**S. Leupold, H. van Hees** **13. Dezember 2008**

# 1. Klausur zur Höheren Quantenmechanik

| | |
|---|---|
| Nachname: | |
| Vorname: | |
| Matrikelnummer: | |

**Hinweise:**

Die Klausur beinhaltet **5 Aufgaben**. Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden. Es sind außer dem anhängenden Formelblatt keine Hilfsmittel zugelassen!

Beschriften Sie das Deckblatt gut leserlich mit Namen und Matrikelnummer. Wiederholen Sie Ihren Namen auf jedem Blatt.

Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 60 Punkte. Das Erreichen von mindestens 50 Punkten wird als 100% gewertet.

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Multiple choice: Kreuzen Sie die jeweils richtigen Antworten an.

(a) Welche Zweiteilchenwellenfunktion ist korrekt für ununterscheidbare **Fermionen** mit Spin $s = 1/2$ (Elektronen)? Im folgenden sind $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ die Eigenvektoren zu $\mathbf{s}_z$ zu den Eigenwerten $\hbar/2$ bzw. $-\hbar/2$.

- ☐ $|\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\rangle = N \sin[\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]\ (|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2)$
- ☐ $|\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\rangle = N \sin[\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]\ (|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2)$
- ☐ $|\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\rangle = N \cos[\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]\ (|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2)$

(b) Es sei $\mathbf{A}$ ein hermitescher Operator. Welche der folgenden Operatoren sind unitär? Es können mehrere Antworten korrekt sein!

- ☐ $\exp(\mathrm{i}\mathbf{A})$
- ☐ $\exp(\mathbf{A})$
- ☐ $\frac{1+\mathbf{A}}{1-\mathbf{A}}$
- ☐ $\frac{1+\mathrm{i}\mathbf{A}}{1-\mathrm{i}\mathbf{A}}$

(c) Es sei $\boldsymbol{\phi}(\vec{r})$ ein Vernichtungsoperator für Teilchen mit Spin 0 und $|\vec{r}\rangle$ die dazugehörigen Einteilchen-Ortseigenvektoren. Welche der folgenden Formeln ist richtig?

$$\boldsymbol{\phi}(\vec{r})\,|\vec{r}\,'\rangle = 0 \begin{cases} \text{für alle } \vec{r}\,' & \square \\ \text{für } \vec{r}\,' \neq \vec{r} & \square \end{cases}$$

(d) Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ kommutierende Operatoren, d.h. es gelte $[\mathbf{A},\mathbf{B}]=0$. Welche der folgenden Formeln ist korrekt?

$$[\mathbf{AB},\mathbf{A}+41\mathbf{B}] = \begin{cases} 41\mathbf{AB} & \square \\ 0 & \square \\ 42\hbar & \square \end{cases}$$

---

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Der Zeitentwicklungsoperator für Zustände im Schrödingerbild genügt der Differentialgleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}(t,t') = \mathbf{H}(t)\mathbf{U}(t,t'), \tag{1}$$

wobei $\mathbf{H}(t)$ der Hamiltonoperator des Systems ist. Er besitzt die Eigenschaften

$$\mathbf{U}(t,t')\mathbf{U}(t',t'') = \mathbf{U}(t,t''), \tag{2}$$
$$\mathbf{U}(t,t) = \mathbb{1}, \tag{3}$$
$$\mathbf{U}(t,t')\mathbf{U}^\dagger(t,t') = \mathbb{1}. \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie, daß für einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator $\mathbf{H}(t)=\mathbf{H}_0$ der Ausdruck

$$\mathbf{U}(t,t') = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}_0(t-t')\right] \tag{5}$$

die Differentialgleichung (1) löst. Beweisen Sie dazu aus der Definition der Exponentialfunktion für Operatoren

$$\exp\mathbf{A} = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{A}^n, \tag{6}$$

daß

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}_0(t-t')\right] = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}_0\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}_0(t-t')\right] \tag{7}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, daß der Operator (5) die Eigenschaft (2) erfüllt. Sie dürfen dazu **ohne Beweis** verwenden, daß $\exp(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B})$ gilt, **wenn** $[\mathbf{A},\mathbf{B}]=0$ ist.

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von (6), daß der Operator (5) die Eigenschaft (3) erfüllt.

(d) Zeigen Sie, daß der Operator (5) die Eigenschaft (4) erfüllt.

