Klassische Vektoranalysis

Hendrik van Hees

11. Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Euklidische Vektorräume

Wir wiederholen zunächst einige einfache Begriffe, die aus den Mathematikvorlesungen der ersten beiden Semester bekannt sein sollten. Das dient vor allem dazu, die spezifische Schreibweise zu etablieren, die wir im folgenden stets benutzen wollen. Sie zeichnet sich gegenüber vielen Lehrbüchern (sowohl der Mathematik als auch der Physik) dadurch aus, daß wir immer mit **invarianten Objekten** arbeiten werden, d.h. wir werden stets Vektoren und Tensoren als solche schreiben, also immer die Basen mitnotieren, auch wenn es manchmal als unbequem oder „zu ausführlich" erscheinen mag. Meiner Erfahrung nach ist dieser Vorwurf ungerechtfertigt, und man erspart sich viel Zeit und Mühe, wenn man sich immer klar macht, wie die Basen definiert sind. Freilich fallen dabei von selbst die für konkrete Rechnungen benötigten Formeln für die Komponenten ab.

1.1 Der Begriff des Vektorraums

Ein Vektorraum ist ein geordnetes Paar, bestehend aus einer Menge V und einem Zahlenkörper $\mathbb{K}$, also $(V, \mathbb{K})$. Im folgenden verstehen wir unter $\mathbb{K}$ immer den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Auf diesem Paar werden nun zwei Verknüpfungen definiert, und zwar einmal die **Vektoraddition** und zum anderen die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl aus $\mathbb{K}$, die sog. Skalarmultiplikation.

Diese Verknüpfungen sind im einzelnen wie folgt definiert: Die Vektoraddition bildet eine abelsche Gruppe, deren neutrales Element der Nullvektor ist, d.h. im einzelnen

(A1) Die Vektoraddition ist eine Abbildung $V \times V \rightarrow V$, die wie folgt notiert wird: $\vec{a}, \vec{b} \mapsto \vec{a} + \vec{b}$.

(A2) Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ drei beliebige Vektoren gilt stets das **Assoziativgesetz**: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

A(3) Es existiert ein **neutrales Element** der Addition $0 \in V$, so daß für alle $\vec{a} \in V$ gilt: $\vec{a} + 0 = \vec{a}$.

A(4) Zu jedem Vektor $\vec{a} \in V$ existiert ein **inverses Element** $-\vec{a} \in V$ bzgl. der Addition, so daß $\vec{a} + (-\vec{a}) := \vec{a} - \vec{a} = 0$ gilt.

A(5) Es gilt das **Kommutativgesetz**, d.h. für $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt stets $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Die **Skalarmultiplikation** erfüllt folgende Axiome:

M(1) $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{a} \in V \mapsto \lambda\vec{a} \in V$

M(2) Für $\vec{a}, \vec{b} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

M(3) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $\vec{a} \in V$ gilt $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

M(4) Für alle $\vec{a} \in V$ gilt $0\vec{a} = 0$[1].

Der wichtigste Begriff, den man mit diesem System von mathematischen Objekten konstruieren kann, ist der Begriff der Basis. Dazu definieren wir zunächst eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_j\}_{j=1}^n$ als **linear unabhängig**, wenn die folgende Äquivalenz gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^j \vec{a}_j = 0 \Leftrightarrow \lambda^j = 0 \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.1.1}$$

Dabei sind die λ^j selbstverständlich Zahlen aus dem Skalarenkörper $\mathbb{K}$[2].

Wir bezeichnen weiter eine Menge von Vektoren $\{\vec{b}_j\}_{j=1}^n$ als **Erzeugendensystem**, wenn zu jedem Vektor $\vec{x}$ Zahlen $x^j \in \mathbb{K}$ existieren, so daß

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x^j \vec{b}_j. \tag{1.1.2}$$

Eine **Basis** ist nun ein Erzeugendensystem aus linear unabhängigen Vektoren. Der Leser sollte sich klar machen, daß dann die Zahlen x^j, die Komponenten des Vektors $\vec{x}$ bzgl. der Basis $\{\vec{b}_j\}_{j=1}^d$ durch die Wahl der Basis **eindeutig** bestimmt sind.

Ein Vektorraum, für den eine solche endliche natürliche Zahl d existiert, heißt **endlichdimensionaler Vektorraum**. Wir gehen in diesem Skript stets davon aus, daß der Vektorraum endlichdimensional ist. Seine Dimension bezeichnen wir mit d.

