S. Leupold, H. van Hees **Wintersemester 2008/9**

Übungen zur Höheren Quantenmechanik

Abgabedatum: 27.01.2009

Blatt 10

Notation für relativistische Quantenmechanik

Im folgenden verwenden wir in den Übungen „natürliche Einheiten" mit $c = 1$ und $\hbar = 1$. Vierervektoren bezeichnen wir mit einfachen Symbolen, z.B. $x = (x^\mu) = (t, \vec{x})$, während Dreiervektoren mit einem Pfeil bezeichnet werden. Griechische obere oder untere Indizes laufen von 0 bis 3, lateinische von 1 bis 3. Die Minkwoskimetrik definieren wir durch $(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ („Westküstenkonvention"). Lorentztransformationen werden durch Matrixelemente ${\Lambda^\mu}_\nu$ gegeben. Sie erfüllen die Bedingungen

$$ {\Lambda^0}_0 \geq 1, \quad g_{\mu\nu} {\Lambda^\mu}_\rho {\Lambda^\nu}_\sigma = g_{\rho\sigma}, \quad \det({\Lambda^\mu}_\nu) = +1. \tag{1} $$

Dabei wird stillschweigend über gleichnamige Indexpaare, von denen stets ein Index oben und der der andere unten zu stehen kommt, von 0 bis 3 summiert (Einsteinsche Summationskonvention). Invariante Produkte von zwei Vierervektoren x und y werden wie folgt notiert

$$ x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, \tag{2} $$

wobei

$$ \vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \tag{3} $$

das gewöhnliche Euklidische Skalarprodukt von Dreiervektoren bedeutet. Weiter definieren wir für Vierer- bzw. Dreiervektoren

$$ x^2 = x \cdot x, \quad \vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}. \tag{4} $$

Der Punkt im Minkowski- oder euklidischen Produkt kann auch weggelassen werden.

Aufgabe 1 (Lorentzinvarianz)

(a) Zeigen Sie, daß der Ausdruck unter Lorentztransformationen

$$ x \cdot p := g_{\mu\nu} x^\mu p^\nu = x^0 p^0 - \vec{x} \cdot \vec{p} \tag{5} $$

invariant ist.

(b) Zeigen Sie, daß das Integralmaß

$$ \widetilde{\mathrm{d}^3 \vec{p}} := \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}}{2E(\vec{p})} \tag{6} $$

mit $E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ eine Invariante unter Lorentztransformationen ist, indem Sie argumentieren, warum

$$ \mathrm{d}^4 p \, \Theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \tag{7} $$

eine Invariante ist und die p^0-Integration ausführen.

bitte wenden!

Aufgabe 2 (Kommutatorrelationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren)
In der Vorlesung wurden Feldoperatoren durch

$$\boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} \left[\mathbf{a}(\vec{p}) \exp\left(-\mathrm{i}p\cdot x\right) + \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}) \exp\left(+\mathrm{i}p\cdot x\right)\right]_{p^0=E(\vec{p})} \tag{8}$$

nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Impulseigenzustände eines Klein-Gordon-Teilchens zerlegt. Es wurden weiter die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen

$$\left[\boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}), \dot{\boldsymbol{\phi}}(t,\vec{x}\,')\right] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}\,'), \quad \left[\boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}), \boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}\,')\right] = 0, \quad \left[\dot{\boldsymbol{\phi}}(t,\vec{x}), \dot{\boldsymbol{\phi}}(t,\vec{x}\,')\right] = 0 \tag{9}$$

hergeleitet.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung von (8), daß für die Erzeuger und Vernichter die Kommutatorrelation

$$\left[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}\,')\right] = (2\pi)^3\, 2E(\vec{p})\, \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,') \tag{10}$$

folgt.

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, daß der Operator für den Gesamtimpuls durch

$$\vec{\mathbf{P}} = -\int \mathrm{d}^3\vec{x} : \dot{\boldsymbol{\phi}}(t,\vec{x}) \vec{\nabla} \boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}) : \tag{11}$$

gegeben ist, wobei die Doppelpunkte die Normalordnung des Operatorprodukts anzeigen. Zeigen Sie, daß dieser Gesamtimpulsoperator vermöge der Erzeuger und Vernichter durch

$$\vec{\mathbf{P}} = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})}\, \vec{p}\,\mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{a}(\vec{p}) \tag{12}$$

gegeben ist.