

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 14

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Potentialwirbel

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{e}_3 \times \frac{\vec{r}}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (1)$$

- (a) [3 Punkte] Berechnen Sie Rotation und Divergenz des Feldes in kartesischen Koordinaten!
- (b) [2 Punkte] Stellen Sie das Vektorfeld in Standardzylinderkoordinaten (R, φ, z) dar und berechnen Sie abermals Rotation und Divergenz. Dabei dürfen die Formeln in Abschnitt 3.7.4 des Manuskripts verwendet werden.
- (c) [2 Punkte] Existiert ein skalares Potential, so dass

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi = -\text{grad}\Phi \quad (2)$$

gilt?

- (d) [3 Punkte] Berechnen Sie das Wegintegral

$$J = \int_{K_a} d\vec{r} \cdot \vec{V} \quad (3)$$

entlang des Kreises in der x_1 - x_2 -Ebene mit dem Mittelpunkt bei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und Radius a , der durch

$$K_a : \quad \vec{r}(\varphi) = a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (4)$$

parametrisiert sei.

- (e) **Zum Knobeln (3 Zusatzpunkte):** Wie lässt sich das mit dem in Abschnitt 3.11 des Manuskripts besprochenen Lemma von Poincaré vereinbaren? Ist der Satz von Stokes auf das Wegintegral anwendbar?
-