Im folgenden verwenden wir die **Einsteinsche Summationskonvention**, falls wir es nicht anders vereinbaren: Immer wenn ein gleichnamiger Index in einer Formel auftaucht, wobei einer als oberer Index und einer als unterer Index notiert ist, ist über diesen Index von 1 bis d zu summieren, ohne daß wir die Summe explizit anschreiben, d.h. wir können Gleichung (1.1.2) kurz auch in der Gestalt

$$\vec{x} = x^j \vec{b}_j \tag{1.1.3}$$

schreiben.

1.2 Basistransformationen

Nehmen wir nun an, wir hätten zwei Basen $\{\vec{b}_j\}_{j=1}^d$ und $\{\vec{b}'_j\}_{j=1}^d$ gegeben[3]. Da Basen vollständige Erzeugendensysteme sind, gibt es Zahlen ${T^j}_k \in \mathbb{K}$ und ${U^k}_j$, so daß gilt

$$\vec{b}'_k = {T^j}_k \vec{b}_j, \quad \vec{b}_j = {U^k}_j \vec{b}'_k. \tag{1.2.1}$$

setzen wir die zweite in die erste Gleichung ein, so folgt sofort

$$\vec{b}'_k = {T^j}_k {U^l}_j \vec{b}'_l. \tag{1.2.2}$$

[1] Man beachte, daß auf der linken Seite der Gleichung die Null des Zahlenkörpers steht, auf der rechten Seite der Nullvektor. Wir gehen hier und im folgenden davon aus, daß es keine Verwechslungen dieser Symbole geben kann.

[2] Hier und im folgenden bezeichnet in einem Ausdruck der Gestalt λ^j die natürliche Zahl j einen Index, keine Potenz!

[3] Der Leser mache sich klar, daß in einem d-dimensionalen Vektorraum **alle** Basen stets aus genau d linear unabhängigen Vektoren bestehen!

Da die Basisvektoren linear unabhängig sind, folgt daraus sofort, daß

$$T^j{}_k U^l{}_j = \delta^l{}_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l \\ 1 & \text{falls } k = l \end{cases} \tag{1.2.3}$$

sein muß. Faßt man also die $T^j{}_k$ und $U^l{}_j$ als $d \times d$-Matrizen T und U auf, bedeutet (1.2.3), daß $UT = 1$ ist, also U und T zueinander inverse Matrizen sind.

Betrachten wir nun noch die Komponenten eines beliebigen Vektors $\vec{x}$ bzgl. dieser Basen. Offenbar gilt

$$\vec{x} = x^j \vec{b}_j = x^j U^k{}_j \vec{b}'_k = x'^k \vec{b}'_k. \tag{1.2.4}$$

Da die $\vec{b}'_k$ eine Basis bilden, muß also gelten

$$x'^k = U^k{}_j x^j. \tag{1.2.5}$$

Man bezeichnet nun (1.2.1) als **Basistransformation** und sagt, die Basisvektoren transformieren sich **kovariant**. Das Transformationsverhalten der Komponenten eines Vektors $\vec{x}$, welches wir als durch (1.2.5) gegeben bewiesen haben, heißt entsprechend **kontravariant**. Man sagt auch, daß sich die Vektorkomponenten **kontragredient** zu den Basisvektoren transformieren (und umgekehrt).

Es folgt auf genau die gleiche Weise wie die Herleitung von (1.2.5), daß umgekehrt auch gilt

$$x^j = T^j{}_k x'^k. \tag{1.2.6}$$

Aus der Tatsache, daß die T und U inverse Matrizen bilden, folgt, daß (1.2.5) und (1.2.6) miteinander verträglich sind.

Wir wissen nun also, wie sich die Komponenten von Vektoren bzgl. verschiedener Basen ineinander umrechnen lassen, wenn wir nur wissen, wie die eine Basis sich durch die andere ausdrücken läßt. Es ist weiter klar, daß es ausreicht, wenn man nur die $T^j{}_k$ kennt, denn dann folgen wegen (1.2.3) die $U^k{}_j$ durch Matrizeninversion.

1.3 Linearformen

Eine **Linearform** ist eine Abbildung (Funktion) $L : V \to \mathbb{K}$, für welche für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt

$$L(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda L(\vec{a}) + \mu L(\vec{b}). \tag{1.3.1}$$

Daraus folgt sofort, daß es schon genügt, wenn man weiß, auf welche Vektoren L eine beliebige Basis abbildet. Seien nämlich die d Zahlen

$$L_j = L(\vec{b}_j) \in \mathbb{K} \tag{1.3.2}$$

bekannt. Dann folgt eindeutig aus (1.3.1), daß dann jeder Vektor $\vec{x} = x^j \vec{b}_j$ auf

$$L(\vec{x}) = L(x^j \vec{b}_j) = x^j L(\vec{b}_j) = x^j L_j \tag{1.3.3}$$

abgebildet wird. Es genügt also, wenn man beliebige Zahlen L_j vorgibt und $L(\vec{x}) = x^j L_j$ definiert, um eine Linearform zu bestimmen. Umgekehrt folgen die L_j aus einer gegebenen Linearform durch (1.3.2).

