H. van Hees Wintersemester 2025/2026

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 7 (Lösungen)

Aufgabe 1 (10 Punkte): Taylor-Reihen

Für die Taylor-Reihe einer in einer Umgebung um $a \in \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt a ist gegeben durch

$$f(x+a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a) x^a. \tag{1}$$

Dabei ist

$$f^{(j)}(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\bigg|_{x=a}. \tag{2}$$

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Taylor-Reihen von cos und sin um den Entwicklungspunkt $a = 0$ und bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius.

Lösung: Es gilt

$$\cos(0) = 1, \quad \cos'(0) = -\sin(0) = 0, \quad \cos''(0) = -\cos(0) = -1, \ldots \tag{3}$$

Daraus schließt man durch Iteration, dass offenbar

$$\cos^{((2k)}(0) = (-1)^k, \quad \cos^{(2k+1)}(0) = 0 \tag{4}$$

ist, was die Taylor-Reihe

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{5}$$

Den Konvergenzradius berechnen wir mit der Quotientenformel

$$R^2 = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{2k}}{a_{2k+2}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!}{(2k)!} = \lim_{k\to\infty} (2k+1)(2k+2) = \infty. \tag{6}$$

Die Potenzreihe konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$.

Man darf die Potenzreihe demnach einfach gliedweise ableiten. Man erhält daraus ohne neue Rechnung die Reihe für den sin:

$$\sin x = -\cos' x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \tag{7}$$

und die Reihe konvergiert ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie nun nochmals die Taylor-Reihen von cos und sin um einen beliebigen Entwicklungspunkt a und beweisen Sie damit die Additionstheoreme.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\cos(x+a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2j)!}\cos(a)x^{2j} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\sin a x^{2k-1} \\
&= \cos(a)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2j)!}x^{2j} - \sin(a)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} \\
&= \cos(a)\cos(x) - \sin(a)\sin(x).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Ergebnisse der vorigen Teilaufgabe verwendet. Genauso folgt

$$
\begin{aligned}
\sin(x+a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2j)!}\sin(a)x^{2j} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}\cos a x^{2k-1} \\
&= \sin(a)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2j)!}x^{2j} + \cos(a)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} \\
&= \sin(a)\cos(x) + \cos(a)\sin(x).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Taylor-Reihe für die Exponentialfunktion exp um den Entwicklungspunkt $a = 0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Lösung: Wegen $\exp^{(j)} x = \exp(x)$ ist $\exp^{(j)}(0) = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Damit ist

$$\exp x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j. \tag{10}$$

Der Konvergenzradius bestimmt sich wieder über die Quotientenregel

$$R = \lim_{j\to\infty} \frac{(j+1)!}{j!} = \lim_{j\to\infty} (j+1) = \infty. \tag{11}$$

Die Reihe konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass man die Taylor-Formel (1) symbolisch durch die „Operatorexponentialfunktion"

$$f(x+a) = \exp(a\mathrm{d}_x)f(x) \tag{12}$$

schreiben kann, wobei $\exp(a\mathrm{d}x)$ durch die oben hergeleitete formale Potenzreihe definiert ist.

$$\exp(a\mathrm{d}_x)f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} f^{(j)}(x) = f(x+a). \tag{13}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte): De L'Hospital-Regeln für Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte von Funktionen mit Hilfe der De L'Hosphital-Regeln

(a) (2 Punkte)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \tag{14}$$

Lösung: Es handelt sich um einen Grenzwert vom Typ $0/0$. Die De L'Hospital-Regel ist also anwendbar:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin'(x)}{x'}=\lim_{x\to 0}\cos x=1. \tag{15}$$

Bemerkung: Das erhält man auch indem man die Taylorreihe des sin (7) verwendet:

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)!}x^{2j-2}\overset{k=j-1}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}}{(2k+1)!}x^{2k}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots \tag{16}$$

(b) (4 Punkte)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\quad\text{und}\quad\lim_{x\to 0^+}x\ln x \tag{17}$$

Lösung: Der erste Limes ist vom Typ $\infty/infty$, und man kann die De L'Hospital-Regel anwenden:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln' x}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0. \tag{18}$$

Der zweite Limes ist vom Typ $0\cdot\infty$. Dann lässt sich die De L'Hospital-Regel wie folgt anwenden

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{\ln x}{1/x}}_{\text{Typ }\infty/\infty}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln' x}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0^+}x=0. \tag{19}$$

(c) (2 Punkte)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)} \tag{20}$$

Lösung: Limes vom Typ $0/0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x'}{\ln'(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1/(1+x)}=\lim_{x\to 0}(1+x)=1. \tag{21}$$

(d) (2 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{22}$$

Tipp: Berechnen Sie den Limes des Logarithmus' dieses Ausdrucks und bestimmen Sie daraus den gefragten Grenzwert aufgrund der Stetigkeit des Logarithmus'!

Lösung: Dem Tipp folgend berechnen wir

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]&=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x/n)}{1/n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{-x/(n^2(1+x/n))}{-1/n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}x(1+x/n)=x.\end{aligned} \tag{23}$$

Damit ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]\right\}=\exp x. \tag{24}$$

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/mameth-l3-WS2526/index.html