripts besprochenen Lemma von Poincaré vereinbaren? Ist der Satz von Stokes auf das Wegintegral anwendbar?

Lösung: Das Beispiel ist mit dem Lemma von Poincaré vereinbar, denn es gilt nur, wenn der Definitionsbereich des wirbelfreien Vektorfeldes ein *einfach* zusammenhängendes Gebiet ist. In unserem Fall besitzt das Vektorfeld entlang der gesamten x_3 -Achse eine Singularität, und man kann den Kreis aus der vorigen Teilaufgabe nicht ganz innerhalb des Definitionsbereichs stetig auf einen Punkt zusammenziehen.

Beim Beweis des Lemmas von Poincaré haben wir den Stokesschen Integralsatz verwendet. Um das für unsere Kreislinie K_a tun zu können, müssten wir eine Fläche F finden, so dass der Rand $\partial F = K_a$ ist, so dass die Rotation des Vektorfeldes entlang dieser gesamten Fläche definiert ist. Eine jede solche Fläche schneidet aber unweigerlich die x_3 -Achse, wo eben die Rotation nicht definiert ist.

Bemerkung: Man kann die Singularität entlang der x_3 -Achse auch mittels Distributionen analysieren. Dazu betrachten wir das regularisierte Feld

$$\underline{V}_\epsilon = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + \epsilon^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Dabei ist $\epsilon > 0$, und wir analysieren das Feld im (schwachen) Limes $\epsilon \rightarrow 0$. Bilden wir die Rotation:

$$\underline{\nabla} \times \underline{V}_\epsilon = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + \epsilon^2)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\epsilon^2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Wir zeigen nun, dass mit

$$2\pi\delta_\epsilon^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{2\epsilon^2}{(x_1^2 + x_2^2 + \epsilon^2)^2} \quad (15)$$

$\delta_\epsilon^{(2)}$ eine „regularisierte Dirac-Distribution“ im $\mathbb{R}^2$ ist. Zunächst ist klar, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon^{(2)}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ \infty & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases} \quad (16)$$

Für eine beliebige Testfunktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2x f(\underline{x}) \delta_\epsilon^{(2)}(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x f(\underline{x}) \frac{2\epsilon^2}{(x_1^2 + x_2^2 + \epsilon^2)^2} \quad (17)$$

Substituieren wir $\underline{x} = x_1, x_2) = \epsilon(\xi_1, \xi_2) = \epsilon\underline{\xi}$, $d^2x = \epsilon^2 d^2\xi$ mit $\epsilon > 0$. Dann folgt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x f(\underline{x}) \delta_\epsilon^{(2)}(\underline{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\xi f(\epsilon\underline{\xi}) \frac{2}{(1 + \xi^2)^2} = \frac{f(\underline{0})}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\xi \frac{2}{(1 + \xi^2)^2}. \quad (18)$$

Im verbliebenen Integral führen wir nun Polarkoordinaten (ξ, φ) , $d^2\xi = d\xi d\varphi$ ein

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x f(\underline{x}) \delta_\epsilon^{(2)}(\underline{x}) = \frac{f(\underline{0})}{2\pi} \int_0^\infty d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{2\xi}{(1 + \xi^2)^2} = -f(\underline{0}) \frac{1}{1 + \xi^2} \Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} = f(\underline{0}). \quad (19)$$

Damit ist gezeigt, dass

$$\text{w-lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon^{(2)}(\underline{x}) = \text{w-lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^2}{\pi(x^2 + \epsilon^2)^2} = \delta^{(2)}(\underline{x}) \quad (20)$$

ist. In diesem Sinne von Distributionen ist also

$$\underline{\nabla} \times \underline{V} = 2\pi\delta^{(2)}(x_1, x_2)(0, 0, 1)^T. \quad (21)$$

Jetzt können wir den Stokesschen Integralsatz für eine beliebige Kurve C , die die x_3 -Achse in einer beliebigen Ebene $z = z_0$ einmal im Gegenuhrzeigersinn umlaufen, widerspruchsfrei anwenden, denn offenbar gilt, wenn $C = \partial F$ mit einer beliebigen Fläche F in dieser Ebene

$$\int_C d\underline{r} \cdot \underline{V} = \int_F d^2\underline{f} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{V}) = 2\pi. \quad (22)$$