Wir bemerken weiter, daß wir Linearformen in natürlicher Weise addieren können. Seien dazu L und M zwei beliebige Linearformen. Dann definieren wir $L + M$ dadurch, daß für jeden Vektor $\vec{x}$ gelten soll $(L + M)(\vec{x}) =$

$L(\vec{x})+M(\vec{x})$. Da L und M Linearformen sind, ist auch $L+M$ wieder eine[4]. Es ist weiter klar, daß aus $L_j = L(\vec{b}_j)$ und $M_j = M(\vec{b}_j)$ folgt, daß $(L+M)_j = (L+M)(\vec{b}_j) = L_j + M_j$ ist.

Wir können weiter die Linearform L mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ multiplizieren, indem wir definieren, daß für jeden Vektor $\vec{x}$ gilt $(\lambda L)(\vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$.

Es ist auch leicht zu zeigen, daß dann die Menge aller Linearformen von V einen Vektorraum bildet, wenn man die Addition und die Multiplikation mit einem Skalar gerade so definiert, wie wir es eben getan haben. Man nennt diesen Vektorraum der Linearformen über dem Vektorraum V den **Dualraum** von V und bezeichnet ihn mit V^*.

Wir zeigen nun, daß dieser Vektorraum wieder d-dimensional ist. Dazu definieren wir die zu $\vec{b}_j$ gehörige **Dualbasis** $\vec{b}^j$ als diejenigen Linearformen, für die gilt

$$\vec{b}^j(\vec{b}_k) = \delta^j{}_k. \tag{1.3.4}$$

Ist dann L eine beliebige Linearform, dann gilt mit $L_j = L(\vec{b}_j)$

$$L = L_j \vec{b}^j. \tag{1.3.5}$$

In der Tat ist ja

$$L(\vec{b}_k) = L_j \vec{b}^j(\vec{b}_k) = L_j \delta^j{}_k = L_k. \tag{1.3.6}$$

Weiter sind die $\vec{b}^j$ auch linear unabhängige Linearformen, denn aus $L = L_k \vec{b}^k = 0$ ergibt sich wegen (1.3.6) eindeutig $L_k = L(\vec{b}_k) = 0$.

Betrachten wir nun das Transformationsverhalten der Dualbasisvektoren $\vec{b}^j$. Dazu müssen wir nur (1.2.1) und die Definition der Dualbasisvektoren benutzen:

$$\vec{b}'^k(\vec{b}'_j) = \delta^k{}_j = \vec{b}'^k(T^l{}_j b_l) = T^l{}_j \vec{b}'^k(\vec{b}_l). \tag{1.3.7}$$

Das bedeutet aber

$$\vec{b}'^k(\vec{b}_l) = U^k{}_l \Rightarrow \vec{b}'^k = U^k{}_l \vec{b}^l, \tag{1.3.8}$$

d.h. die Dualbasisvektoren transformieren sich **kontragredient** zu den Basisvektoren, also **kontravariant** wie die Vektorkomponenten gemäß (1.2.5).

Wir zeigen nun, daß sich entsprechend die Komponenten L_j demgemäß **kovariant** transformieren. In der Tat ist wegen (1.3.8)

$$L = L_k \vec{b}^k = L'_j \vec{b}'^j = L'_j U^j{}_k \vec{b}^k \Rightarrow L_k = U^j{}_k L'_j \Rightarrow L'_j = T^k{}_j L_k. \tag{1.3.9}$$

1.4 Der Bidualraum

Es ist nun nur logisch, daß man auch den Dualraum des Dualraums, den sog. **Bidualraum**, betrachtet, also die Linearformen von Linearformen. Es mag den Leser erfreuen, daß wir sogleich sehen werden, daß wir dadurch nichts wesentlich neues gewinnen, sondern daß der Bidualraum auf „natürliche Art" isomorph zum ursprünglichen Vektorraum ist.

Sei also B^* eine Linearform im Dualraum des Vektorraums, also eine lineare Abbildung $B^* : V^* \to \mathbb{K}$. Es ist klar, daß auch diese Linearformen einen Vektorraum bilden, den wir mit V^{**} bezeichnen.

[4] Der Leser schreibe den sehr kurzen Beweis auf!

