Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 4

Aufgabe 1: Integration durch Substitution

Berechnen Sie die folgenden Integrale durch geeignete Anwendung der Substitutionsregel:

(a) $\int \mathrm{d}x (2x-1)\exp(x^2-x)$

Lösung: Substituieren wir $u=x^2-x$, folgt $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x(2x-1)$ und damit

$$\int \mathrm{d}x (2x-1)\exp(x^2-x) = \int \mathrm{d}u \exp u = \exp u + C = \exp(x^2-x)+C. \tag{1}$$

(b) $\int \mathrm{d}x \ln x/x$

Lösung: Substituieren wir $u = \ln x$, folgt $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$ und damit

$$\int \mathrm{d}x \ln x/x = \int \mathrm{d}u\, u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C. \tag{2}$$

(c) $\int \mathrm{d}x 1/\sqrt{x^2+1}$, **Tip:** Substuieren Sie $x = \sinh u$

Lösung: Es gilt $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \cosh u$ und damit

$$\int \mathrm{d}x 1/\sqrt{x^2+1} = \int \mathrm{d}u \cosh u \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 u + 1}} = \int \mathrm{d}u = u + C = \operatorname{arsinh} x + C. \tag{3}$$

(d) $\int \mathrm{d}x \tan x$

Lösung: Wegen $\tan x = \sin x/\cos x$ empfiehlt sich offenbar die Substitution $u = \cos x$ und damit $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x \sin x$. Damit folgt

$$\int \mathrm{d}x \tan x = \int \mathrm{d}x \frac{\sin x}{\cos x} = -\int \mathrm{d}u \frac{1}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C. \tag{4}$$

(e) Die obere Halbellipse mit Hauptachsen $a>0$ und $b>0$ ist durch

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \tag{5}$$

mit $x \in [-a,a]$ gegeben. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse.

Tip: Substituieren Sie $x = a\cos\varphi$.

Lösung: Der Flächeninhalt ist offenbar das Doppelte des Flächeninhalts der durch (5) beschriebenen Halbellipse, d.h.

$$A = 2b\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}. \tag{6}$$

Substituieren wir $x = a\cos\varphi$, ist $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\varphi a \sin\varphi$ und das Intervall $x \in [-a,a]$ wird umkehrbar eindeutig auf das Intervall $\varphi \in [0,\pi]$ abgebildet, d.h.

$$A = -2ab\int_{\pi}^{0} \mathrm{d}\varphi \sin\varphi \sqrt{1-\cos^2\varphi} = +2ab\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \sin^2\varphi. \tag{7}$$

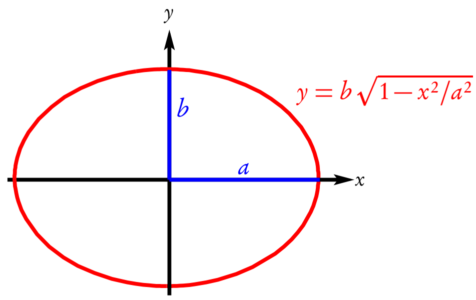
Dabei haben wir im zweiten Schritt die Integrationsgrenzen vertauscht, was den Faktor (-1) kompensiert und benutzt, dass wegen $1-\cos^2\varphi = \sin^2\varphi$ und $\sin\varphi \geq 0$ für $\varphi \in [0,\pi]$ die positive Wurzel korrekt ist, d.h. $\sqrt{1-\cos^2\varphi} = +\sin\varphi$.

Das Integral berechnen wir mit Hilfe der Doppelwinkelformel für den cos:

$$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi \;\Rightarrow\; \sin^2\varphi = \frac{1}{2}[1-\cos(2\varphi)] \tag{8}$$

und damit

$$A = ab\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi[1-\cos(2\varphi)] = ab\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \pi ab. \tag{9}$$



Aufgabe 2: Integration durch partielle Integration

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der partiellen Integration

Lösung: Die Formel für die partielle Integration lautet

$$\int \mathrm{d}x\, u'(x)v(x) = u(x)v(x) - \int \mathrm{d}x\, u(x)v'(x). \tag{10}$$

(a) $\int \mathrm{d}x\, x\sin x$

Lösung: Offenbar ist es hier am einfachsten, $u'(x) = \sin x$ und $v(x) = x$ zu setzen, denn dann ist $u(x) = -\cos x$ und $v'(x) = 1$. Mit (10) folgt dann

$$\int \mathrm{d}x\, x\sin x = -x\cos x - \int \mathrm{d}x(-\cos x) = -x\cos x + \int \cos x = \sin x - x\cos x + C. \tag{11}$$

(b) $\int \mathrm{d}x\, x\exp x$

Lösung: Mit $u'(x) = \exp x$ und $v(x) = x$ folgt $u = \exp x$ und $v'(x) = 1$ und damit

$$\int \mathrm{d}x\, x\exp x = x\exp x - \int \mathrm{d}x \exp x = (x-1)\exp x + C. \tag{12}$$

(c) $\int \mathrm{d}x\, x^n \ln x$ mit $n \in \mathbb{N}$

Lösung: Hier setzen wir $u'(x) = x^n$ und $v(x) = \ln x$. Damit wird $u(x) = x^{n+1}/(n+1)$ und $v'(x) = 1/x$, d.h.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\, x^n \ln x &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \int \mathrm{d}x \frac{1}{n+1}x^n \\ &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}[(n+1)\ln x - 1] + C.\end{aligned} \tag{13}$$

(d) $\int \mathrm{d}x \ln x$, **Tip:** Schreiben Sie den Integranden als $1 \cdot \ln x$ und wenden Sie die offensichtlich einfachste Wahl für u' und v bei der partiellen Integration an.

Lösung: Wir setzen $u'(x) = 1$ und $v(x) = \ln x$. Damit wird $u(x) = x$ und $v'(x) = 1/x$. Folglich ist

$$\int \mathrm{d}x \ln x = x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C. \tag{14}$$

Wir hätten auch einfach in (13) $n = 0$ setzen können.

(e) $\int \mathrm{d}x \sin x \exp x$

Lösung: Hier setzen wir $u'(x) = \exp x$ und $v(x) = \sin x$, d.h. $u(x) = \exp x$ und $v'(x) = \cos x$. Dann wird

$$\int \mathrm{d}x \sin x \exp x = \exp x \sin x - \int \mathrm{d}x \exp x \cos x. \tag{15}$$

Im verbliebenen Integral wenden wir nochmals die partielle Integration an mit $u'(x) = \exp x$, $v(x) = \cos x$. Dann ist $u(x) = \exp x$ und $v'(x) = -\sin x$, d.h.

$$\int \mathrm{d}x \exp x \cos x = \exp x \cos x + \int \mathrm{d}x \exp x \sin x \tag{16}$$

Setzen wir dies in (15) ein, folgt

$$\int \mathrm{d}x \sin x \exp x = \exp x(\sin x - \cos x) - \int \mathrm{d}x \sin x \exp x. \tag{17}$$

Addieren wir hier das Integral und dividieren durch 2, folgt

$$\int \mathrm{d}x \sin x \exp x = \frac{1}{2} \exp x(\sin x - \cos x). \tag{18}$$