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Es seien $\mathbf{a}_n$ ($n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$) fermionische Vernichtungsoperatoren bzgl. irgendeiner diskreten Einteilchenorthonormalbasis $|n\rangle$, die die üblichen Antikommutatorrelationen

$$[\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l]_+ = 0, \quad \left[\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l^\dagger\right]_+ = \delta_{kl} \tag{8}$$

erfüllen. Es mögen neue Operatoren

$$\mathbf{b}_k = \sum_{k'} (U_{kk'} \mathbf{a}_{k'} + V_{kk'} \mathbf{a}_{k'}^\dagger) \tag{9}$$

mit $U_{kk'}, V_{kk'} \in \mathbb{C}$ definiert werden. Zeigen Sie, daß die $\mathbf{b}_k$ wieder dieselben „kanonischen Vertauschungsrelationen" für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$[\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_l]_+ = 0, \quad \left[\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_l^\dagger\right]_+ = \delta_{kl} \tag{10}$$

erfüllen, wenn für die Matrizen $\hat{U}$ und $\hat{V}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\hat{U}\hat{V}^T + \hat{V}\hat{U}^T = 0, \quad \hat{U}\hat{U}^\dagger + \hat{V}\hat{V}^\dagger = \mathbb{1}. \tag{11}$$

---

**Aufgabe 4 (15 Punkte)**

Wir betrachten nun ein System spinloser ununterscheidbarer Bosonen. Es sei $\boldsymbol{\phi}(\vec{r})$ der entsprechende Vernichtungsoperator bzgl. der Einteilchen-Ortseigenbasis $|\vec{r}\rangle$. Wir betrachten nun den Operator

$$\mathbf{L}_z = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\; \boldsymbol{\phi}^\dagger(\vec{r})\, \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \boldsymbol{\phi}(\vec{r}) \tag{12}$$

im Fockraum.

Zeigen Sie für den Spezialfall eines Zweiteilchensystems, daß er die $z$-Komponente des Gesamtbahndrehimpulses repräsentiert, indem Sie

$$\mathbf{L}_z \, |\vec{r}_1; \vec{r}_2\rangle = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) |\vec{r}_1; \vec{r}_2\rangle \tag{13}$$

beweisen.

**Hinweis:** Es genügt, die Rechnung zunächst für den Teil

$$\mathbf{L}_z^{(1)} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\; \boldsymbol{\phi}^\dagger(\vec{r})\, x \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{\phi}(\vec{r}) \tag{14}$$

durchzuführen und dann kurz zu argumentieren, warum eine analoge Rechnung für den zweiten Teil schließlich zum Ziel führt.

**Aufgabe 5 (15 Punkte)**

Wir betrachten zwei unabhängige Fermionen mit Spin 1/2.

(a) Der Gesamtspinoperator beider Teilchen ist durch

$$\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{s}}_1 + \vec{\mathbf{s}}_2 = \frac{\hbar}{2}(\vec{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \vec{\boldsymbol{\sigma}}_2) \tag{15}$$

gegeben. Dabei sind sind die $\boldsymbol{\sigma}_{1,2}$ die Paulischen Spinoperatoren für Teilchen 1 bzw. 2. Deren Eigenschaften sind in der Formelsammlung angegeben.

Zeigen Sie, daß

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_1 \vec{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \frac{2}{\hbar^2}\vec{\mathbf{S}}^2 - 3 \tag{16}$$

gilt.

**Hinweis:** Da $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_1$ und $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_2$ auf unterschiedliche Teilchen wirken, gilt $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_1 \vec{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \vec{\boldsymbol{\sigma}}_2 \vec{\boldsymbol{\sigma}}_1$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Gln. (16) und (30-34), daß für die Operatoren

$$\mathbf{P}_A = \frac{1}{4}(1 - \vec{\boldsymbol{\sigma}}_1 \vec{\boldsymbol{\sigma}}_2), \quad \mathbf{P}_S = \frac{1}{4}(3 + \vec{\boldsymbol{\sigma}}_1 \vec{\boldsymbol{\sigma}}_2) \tag{17}$$

folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A \left|\chi_A\right\rangle &= \left|\chi_A\right\rangle, \quad \mathbf{P}_A \left|\chi_S, \Sigma\right\rangle = 0, \\ \mathbf{P}_S \left|\chi_A\right\rangle &= 0, \quad \mathbf{P}_S \left|\chi_S, \Sigma\right\rangle = \left|\chi_S, \Sigma\right\rangle \end{aligned} \tag{18}$$

(für alle $\Sigma \in \{-1, 0, 1\}$).

(c) Begründen Sie aus Gl. (18) **kurz**, warum $\mathbf{P}_A$ und $\mathbf{P}_S$ Projektoren auf die antisymmetrisierten bzw. symmetrisierten Gesamtspinzustände sind, d.h. warum die folgenden Beziehungen gelten:

$$\mathbf{P}_S^2 = \mathbf{P}_S, \quad \mathbf{P}_A^2 = \mathbf{P}_A, \quad \mathbf{P}_S \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A \mathbf{P}_S = 0, \quad \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_A = 1. \tag{19}$$

(d) Welchen Einschränkungen sind die durch

$$\left|\Psi_{S,\Sigma}(\vec{r}_1; \vec{r}_2)\right\rangle = F_{S,\Sigma}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \left|\chi_S, \Sigma\right\rangle \tag{20}$$

$$\left|\Psi_A(\vec{r}_1; \vec{r}_2)\right\rangle = F_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \left|\chi_A\right\rangle \tag{21}$$

definierten Ortswellenfunktionen $F_{S,\Sigma}$ und $F_A$ aufgrund der Fermioneneigenschaften der beiden Teilchen unterworfen?

