S. Leupold, H. van Hees **Wintersemester 2008/9**

Übungen zur Höheren Quantenmechanik

Abgabedatum: 11.11.2008

Blatt 3

Aufgabe 1 (Energieeigenwertproblem für den harmonischen Oszillator)
Der Hamiltonoperator für die Bewegung eines Teilchen in einer Raumdimension in einem harmonischen Potential lautet

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}^2. \tag{1}$$

(a) Betrachten Sie den *nicht-hermiteschen* Operator

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\mathbf{x} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\mathbf{p}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, daß der Hamiltonoperator in der Form

$$\mathbf{H} = \hbar\omega\left(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbb{1}\right) \tag{3}$$

geschrieben werden kann.

(b) Zur Lösung des Eigenwertproblems für $\mathbf{H}$ kann man also das Eigenwertproblem für den Operator

$$\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} \tag{4}$$

betrachten. Zeigen Sie, daß dies ein positiv semidefiniter Operator ist, d.h. daß für alle Hilbertraumvektoren $|\psi\rangle$ gilt

$$\langle\psi\,|\mathbf{N}|\,\psi\rangle \geq 0. \tag{5}$$

Was folgt daraus für die Eigenwerte von $\mathbf{N}$?

Hinweis: Setzen Sie dazu einen beliebigen Eigenvektor $|n\rangle$ von $\mathbf{N}$ zum Eigenwert n in (5) ein.

(c) Beweisen Sie die Kommutatorrelation

$$\left[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger\right] = \mathbb{1}, \quad [\mathbf{a}, \mathbf{N}] = \mathbf{a}, \quad \left[\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{N}\right] = -\mathbf{a}^\dagger. \tag{6}$$

Leiten Sie daraus ab, daß $\mathbf{a}\,|n\rangle$ entweder ein Eigenvektor von $\mathbf{N}$ zum Eigenwert $n-1$ oder der Nullvektor sein muß.

Hinweis: Berechnen Sie $\mathbf{Na}\,|n\rangle$ mit Hilfe der geeigneten Kommutatorrelation aus Gl. (6).

Warum folgt daraus zusammen mit der positiven Semidefinitheit von $\mathbf{N}$, daß es wenigstens einen Eigenvektor von $\mathbf{N}$ zum Eigenwert $n = 0$ geben muß? Begründen Sie daraus, daß die Eigenwerte von $\mathbf{N}$ ganzzahlig sein müssen, also $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ sein muß. Die Energieeigenwerte sind damit wegen (3) zu

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

bestimmt.

(d) Zeigen Sie, daß $\mathbf{a}^\dagger |n\rangle$ ein Eigenvektor von $\mathbf{N}$ zum Eigenwert $n + 1$ ist. Wir nehmen ab jetzt an, daß alle Eigenvektoren normiert sind, d.h. daß $\langle n \,|\, n\rangle = 1$ ist. Berechnen Sie dann c_n, so daß

$$\mathbf{a}^\dagger |n\rangle = c_n |n + 1\rangle . \tag{8}$$

Hinweis: c_n ist nur bis auf einen unwesentlichen Phasenfaktor eindeutig bestimmt. Wählen Sie im folgenden $c_n > 0$ reell.

(e) Bestimmen Sie nun den Grundzustand, also den Zustand zum Eigenwert $n = 0$, in der Ortsdarstellung

$$u_0(x) = \langle x \,|\, 0\rangle . \tag{9}$$

Schreiben Sie dazu den Operator $\mathbf{a}$ in der Ortsdarstellung und lösen Sie dann die Differentialgleichung

$$\mathbf{a} u_0(x) = 0. \tag{10}$$

Bestimmen Sie dabei auch die Normierungskonstante von u_0. Begründen Sie aus dieser Rechnung, daß der Grundzustand existiert und eindeutig bestimmt ist!

(f) Berechnen Sie durch wiederholte Anwendung von (8) die übrigen Eigenzustände u_n für $n \geq 1$.

Hinweis: Es genügt zu zeigen, daß die Eigenfunktionen die Form

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n! a}} \mathrm{H}_n\left(\frac{x}{a}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \quad \text{mit} \quad a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \tag{11}$$

besitzen, wobei die **Hermite-Polynome** durch

$$\mathrm{H}_n(\xi) = \exp\left(\frac{\xi^2}{2}\right) \left(\xi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)^n \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \tag{12}$$

definiert sind. Es ist leicht, durch vollständige Induktion zu zeigen, daß sich dies zu

$$\mathrm{H}_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n} \exp(-\xi^2) \tag{13}$$

vereinfachen läßt.