Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 7

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Vektorprodukt

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (1,2,0)$, $\vec{b} = (2,-1,1)$, $\vec{c} = (-1,-1,3)$.

(a) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b} \times \vec{a}$.

Lösung: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

(b) **[2 Punkte]** Berechnen Sie mittels der Definition des Vektorproduktes den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Berechnen Sie zur Probe ebenfalls den Winkel mittels des Skalarproduktes.

Lösung: Es gilt $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin[\angle(\vec{a},\vec{b})]$ mit $\angle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$. Dabei ist $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{6}$ und $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{30}$. Daraus folgt $\sin[\angle(\vec{a},\vec{b})] = 1$. In dem Fall ist also eindeutig $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/2$.

Bemerkung: Im allgemeinen kann man aus dem Vektorprodukt den Winkel zwischen zwei Vektoren aus dem Vektorprodukt *nicht* eindeutig bestimmen, denn man erhält nur $\sin[\angle(\vec{a},\vec{b})] = |\vec{a} \times \vec{b}|/(ab) \in [0,1]$. Da der Winkel definitionsgemäß in $[0,\pi]$ liegen soll, gibt es außer für $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab$ stets zwei Lösungen für die Gleichung $\sin\alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|/(ab) \in [0,1]$.

Über das **Skalarprodukt** ist hingegen der Winkel immer eindeutig bestimmt:

$$\angle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}\right) \in [0,\pi]. \tag{1}$$

Der Winkel ist natürlich nur dann wohldefiniert, wenn $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$. In unserem Fall ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, woraus sofort wieder $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/2$ folgt.

(c) **[2 Punkte]** Berechnen Sie den Vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Lösung: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(d) **[2 Punkte]** Zeigen Sie durch Berechnung der beiden Seiten, daß die Beziehung

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), \tag{2}$$

die sog. "bac-cab-Regel", erfüllt ist. $\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (-3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, was mit dem Ergebnis von (c) übereinstimmt.

(e) **[2 Punkte]** Beweisen Sie die Beziehung in (d) für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Lösung: Wir führen die Rechnung in Komponenten einfach aus

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3-b_3c_2 \\ b_3c_1-b_1c_3 \\ b_1c_2-b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_2b_2+a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1+a_3c_3)-c_2(a_1b_1+a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1+a_2c_2)-c_3(a_1b_1+a_2b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(\vec{a}\cdot\vec{c}-a_1c_1)-c_1(\vec{a}\cdot\vec{b}-a_1b_1) \\ b_2(\vec{a}\cdot\vec{c}-a_2c_2)-c_2(\vec{a}\cdot\vec{b}-a_2b_2) \\ b_3(\vec{a}\cdot\vec{c}-a_3c_3)-c_3(\vec{a}\cdot\vec{b}-a_3b_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(\vec{a}\cdot\vec{c})-c_1(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\ b_2(\vec{a}\cdot\vec{c})-c_2(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\ b_3(\vec{a}\cdot\vec{c})-c_3(\vec{a}\cdot\vec{b}) \end{pmatrix} \\
&= \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).
\end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

Bemerkung 1: Man kann sich die Regel für das doppelte Kreuzprodukt auch so merken: Es stehen immer die in den Klammern befindlichen Vektoren außen, und zwar der mittlere Faktor zuerst. Die jeweils anderen Vektoren stehen im Skalarprodukt, und die beiden Terme sind voneinander zu subtrahieren.

Bemerkung 2: Diese Merkregel gilt auch für den alternativen Fall, wenn die beiden ersten Vektoren zuerst multipliziert werden:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}). \tag{3}$$

Das Vektorprodukt ist also **nicht assoziativ!**

Bemerkung 3: Für das Vektorprodukt gilt die **Jacobi-Identität**

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 0. \tag{4}$$

Das zeigt man durch zyklische Vertauschung der Vektoren auf beiden Seiten der „bac-cab-Regel“ (1) und Addition der entstehen Gleichungen. Durch das Vektorprodukt wird der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ zu einer sogenannten **Lie-Algebra** erweitert.

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Kronecker-Symbol

Die Indizes i, j und k können jeweils die Werte 1,2 oder 3 annehmen. Das Kronecker-Symbol ist definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i=j, \\ 0 & \text{falls} \quad i\neq j. \end{cases}$$

Vereinfachen Sie, soweit wie möglich, folgende Ausdrücke:

(a) $\sum_{i,j=1}^{3}(a_i b_j \delta_{ij})$,

Lösung: $\sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \vec{a}\cdot\vec{b}$.