Wir wollen nun einen „natürlichen Isomorphismus" vom Vektorraum in den Bidualraum finden, d.h. wir suchen eine lineare Abbildung $A: V \rightarrow V^{**}$, die unabhängig von jeglicher Basiswahl definiert ist. Wir tun dies, indem wir $\vec{B} \mapsto A_{\vec{B}}$ so definieren, daß $A_{\vec{B}}(L) = L(\vec{B})$ für $L \in V^*$ ist. Es ist klar, daß $A_{\vec{B}}$: linear ist, da die L Linearformen sind, d.h. es gilt

$$A_{\lambda\vec{B}+\mu\vec{C}} = \lambda A_{\vec{B}} + \mu A_{\vec{C}} \tag{1.4.1}$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $\vec{B}, \vec{C} \in V$.

Um nun zu zeigen, daß es sich um einen Isomorphismus handelt, müssen wir nur zeigen, daß der Kern der Abbildung A nur den Nullvektor enthält, d.h. daß aus $A_{\vec{B}} = 0$ folgt, daß $\vec{B} = 0$ ist. Das ist aber tatsächlich der Fall, denn $A_{\vec{B}} = 0$ hat zur Folge, daß für eine beliebige Dualbasis $\vec{b}^i$ gilt $A_{\vec{B}}(\vec{b}^i) = \vec{b}^i(\vec{B}) = B^i = 0$, d.h. alle Komponenten von $\vec{B}$ bzgl. der Dualbasis $\vec{b}^i$ verschwinden, womit $\vec{B} = 0$ erwiesen ist. Da der Vektorraum V endlichdimensional ist, ist damit $A: V \rightarrow V^{**}$ schon als Isomorphismus erwiesen. Im folgenden identifizieren wir stets V^{**} mit V in diesem Sinne, d.h. ein jeder Vektor $\vec{v}$ wird auch als Linearform auf V^* aufgefaßt in dem Sinne, daß

$$\vec{v}(L) = L(\vec{v}) \text{ für } L \in V^*. \tag{1.4.2}$$

Es ist klar, daß diese Definition unabhängig von der Basiswahl ist. Es gilt offenbar

$$\vec{v}(L) = v^i L_i, \tag{1.4.3}$$

wobei die v^i die Komponenten von $\vec{v}$ bzgl. einer beliebigen Basis $\vec{b}_i$ und L_i die Komponenten von L bzgl. der dazugehörigen Dualbasis $\vec{b}^i$ sind. Die Unabhängigkeit dieses Ausdrucks von der gewählten Basis folgt auch aus der Tatsache, daß sich die L_i kovariant und die v^i kontravariant transformieren. Dazu müssen wir nur (1.2.5) und (1.3.9) verwenden:

$$v'^i L'_i = U^i{}_j v^j T^k{}_i L_k = \delta^k{}_j v^j L_k = v^j L_j. \tag{1.4.4}$$

1.5 Tensoren

Es liegt nun nahe, sog. **Multilinearformen** zu definieren, d.h. Abbildungen

$$T: \underbrace{V^* \times V^* \times \ldots \times V^*}_{r \text{ mal}} \times \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{s \text{ mal}} \rightarrow \mathbb{K}, \tag{1.5.1}$$

die in jedem Element linear sind. Wir bezeichnen eine solche Abbildung als **Tensor** vom Typ $\binom{r}{s}$.

Ist nun $\vec{b}_j$ wieder eine Basis und $\vec{b}^k$ die dazugehörige Dualbasis, dann ist der Tensor (1.5.1) offenbar durch die d^{r+s} Zahlen

$$T^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} = T(\vec{b}^{k_1} \vec{b}^{k_2} \ldots \vec{b}^{k_r}; \vec{b}_{j_1}, \vec{b}_{j_2}, \ldots, \vec{b}_{j_s}) \tag{1.5.2}$$

vollständig bestimmt. Man rechnet auch sofort nach, daß sich diese **Tensorkomponenten** gemäß ihrer Indexstellung unter Basiswechsel ko- bzw. kontravariant transformieren:

$$T'^{k'_1 k'_2 \ldots k'_r}_{j'_1 j'_2 \cdots j'_s} = T^{j_1}{}_{j'_1} \cdots T^{j_s}{}_{j'_s} U^{k'_1}{}_{k_1} \cdots U^{k'_r}{}_{k_r} T^{k_1, k_2 \ldots k_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}. \tag{1.5.3}$$

