S. Leupold, H. van Hees **Wintersemester 2008/9**

Übungen zur Höheren Quantenmechanik

Abgabedatum: 25.11.2008

Blatt 5

Aufgabe 1 (Relativ- und Schwerpunktskoordinaten für Zweiteilchensysteme)
Betrachten Sie zwei Teilchen mit dem Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = \frac{\vec{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} + V(|\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2|). \tag{1}$$

(a) Drücken Sie den Hamiltonoperator durch die Schwerpunkts- und Relativkoordinaten und -impulse aus, wobei mit $M = m_1 + m_2$

$$\vec{\mathbf{R}} = \frac{m_1\vec{\mathbf{x}}_1 + m_2\vec{\mathbf{x}}_2}{M}, \qquad \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2, \tag{2}$$

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2, \qquad \vec{\mathbf{p}} = \frac{1}{M}(m_2\vec{\mathbf{p}}_1 - m_1\vec{\mathbf{p}}_2) \tag{3}$$

die betreffenden Operatoren sind.

(b) Zeigen Sie weiter, daß $\vec{\mathbf{R}}$ und $\vec{\mathbf{P}}$ sowie $\vec{\mathbf{r}}$ und $\vec{\mathbf{p}}$ jeweils die kanonischen Kommutatorrelationen erfüllen und ansonsten kommutieren:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_j, \mathbf{R}_k] = [\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_k] = [\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k] = \left[\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k\right] &= 0, \\ [\mathbf{R}_j, \mathbf{P}_k] = [\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_k] &= \mathrm{i}\hbar\delta_{jk}, \\ [\mathbf{r}_j, \mathbf{R}_k] = \left[\mathbf{p}_j, \mathbf{P}_k\right] = [\mathbf{r}_j, \mathbf{P}_k] = [\mathbf{R}_j, \mathbf{p}_k] &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

(c) Wie lauten aufgrund dieser Kommutatorrelationen die Ortsdarstellung für Schwerpunkts- und Relativkoordinaten und -impulse und des Hamiltonoperators?

(d) Zeigen Sie, daß die Energieeigenzustände des Zweiteilchensystems außer durch den Energieeigenwert vollständig durch die Eigenwerte des Schwerpunktsimpulses, die Relativbahndrehimpulsbetragsquantenzahl und die Eigenwerte der z-Komponente des Relativbahndrehimpulses

$$\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \tag{5}$$

charakterisiert werden können und daß die zugehörigen Wellenfunktionen wie folgt in Schwerpunkts- und Relativanteil (und der letztere in Drehimpuls und Radialanteil) faktorisieren

$$\Psi_{\vec{P};E_n,l,m}(\vec{R}, \vec{r}) = \mathcal{N} \exp\left(\frac{\mathrm{i}\vec{R}\vec{P}}{\hbar}\right) R_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \tag{6}$$

wobei $(r = |\vec{r}|, \vartheta, \varphi)$ die üblichen Kugelkoordinaten für die Relativkoordinate bezeichnen; l und m sind die Bahndrehimpulsquantenzahlen (die Eigenwerte von $\vec{\mathbf{l}}^2$ sind $l(l+1)\hbar^2$, die von $\mathbf{l}_z$ sind $m\hbar$ mit $l \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $m \in \{\pm l, \pm(l-1), \ldots 0\}$). $\mathcal{N}$ ist ein geeigneter Normierungsfaktor. Welche Gleichung ist zur Bestimmung von R_{nl} zu lösen?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, daß der Hamiltonoperator für die Relativbewegung wie folgt in der Ortsdarstellung in Kugelkoordinaten mit Hilfe des Drehimpulses ausgedrückt werden kann

$$\mathbf{H}_{\text{rel}}\psi_{\text{rel}}(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[r\psi(r, \vartheta, \varphi)\right] + \frac{1}{2\mu r^2}\vec{\mathbf{l}}^2\psi(r, \vartheta, \varphi) + V(r)\psi(r, \vartheta, \varphi), \tag{7}$$

wobei $\mu = m_1 m_2 / M$ die reduzierte Masse ist. Die explizite Form von $\vec{\mathbf{l}}^2$ als Differentialoperator ist für unsere Aufgabenstellung nicht wichtig.

