

## Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 13

### Aufgabe 1 [10 Punkte]: Formeln mit div, grad und rot

Im Folgenden seien  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  Vektor- und  $\phi$  und  $\psi$  ein Skalarfelder, die mindestens einmal partiell nach den kartesischen Komponenten  $x_j$  des Ortsvektors  $\vec{r}$  differenzierbar seien. Zeigen Sie dann unter Verwendung des Nabla- oder Ricci-Kalküls, dass die Gleichungen

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}, \quad (1)$$

$$\operatorname{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B} + \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}, \quad (2)$$

$$\operatorname{grad}(\phi\psi) = \phi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \phi, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(\phi\vec{A}) = \phi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \phi, \quad (4)$$

$$\operatorname{rot}(\phi\vec{A}) = \phi \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \times \operatorname{grad} \phi, \quad (5)$$

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}, \quad (6)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (7)$$

gelten, sowie, falls  $\vec{A}$  mindestens zweimal stetig differenzierbar ist,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \quad (\Delta \vec{A} \text{ nur in kartesischen Koordinaten einfach berechenbar!}) \quad (8)$$

**Lösungen:** (1):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}_c + \vec{A}_c \times \vec{B}) \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}_c) \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \\ &= \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}. \end{aligned} \quad (9)$$

(2)

$$\begin{aligned} [\operatorname{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B})]_a &= \partial_a (A_b B_b) = B_b \partial_a A_b + A_b \partial_a B_b \\ &= B_b (\partial_a A_b - \partial_b A_a) + B_b \partial_b A_a + A_b (\partial_a B_b - \partial_b B_a) + A_b \partial_b B_a \\ &= B_b \epsilon_{abc} (\operatorname{rot} \vec{A})_c + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) A_a + A_b \epsilon_{abc} (\operatorname{rot} \vec{B})_c + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) B_a \\ &= [\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A} + \vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}]_a. \end{aligned} \quad (10)$$

(3)

$$\operatorname{grad}(\phi\psi) = \vec{\nabla}(\phi\psi) = \vec{\nabla}(\phi\psi_c) + \nabla(\phi_c\psi) = \psi \vec{\nabla}\phi + \phi \vec{\nabla}\psi = \psi \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{grad} \psi. \quad (11)$$

(4)

$$\operatorname{div}(\phi\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{A}_c) + \vec{\nabla} \cdot (\phi_c\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}\phi + \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{div} \vec{A}. \quad (12)$$

(5)

$$\operatorname{rot}(\phi\vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\phi\vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\phi\vec{A}_c) + \vec{\nabla} \times (\phi_c\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi) \times \vec{A} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{A} = \phi \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \times \operatorname{grad} \phi. \quad (13)$$

(6)

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}_c) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_c \times \vec{B}) \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}_c) \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \\ &= \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}.\end{aligned}\tag{14}$$

(7)

$$\begin{aligned}[\operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B})]_a &= \epsilon_{abc} \partial_b (\epsilon_{cde} A_d B_e) \\ &= (\delta_{ad} \delta_{be} - \delta_{ae} \delta_{bd}) (B_e \partial_b A_d + A_d \partial_b B_e) \\ &= B_b \partial_b A_a - B_a \partial_b A_b + A_a \partial_b B_b - A_b \partial_b B_a \\ &= \vec{B} \cdot \vec{\nabla} A_a - B_a \operatorname{div} \vec{A} + A_a \operatorname{div} \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) B_a.\end{aligned}\tag{15}$$

(8)

$$\begin{aligned}[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_a &= \epsilon_{abc} \partial_b (\epsilon_{cde} \partial_d A_e) \\ &= (\delta_{ad} \delta_{be} - \delta_{ae} \delta_{bd}) \partial_b \partial_d A_e \\ &= \partial_a \partial_b A_b - \partial_b \partial_b A_a \\ &= \partial_a \operatorname{div} \vec{A} - \Delta A_a \\ &= (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A})_a - \Delta A_a.\end{aligned}\tag{16}$$