(b) $\sum_{i,j=1}^{3}(a_i b_j \delta_{i1}\delta_{ij})$,

Lösung: $\sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \delta_{i1}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \delta_{i1} = a_1 b_1$.

(c) $\sum_{i,j,k=1}^{3}(a_i b_j c_k \delta_{i2}\delta_{jk})$

Lösung: $\sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j c_k \delta_{jk}\delta_{i2} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j c_j \delta_{i2} = a_2 \vec{b}\cdot\vec{c}$.

Aufgabe 3 [10 Punkte]: Levi-Civita-Symbol 1

Im folgenden können alle Indizes jeweils die Werte 1, 2 oder 3 annehmen. Das Levi-Civita-Symbol ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad (i,j,k) \quad \text{gerade Permutation von} \quad (1,2,3), \\ -1 & \text{falls} \quad (i,j,k) \quad \text{ungerade Permutation von} \quad (1,2,3), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dazu äquivalent ist die Definition, daß $\epsilon_{123} = 1$ ist und ansonsten ϵ_{ijk} total antisymmetrisch unter Indexvertauschungen ist. Zeigen Sie (durch Nachdenken oder explizit), daß die folgenden Formeln gelten **[(a) 8 Punkte, (b) 2 Punkte]**:

(a) $\sum_{k=1}^{3}(\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}) = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$,

Lösung:

Lösungsweg 1: Die gesuchte Summe $\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}$ kann offenbar nur dann von 0 verschieden sein, wenn $i \neq j$ und zugleich entweder $i = l$ und $j = m$ oder $i = m$ und $j = l$ ist. In beiden Fällen ist nur der Term in der Summe von 0 verschieden, für den der Summationsindex k verschieden von den beiden anderen Indizes ist. Im ersten Fall sind beide Levita-Civita-Symbole beide identisch ± 1, so daß die Summe $+1$ wird. Im zweiten Fall sind die beiden Levi-Civita-Symbole von entgegengesetztem Vorzeichen, und die Summe wird -1. Dies drückt man wie angegeben mit den Kronecker-Symbolen aus:

$$\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \tag{5}$$

Lösungsweg 2: In der Vorlesung haben wir das Levi-Civitasymbol durch

$$\epsilon_{ijk} = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j)\cdot\vec{e}_k \tag{6}$$

definiert, wobei $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ein rechtshändiges kartesisches Basissytem sind. Für jeden Vektor gilt

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i(\vec{e}_i \cdot \vec{v}) \tag{7}$$

und für zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i = \sum_{i=1}^{3} (\vec{v} \cdot \vec{e}_i)(\vec{e}_i \cdot \vec{w}). \tag{8}$$

Damit ist

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \sum_{k=1}^{3} [(\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k][\vec{e}_k \cdot (\vec{e}_l \times \vec{e}_m)] \stackrel{(8)}{=} (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_l \times \vec{e}_m). \tag{9}$$

Nun verwenden wir die Regel, dass man in einem Spatprodukt „Punkt und Kreuz vertauschen“ darf, d.h.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \tag{10}$$

Diese Formel wenden wir in (9) mit $\vec{a} = \vec{e}_i$, $\vec{b} = \vec{e}_j$ und $\vec{c} = \vec{e}_l \times \vec{e}_m$ an. Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} &= \vec{e}_i \cdot [\vec{e}_j \times (\vec{e}_l \times \vec{e}_m)] \\ &\stackrel{(2)}{=} \vec{e}_i \cdot [\vec{e}_l (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_m) - \vec{e}_m (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_l)] \\ &= \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}, \end{aligned} \tag{11}$$

und das war zu zeigen. Dabei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass die $\vec{e}_j$ ein kartesisches Koordinatensystem bilden, d.h. dass $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \delta_{jk}$ gilt.

(b) $\displaystyle\sum_{j,k=1}^{3} (\epsilon_{ijk} \epsilon_{mjk}) = 2\delta_{im}$.

Wegen $\epsilon_{klm} = -\epsilon_{lkm} = \epsilon_{lmk}$ kann man (5) mit entsprechend umbenannten Indizes auch in der Form

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mlk} = \delta_{im} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jm} \tag{12}$$

schreiben. Setzen wir in dieser Gleichung $l = j$ und summieren noch zusätzlich über j, folgt daraus

$$\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mjk} = \delta_{im} \sum_{j=1}^{3} \delta_{jj} - \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} \delta_{jm} = 3\delta_{im} - \delta_{im} = 2\delta_{im}, \tag{13}$$

und das war zu zeigen.