(e) Nehmen Sie nun weiter an, die Teilchen seien Elektronen, also identische Fermionen mit Spin 1/2. Dann sind die Energieeigenzustände zusätzlich durch Eigenzustände der z-Komponente des Gesamtspins $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{s}}_1 + \vec{\mathbf{s}}_2$ bestimmt. Diese sind durch die antisymmetrisierten bzw. symmetrisierten normierten Spin-Produktzustände

$$\begin{aligned}
|S = 0, S_z = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|s_{1z} = \hbar/2, s_{2z} = -\hbar/2\rangle - |s_{1z} = -\hbar/2, s_{2z} = \hbar/2\rangle), \\
|S = 1, S_z = \pm\hbar\rangle &= |s_{1z} = \pm\hbar/2, s_{2z} = \pm\hbar/2\rangle\,, \\
|S = 1, S_z = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|s_{1z} = \hbar/2, s_{2z} = -\hbar/2\rangle + |s_{1z} = -\hbar/2, s_{2z} = \hbar/2\rangle)
\end{aligned} \tag{8}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß dies (wie durch die Benennung der Vektoren angedeutet) der erste Vektor zum Gesamtspin 0 und die drei übrigen Vektoren in der zum Gesamtspin 1 gehören.

Hinweis: Berechnen Sie $\vec{\mathbf{S}}^2\,|S, S_z\rangle$ für die vier Gesamtspineigenvektoren (8) mit Hilfe der Relation

$$\vec{\mathbf{S}}^{\,2} = \vec{\mathbf{s}}_1^2 + \vec{\mathbf{s}}_2^2 + \mathbf{s}_{1-}\mathbf{s}_{2+} + \mathbf{s}_{1+}\mathbf{s}_{2-} + 2\mathbf{s}_{1z}\mathbf{s}_{2z}, \tag{9}$$

wobei die „Leiteroperatoren“

$$\mathbf{s}_{\pm} = \mathbf{s}_x \pm \mathrm{i}\mathbf{s}_y \tag{10}$$

der Einteilchenspins wie folgt auf die betreffenden Eigenzustände wirken

$$\begin{aligned}
&\mathbf{s}_-\,|s_z = \hbar/2\rangle = \hbar\,|s_z = -\hbar/2\rangle\,, \quad \mathbf{s}_-\,|s_z = -\hbar/2\rangle = 0, \\
&\mathbf{s}_+\,|s_z = \hbar/2\rangle = 0, \quad \mathbf{s}_+\,|s_z = -\hbar/2\rangle = \hbar\,|s_z = \hbar/2\rangle\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

(f) Da die Elektronen Fermionen sind, müssen die Energieeigenfunktionen vollständig antisymmetrisch unter Vertauschung von Orts- und Spinkoordinaten sein:

$$\Psi(\vec{x}_1, s_{1z}; \vec{x}_2, s_{2z}) = -\Psi(\vec{x}_2, s_{2z}; \vec{x}_1, s_{1z}). \tag{12}$$

Wie ändern sich Schwerpunkts- und Relativkoordinaten unter dieser Vertauschung der beiden Elektronen? Welche Auswahlregeln hinsichtlich der Bahndrehimpulsquantenzahl ergeben sich daraus für die Zustände mit Gesamtspin 0 bzw. 1?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, daß die Relativwellenfunktionen zu gegebenen Bahndrehimpulseigenzuständen sich unter Raumspiegelungen wie folgt verhalten:

$$\psi(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\varphi, \vartheta) \;\Rightarrow\; \psi(-\vec{r}) = (-1)^l\psi(\vec{r}). \tag{13}$$