S. Leupold, H. van Hees **07. Februar 2009**

2. Klausur zur Höheren Quantenmechanik

Die Klausur beinhaltet **6 Aufgaben**. Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden. Es sind außer der anhängenden Formelsammlung keine Hilfsmittel zugelassen!

Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und wiederholen Sie Ihren Namen auf jedem Blatt.

Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 60 Punkte. Das Erreichen von mindestens 50 Punkten wird als 100% gewertet.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $\boldsymbol{\phi}(x)$ ein hermitescher Klein-Gordon-Feldoperator für freie Teilchen mit der Masse m. Der Hamiltonoperator lautet bis auf c-zahlwertige Konstanten

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3\vec{x} \left\{ \dot{\boldsymbol{\phi}}^2(x) + [\vec{\nabla}\boldsymbol{\phi}(x)]^2 + m^2 \boldsymbol{\phi}^2(x) \right\}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Klein-Gordongleichung

$$(\partial_t^2 - \Delta + m^2)\boldsymbol{\phi}(x) = 0, \tag{2}$$

daß $\mathbf{H}$ zeitlich konstant ist, d.h. daß die Energie erhalten ist: $\dot{\mathbf{H}} = 0$.

(b) Berechnen Sie den Kommutator $[\mathbf{H}, \boldsymbol{\phi}(x)]$ und interpretieren Sie das Resultat.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Es seien $\boldsymbol{\phi}_1(x)$ und $\boldsymbol{\phi}_2(x)$ zwei hermitesche Klein-Gordon-Feldoperatoren für freie Teilchen mit derselben Masse $m_1 = m_2 = m$. Es gelten die Kommutatorregeln für Feldoperatoren zu gleichen Zeiten

$$\left[\boldsymbol{\phi}_j(t,\vec{x}\,), \boldsymbol{\phi}_k(t,\vec{y}\,)\right] = \left[\dot{\boldsymbol{\phi}}_j(t,\vec{x}\,), \dot{\boldsymbol{\phi}}_k(t,\vec{y}\,)\right] = 0, \quad \left[\boldsymbol{\phi}_j(t,\vec{x}\,), \dot{\boldsymbol{\phi}}_k(t,\vec{y}\,)\right] = \mathrm{i}\delta_{jk}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}\,) \tag{3}$$

für $j,k \in \{1,2\}$.

Wir betrachten im folgenden den nichthermiteschen Feldoperator

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\boldsymbol{\phi}_1(x) + \mathrm{i}\boldsymbol{\phi}_2(x)\right]. \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{\phi}$ die Klein-Gordongleichung für Teilchen der Masse m

$$(\partial_t^2 - \Delta + m^2)\boldsymbol{\phi}(x) = 0 \tag{5}$$

erfüllt.

(b) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$\left[\boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}\,), \dot{\boldsymbol{\phi}}(t,\vec{y}\,)\right] \quad \text{und} \quad \left[\boldsymbol{\phi}^\dagger(t,\vec{x}\,), \dot{\boldsymbol{\phi}}(t,\vec{y}\,)\right].$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Welche der Matrizen

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{6}$$

sind hermitesch, welche antihermitesch, wenn γ^μ die Diracmatrizen in der Pauli-Diracdarstellung bezeichnen?

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Der Dirac-Feldoperator

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \sum_{s=\pm 1} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}\,(2\pi)^3} \Big[\mathbf{a}(\vec{p},s) u(\vec{p},s) \exp(-\mathrm{i}p\cdot x) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p},s) v(\vec{p},s) \exp(\mathrm{i}p\cdot x) \Big]_{p^0=E_{\vec{p}}} \tag{7}$$

beschreibt Elektronen mit Vernichtungsoperatoren $\mathbf{a}(\vec{p},s)$ und Positronen mit Vernichtungsoperatoren $\mathbf{b}(\vec{p},s)$. Die Spinorwellenfunktionen u und v sind so definiert, daß sie die Orthogonalitätsbedingungen

$$u^\dagger(\vec{p},s) u(\vec{p},s') = v^\dagger(\vec{p},s) v(\vec{p},s') = 2E_{\vec{p}}\,\delta_{ss'}, \quad u^\dagger(\vec{p},s) v(-\vec{p},s') = 0 \tag{8}$$

erfüllen. Der Operator für die elektrische Ladung ist durch

$$\mathbf{Q} = -e \int \mathrm{d}^3\vec{x} : \boldsymbol{\psi}^\dagger(x) \boldsymbol{\psi}(x) : \tag{9}$$

gegeben, wobei e die Elementarladung bezeichnet. Die Doppelpunkte bedeuten die Normalordnung der eingeschlossenen Operatoren.

