Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 8

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Reziproke Vektoren

Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ drei nicht-koplanare Vektoren im E^3, so dass $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) > 0$ ist. Dann definieren wir drei dazu „**reziproke Vektoren**“ durch

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{V}, \quad \vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{V}, \quad \vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{V}. \tag{1}$$

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $\vec{a}' \cdot \vec{a} = \vec{b}' \cdot \vec{b} = \vec{c}' \cdot \vec{c} = 1$,

Lösung: Mit der Definition der reziproken Vektoren folgt

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{a}' &= \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{V} = 1, \\
\vec{b} \cdot \vec{b}' &= \frac{\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})}{V} = \frac{(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}}{V} = 1, \\
\vec{c} \cdot \vec{c}' = \vec{c}' \cdot \vec{c} &= \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{V} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{V} = 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

(b) (3 Punkte) $\vec{a}' \cdot \vec{b} = \vec{a}' \cdot \vec{c} = \vec{b}' \cdot \vec{a} = \vec{b}' \cdot \vec{c} = \vec{c}' \cdot \vec{a} = \vec{c}' \cdot \vec{b} = 0$ und

Lösung:

$$\begin{aligned}
\vec{a}' \cdot \vec{b} &= \frac{(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}}{V} = 0, \\
\vec{a}' \cdot \vec{c} &= \frac{(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c}}{V} = 0, \\
\vec{b}' \cdot \vec{a} &= \frac{(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{a}}{V} = 0, \\
\vec{b}' \cdot \vec{c} &= \frac{(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}}{V} = 0, \\
\vec{c}' \cdot \vec{a} &= \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}}{V} = 0, \\
\vec{c}' \cdot \vec{b} &= \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}}{V} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

(c) (4 Punkte) $\vec{a}' \cdot (\vec{b}' \times \vec{c}') = 1/V$.

Lösung: Mit der „BAC-CAB-Formel“ und (2) und (3) folgt

$$\vec{a}' \cdot (\vec{b}' \times \vec{c}') = \frac{1}{V} \vec{a}' \cdot [(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{c}'] = \frac{1}{V} \vec{a}' \cdot [\vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{c}') - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{c}')] = \frac{1}{V} \vec{a}' \cdot \vec{a} = \frac{1}{V}. \tag{4}$$

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Gleichung einer Ebene

Es seien P_1, P_2 und P_3 drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte und $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$ die entsprechenden Ortsvektoren. Zeigen Sie, dass dann Ortsvektoren $\vec{r}$ der Ebene durch die Gleichung

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times(\vec{r}_1-\vec{r}_3)]=0 \tag{5}$$

gegeben sind.

Hinweis: Argumentieren Sie, warum die Ebene eindeutig durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}=\vec{r}_1+\lambda_1(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+\lambda_2(\vec{r}_1-\vec{r}_3) \tag{6}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ bestimmt ist, und dass (5) die Existenz von zwei reellen Zahlen λ_1 und λ_2 impliziert, so dass (6) gilt und, dass umgekehrt jeder Vektor der Form (6) auch (5) erfüllt.

Was bedeutet (5) geometrisch?

Lösung: Da P_1, P_2 und P_3 definitionsgemäß auf der zu parametrisierenden Ebene liegen, sind $\overrightarrow{P_2P_1}=(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$ und $\overrightarrow{P_3P_1}=(\vec{r}_1-\vec{r}_3)$ zur Ebene parallele Vektoren. Da voraussetzungsgemäß die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, sind diese beiden Vektoren voneinander linear unabhängig. Damit parametrisiert (6) mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ die Ebene.

Der Vektor $[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times(\vec{r}_1-\vec{r}_3)]$ steht senkrecht auf dieser Ebene, denn für beliebige λ_1, λ_2 impliziert (5). Erfüllt umgekehrt $\vec{r}$ (5), steht $(\vec{r}-\vec{r}_1)$ senkrecht zum Normalenvektor der Ebene, muss also selbst parallel zur Ebene sein und sich somit für geeignete $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ durch (6) ausdrücken lassen.