# Formeln

Kommutator- und Antikommutatorrelationen für bosonische (oberes Vorzeichen) und fermionische Feldoperatoren lauten

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\phi}(\vec{r}), \boldsymbol{\phi}(\vec{r}\,')]_\mp &= 0, \\ \left[\boldsymbol{\phi}^\dagger(\vec{r}), \boldsymbol{\phi}^\dagger(\vec{r}\,')\right]_\mp &= 0, \\ \left[\boldsymbol{\phi}(\vec{r}), \boldsymbol{\phi}^\dagger(\vec{r}\,')\right]_\mp &= \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}\,'). \end{aligned} \tag{22}$$

Dabei ist $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Ein vollständig symmetrisierter bzw. antisymmetrisierter $N$-Teilchen-Produktzustand ist durch

$$|\vec{r}_1; \ldots; \vec{r}_N\rangle = \boldsymbol{\phi}^\dagger(\vec{r}_1)\boldsymbol{\phi}^\dagger(\vec{r}_2)\cdots\boldsymbol{\phi}^\dagger(\vec{r}_N)\,|0\rangle \tag{23}$$

gegeben, wobei $|0\rangle$ der Vakuumstand ist, für den gilt

$$\boldsymbol{\phi}(\vec{r})\,|0\rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{r} \in \mathbb{R}^3. \tag{24}$$

Für beliebige Operatoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ gilt

$$[\mathbf{AB}, \mathbf{C}]_- = \mathbf{A}\,[\mathbf{B}, \mathbf{C}]_\mp \pm [\mathbf{A}, \mathbf{C}]_\mp\,\mathbf{B}. \tag{25}$$

Für Teilchen mit Spin $s = 1/2$ bilden die Eigenzustände von $\mathbf{s}_z$ ein vollständiges Orthonormalsystem im zweidimensionalen Spinraum. Es gilt

$$\vec{\mathbf{s}}^2\,|\sigma\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\,|\sigma\rangle\,, \quad \mathbf{s}_z\,|\sigma\rangle = \hbar\sigma\,|\sigma\rangle \tag{26}$$

mit $\sigma \in \{-1/2, +1/2\}$. Wir bezeichnen die Eigenvektoren auch wie folgt

$$|\uparrow\rangle = |\sigma = 1/2\rangle\,, \quad |\downarrow\rangle = |\sigma = -1/2\rangle\,. \tag{27}$$

Die Paulischen Spinoperatoren sind durch

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{2}{\hbar}\vec{\mathbf{s}} \tag{28}$$

definiert. Sie erfüllen die Relationen

$$[\boldsymbol{\sigma}_a, \boldsymbol{\sigma}_b]_- = 2\mathrm{i}\sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}\boldsymbol{\sigma}_c, \quad [\boldsymbol{\sigma}_a, \boldsymbol{\sigma}_b]_+ = 2\delta_{ab}, \quad \vec{\boldsymbol{\sigma}}^2 = 3. \tag{29}$$

Die vier Basis-Spinzustände für zwei Teilchen mit jeweils Spin 1/2 können in einen antisymmetrisierten Zustand

$$|\chi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2\right) \tag{30}$$

und drei symmetrisierte Zustände

$$\begin{aligned} |\chi_S, \Sigma = 1\rangle &= |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2\,, \\ |\chi_S, \Sigma = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2\right) \\ |\chi_S, \Sigma = -1\rangle &= |\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 \end{aligned} \tag{31}$$

klassifiziert werden. Sie bilden eine vollständige Basis des Zweiteilchen-Spinraums.
Der Gesamtspin ist durch

$$\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{s}}_1 + \vec{\mathbf{s}}_2 \tag{32}$$

gegeben.
Der antisymmetrisierte Vektor (30) gehört zum Gesamtspin $S = 0$ des Zweiteilchensystems, d.h. es gilt

$$\vec{\mathbf{S}}^2 \left|\chi_A\right\rangle = 0, \quad \mathbf{S}_z \left|\chi_A\right\rangle = 0. \tag{33}$$

Die symmetrisierten Zustände (31) gehören zum Gesamtspin $S = 1$, d.h. es gilt

$$\vec{\mathbf{S}}^2 \left|\chi_S, \Sigma\right\rangle = 2\hbar^2 \left|\chi_A, \Sigma\right\rangle, \quad \mathbf{S}_z \left|\chi_S, \Sigma\right\rangle = \hbar\Sigma \left|\chi_S, \Sigma\right\rangle \tag{34}$$

für $\Sigma \in \{-1, 0, 1\}$.