Drücken Sie $\mathbf{Q}$ mit Hilfe der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus und zeigen Sie damit, daß Elektronen die Ladung $-e$ und Positronen die Ladung $+e$ tragen, wie es sein muß.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $\boldsymbol{\psi}(x)$ der Dirac-Feldoperator für ein Teilchen in einem äußeren elektromagnetischen Feld. Mit dem Viererpotential des elektromagnetischen Feldes A^μ lautet die Feldgleichung

$$(\mathrm{i}\not{\partial} + e\not{A}(x) - m)\,\boldsymbol{\psi}(x) = 0. \tag{10}$$

Der Operator der elektromagnetischen Viererstromdichte lautet bis auf c-zahlwertige Konstanten

$$\mathbf{j}^\mu(x) = \overline{\boldsymbol{\psi}}(x)\gamma^\mu\boldsymbol{\psi}(x). \tag{11}$$

(a) Zeigen Sie, durch Adjunktion der Diracgleichung (10), daß für den Dirac-adjungierten Operator $\overline{\boldsymbol{\psi}}(x) = \boldsymbol{\psi}^\dagger(x)\gamma^0$ die Gleichung

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}(x)\left(-\mathrm{i}\overleftarrow{\not{\partial}} + e\not{A}(x) - m\right) = 0 \tag{12}$$

gilt. Dabei bedeutet der nach links weisende Pfeil über dem Differentialoperator, daß die entsprechenden Ableitungen nach links auf den Dirac-adjungierten Feldoperator $\overline{\boldsymbol{\psi}}$ wirken sollen.

(b) Zeigen Sie, daß der Stromoperator (11) die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu\mathbf{j}^\mu(x) = \partial_t j^0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \tag{13}$$

erfüllt.

(c) Zeigen Sie, daß die Diracgleichung (10) unter lokalen Eichtransformationen

$$\boldsymbol{\psi}(x) \to \boldsymbol{\psi}'(x) = \exp[\mathrm{i}e\alpha(x)]\boldsymbol{\psi}(x), \quad A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \tag{14}$$

invariant ist, d.h. daß

$$(\mathrm{i}\not{\partial} + e\not{A}'(x) - m)\boldsymbol{\psi}'(x) = 0 \tag{15}$$

gilt.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Es sei $\boldsymbol{\phi}(x)$ ein hermitescher Klein-Gordon-Feldoperator für freie Teilchen der Masse m. Berechnen Sie mit Hilfe des Wickschen Theorems das Matrixelement

$$\langle 0\,|\mathcal{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\boldsymbol{\phi}(x_2)\boldsymbol{\phi}(x_3)|\,\vec{p}\rangle\,.$$

Die Zweipunktfunktionen (Propagatoren)

$$\mathrm{i}D(a,b) = \langle 0\,|\mathcal{T}\boldsymbol{\phi}(a)\boldsymbol{\phi}(b)|\,0\rangle \tag{16}$$

brauchen **nicht** explizit ausgerechnet zu werden! Außer diesen Propagatoren sollen im Endresultat keine Operatoren mehr vorkommen.

Formeln

Für beliebige Operatoren **A**, **B** und **C** gilt

$$[\mathbf{AB}, \mathbf{C}] = \mathbf{A}\,[\mathbf{B}, \mathbf{C}]_{\pm} \mp [\mathbf{A}, \mathbf{C}]_{\pm}\,\mathbf{B}. \tag{17}$$

Klein-Gordon-Teilchen

Sei $\boldsymbol{\phi}(x)$ ein hermitescher Klein-Gordon-Feldoperator für freie Teilchen mit Spin 0. Die Teilchen sind notwendig Bosonen. Der Feld-Operator erfüllt die Klein-Gordongleichung

$$(\Box + m^2)\boldsymbol{\phi}(x) = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\boldsymbol{\phi}(x) = (\partial_t^2 - \Delta_{\vec{x}} + m^2)\boldsymbol{\phi}(x) = 0. \tag{18}$$

Die Entwicklung des Feldoperators nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bzgl. Impulseigenzuständen lautet

