H. van Hees **Wintersemester 2025/2026**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 7

Aufgabe 1 (10 Punkte): Taylor-Reihen

Für die Taylor-Reihe einer in einer Umgebung um $a \in \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt a ist gegeben durch

$$f(x+a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a) x^a. \tag{1}$$

Dabei ist

$$f^{(j)}(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\bigg|_{x=a}. \tag{2}$$

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Taylor-Reihen von cos und sin um den Entwicklungspunkt $a = 0$ und bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie nun nochmals die Taylor-Reihen von cos und sin um einen beliebigen Entwicklungspunkt a und beweisen Sie damit die Additionstheoreme.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Taylor-Reihe für die Exponentialfunktion exp um den Entwicklungspunkt $a = 0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass man die Taylor-Formel (1) symbolisch durch die „Operatorexponentialfunktion“

$$f(x+a) = \exp(a\mathrm{d}_x) f(x) \tag{3}$$

schreiben kann, wobei $\exp(a\mathrm{d}x)$ durch die oben hergeleitete formale Potenzreihe definiert ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte): De L'Hospital-Regeln für Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte von Funktionen mit Hilfe der De L'Hosphital-Regeln

(a) (2 Punkte)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \tag{4}$$

(b) (4 Punkte)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0^+} x \ln x \tag{5}$$

(c) (2 Punkte)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} \tag{6}$$

(d) (2 Punkte)

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{7}$$

Tipp: Berechnen Sie den Limes des Logarithmus' dieses Ausdrucks und bestimmen Sie daraus den gefragten Grenzwert aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion!

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/mameth-l3-WS2526/index.html`