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}\,(2\pi)^3}}_{:=\int \widetilde{\mathrm{d}^3\vec{p}}} \Big[\mathbf{a}(\vec{p}\,)\exp(-\mathrm{i}p\cdot x) + \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}\,)\exp(\mathrm{i}p\cdot x)\Big]_{p^0=E_{\vec{p}}}, \tag{19}$$

wobei

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} \tag{20}$$

Es gelten die Kommutatorrelationen

$$[\mathbf{a}(\vec{p}\,), \mathbf{a}(\vec{q}\,)] = 0, \quad \Big[\mathbf{a}(\vec{p}\,), \mathbf{a}^\dagger(\vec{q}\,)\Big] = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}}\,\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}\,) \tag{21}$$

und für die Feldoperatoren zu gleichen Zeiten

$$[\boldsymbol{\phi}(t, \vec{x}\,), \boldsymbol{\phi}(t, \vec{y}\,)] = \Big[\dot{\boldsymbol{\phi}}(t, \vec{x}\,), \dot{\boldsymbol{\phi}}(t, \vec{y}\,)\Big] = 0, \quad \Big[\boldsymbol{\phi}(t, \vec{x}\,), \dot{\boldsymbol{\phi}}(t, \vec{y}\,)\Big] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}\,). \tag{22}$$

Der Vakuumzustand ist durch

$$\mathbf{a}(\vec{p}\,)\,|0\rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{p} \in \mathbb{R}^3 \tag{23}$$

definiert. Ein Zustand von N Teilchen mit scharfen Impulsen $\vec{p}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ ist durch

$$\mathbf{a}^\dagger(\vec{p}_1)\mathbf{a}^\dagger(\vec{p}_2)\cdots\mathbf{a}^\dagger(\vec{p}_N)\,|0\rangle \tag{24}$$

gegeben. Einteilchenimpulseigenzustände sind wie folgt normiert

$$\langle \vec{p}\,|\,\vec{q}\,\rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}}\,\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}\,). \tag{25}$$

Dirac-Teilchen

Sei $\boldsymbol{\psi}(x)$ ein Diracfeld für freie Teilchen mit Spin 1/2. Diese Teilchen sind notwendig Fermionen. Der Feld-Operator erfüllt die Diracgleichung

$$(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\boldsymbol{\psi}(x). \tag{26}$$

Dabei ist für einen beliebigen Vierervektor a

$$\not{a} = a_\mu \gamma^\mu = a^0 \gamma^0 - \vec{a}\vec{\gamma} \tag{27}$$

mit den γ-Matrizen γ^μ. Für den Ableitungsoperator gilt

$$\not{\partial} = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \vec{\gamma}\,\vec{\nabla}. \tag{28}$$

Diese komplexen 4×4-Matrizen besitzen die Eigenschaften

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \tag{29}$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \tag{30}$$

Eine explizite Form ist die Dirac-Pauli-Darstellung mit komplexen 4×4-Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Dabei sind

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

die Paulischen Spinmatrizen.

Die Entwicklung des Feldoperators nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bzgl. Impulseigenzuständen lautet

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \sum_{s=\pm 1} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}\,(2\pi)^3} \Big[\mathbf{a}(\vec{p},s)u(\vec{p},s)\exp(-\mathrm{i}p \cdot x) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s)\exp(\mathrm{i}p \cdot x)\Big]_{p^0=E_{\vec{p}}}, \tag{33}$$

wobei die Diracspinoren u und v die Orthogonalitätsrelationen

$$u^\dagger(\vec{p},s)u(\vec{p},s') = u^\dagger(\vec{p},s)u(\vec{p},s') = 2E_{\vec{p}}\,\delta_{ss'}, \quad u^\dagger(\vec{p},s)v(-\vec{p},s') = 0, \tag{34}$$

wobei auf das Argument $-\vec{p}$ in v in der letzten Gleichung zu achten ist! Für einen Diracspinor oder einen Diracfeldoperator wird der Dirac-adjungierte Spinor bzw. Feldoperator durch

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}(x) = \boldsymbol{\psi}^\dagger(x)\gamma^0 \tag{35}$$

definiert. Es gelten die Antikommutatorrelationen

$$\{\mathbf{a}(\vec{p},s), \mathbf{a}(\vec{q},s')\} = \{\mathbf{b}(\vec{p},s), \mathbf{b}(\vec{q},s')\} = 0, \tag{36}$$

$$\{\mathbf{a}(\vec{p},s), \mathbf{b}(\vec{q},s')\} = \left\{\mathbf{a}(\vec{p},s), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q},s')\right\} = 0, \tag{37}$$

$$\left\{\mathbf{a}(\vec{p},s), \mathbf{a}^\dagger(\vec{q},s')\right\} = \left\{\mathbf{b}(\vec{p},s), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q},s')\right\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})2E_{\vec{p}}\,\delta_{ss'}, \tag{38}$$

und für die Feldoperatoren zu gleichen Zeiten

$$\{\boldsymbol{\psi}_a(t,\vec{x}\,), \boldsymbol{\psi}_b(t,\vec{y}\,)\} = 0, \quad \left\{\boldsymbol{\psi}_a(t,\vec{x}\,), \boldsymbol{\psi}_b^\dagger(t,\vec{y}\,)\right\} = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}\,)\delta_{ab}, \tag{39}$$

wobei die Indizes $a, b \in \{1, \dots, 4\}$ die Diracspinorkomponenten durchnumerieren. Der Vakuumzustand ist durch

$$\mathbf{a}(\vec{p}, s)\,|0\rangle = \mathbf{b}(\vec{p}, s)\,|0\rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{p} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } s \in \{-1, 1\} \tag{40}$$

definiert. Ein Zustand von N Teilchen mit scharfen Impulsen $\vec{p}_j$ und Spinprojektionen s_j und ($j \in \{1, 2, \dots, N\}$) und N' Antiteilchen mit scharfen Impulsen $\vec{q}_k$ und Spinprojektionen s'_k ($k \in \{1, 2, \dots, N'\}$ ist durch

$$\mathbf{a}^\dagger(\vec{p}_1, s_1)\mathbf{a}^\dagger(\vec{p}_2, s_2)\cdots\mathbf{a}^\dagger(\vec{p}_N, s_N)\mathbf{b}^\dagger(\vec{q}_1, s'_1)\mathbf{b}^\dagger(\vec{q}_2, s'_2)\cdots\mathbf{b}^\dagger(\vec{q}_{N'}, s'_{N'})\,|0\rangle \tag{41}$$

gegeben. Einteilchenimpulseigenzustände sind wie folgt normiert

$$\langle\vec{p}\,|\,\vec{q}\rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}}\,\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \tag{42}$$

Zeit- und Normalordnung

Bei zeitgeordneten Produkten von beliebigen Feldoperatoren $\boldsymbol{\phi}(x_k)$

$$\mathcal{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\boldsymbol{\phi}(x_2)\dots\boldsymbol{\phi}(x_n) \tag{43}$$

werden die Feldoperatoren in die Ordnung gebracht, so daß die Zeitargumente von rechts nach links ansteigen. Bei fermionischen Operatoren wird der zeitgeordnete Ausdruck zusätzlich mit dem Vorzeichen der Permutation versehen, die notwendig ist, um die Operatoren von der ursprünglichen Anordnung in die zeitgeordnete Form zu bringen.

Das normalgeordnete Produkt von beliebigen Feldoperatoren

$$:\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n): \tag{44}$$

wird über die Entwicklung der Feldoperatoren nach Impulseigenmoden (wie in Gln. (19) für Klein-Gordon- und in (33) für Diracfelder angegeben) definiert. In dieser Entwicklung werden alle Erzeugungsoperatoren nach links und alle Vernichtungsoperatoren nach rechts gebracht. Bei fermionischen Feldern wird der normalgeordnete zusätzlich mit dem Vorzeichen der Permutation versehen, die notwendig ist, um die Operatoren von der ursprünglichen Anordnung in die normalgeordnete Form zu bringen.

Das Wicksche Theorem

Für ein zeitgeordnetes Produkt von Feldoperatoren gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n) &= :\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n): \\
&\quad + \langle 0\,|\mathcal{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\boldsymbol{\phi}(x_2)|\,0\rangle :\boldsymbol{\phi}(x_3)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n): + \text{Permutationen} \\
&\quad + \langle 0\,|\mathcal{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\boldsymbol{\phi}(x_2)|\,0\rangle\,\langle 0\,|\mathcal{T}\boldsymbol{\phi}(x_3)\boldsymbol{\phi}(x_4)|\,0\rangle :\boldsymbol{\phi}(x_5)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n): + \text{Permutationen} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \begin{cases} \langle 0\,|\mathcal{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\boldsymbol{\phi}(x_2)|\,0\rangle\cdots\langle 0\,|\mathcal{T}\boldsymbol{\phi}(x_{n-1})\boldsymbol{\phi}(x_n)|\,0\rangle + \text{ Perm. falls } n \text{ gerade} \\ \langle 0\,|\mathcal{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\boldsymbol{\phi}(x_2)|\,0\rangle\cdots\langle 0\,|\mathcal{T}\boldsymbol{\phi}(x_{n-2})\boldsymbol{\phi}(x_{n-1})|\,0\rangle\,\boldsymbol{\phi}(x_n) + \text{ Perm. falls } n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned} \tag{45}$$