Offensichtlich können wir nun aus einem $\binom{r}{s}$- und einem $\binom{r'}{s'}$-Tensor einen $\binom{r+r'}{s+s'}$ Tensor definieren, indem wir deren Werte punktweise multiplizieren. Dies nennen wir das **Tensorprodukt** zweier Tensoren:

$$\begin{aligned} T \otimes S(&L_1, L_2, \ldots, L_r, M_1, M_2, \ldots M_{r'}; \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{s'}) \\ &= T(L_1, L_2, \ldots, L_r; \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_s) S(M_1, M_2, \ldots M_{r'}; \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{s'}). \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Offenbar ist die Basis des $(r+s)$-dimensionalen Vektorraums der $\binom{r}{s}$-Tensoren, auf die sich die Tensorkomponenten (1.5.2) beziehen, durch die **Produktbasis**

$$\vec{b}_{k_1\ldots k_r}^{j_1\ldots j_s} = \vec{b}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \vec{b}_{k_r} \otimes \vec{b}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \vec{b}^{j_s} \tag{1.5.5}$$

gegeben.

Eine weitere basisunabhängige Manipulation ist die **Kontraktion** eines $\binom{s}{r}$-Tensors zu einem $\binom{s-1}{r-1}$-Tensor. Gleichwohl definiert man sie am besten über die Tensorkomponenten bzgl. einer Basis und ihrer dazugehörigen Dualbasis. Man setzt einfach einen beliebigen oberen Index gleich einem beliebigen unteren Index, was dann aufgrund der Summationskonvention auch die Summation über dieses Indexpaar impliziert. Der Leser kann zur Übung nachweisen, daß diese Prozedur in der Tat eine basisunabhängige Manipulation ist, daß also

$$S_{j_1\cdots j_{s-1}}^{k_1\ldots k_{r-1}} = T_{j_1\cdots j_{s-1} l}^{k_1\ldots k_{r-1} l} \tag{1.5.6}$$

tatsächlich Tensorkomponenten sind.

In diesem Zusammenhang ist ein Skalar ein Tensor der Stufe $\binom{0}{0}$, denn wenn man alle Tensorkomponentenindizes eines Tensors kontrahiert, erhält man eine Zahl, einen Skalar eben. Als Linearform betrachtet, bedeutet er einfach die skalare Multiplikation von Vektoren, Dualvektoren bzw. allgemeinen Tensoren.

1.6 Skalarprodukte

Ab jetzt setzen wir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, d.h. wir setzen jetzt voraus, daß wir einen reellen **Vektorraum** vorliegen haben.

Eine symmetrische Bilinearform, also ein $\binom{0}{2}$-Tensor S heißt **Skalarprodukt**, wenn sie positiv definit ist, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} &S(\vec{x},\vec{y}) = S(\vec{y},\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x},\vec{y} \in V,\\ &S(\vec{x},\vec{x}) \geq 0 \text{ für alle } \vec{x} \in V,\\ &S(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0. \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Im folgenden schreiben wir statt $S(\vec{x},\vec{y})$ einfach $\vec{x}\cdot\vec{y}$ oder noch einfacher $\vec{x}\vec{y}$. Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt **Euklidischer Vektorraum**.

Mit dem Skalarprodukt ist eine Zusatzstruktur auf dem Vektorraum definiert, welche eine „natürliche", d.h. basisunabhängige Abbildung zwischen Vektoren und Linearformen erlaubt. Daß V und V^* isomorph sind, ist ja ohnehin klar, weil beide Vektorräume die gleiche Dimension haben. Ohne eine Zusatzstruktur wie das Skalarprodukt benötigt man jedoch immer Basen (z.B. eine Basis in V und ihre Dualbasis) um einen Isomorphismus anzugeben. Die Isomorphismen identifizieren dann einfach die Komponenten der Vektoren und der Linearformen, aber diese Zuordnung hängt von der Wahl der Basen ab.

Mit dem Skalarprodukt ist das nicht so. Haben wir es erst einmal festgelegt, können wir es benutzen, um einen koordinatenunabhängigen Isomorphismus zwischen V und V^* zu definieren. Dazu definieren wir die Abbildung $S : V \rightarrow V^*$ mit $\vec{x} \mapsto S_{\vec{x}}$ dadurch, daß wir setzen $S_{\vec{x}}(\vec{y}) = \vec{x}\vec{y}$. Es ist klar, daß $S_{\vec{x}}$ eine Linearform ist, und da das Skalarprodukt Bilinearform ist, ist es auch eine Lineare Abbildung $V \rightarrow V^*$. Weiter ist die Abbildung auch injektiv, denn wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts folgt aus $S_{\vec{x}} = 0$ wegen $S_{\vec{x}}(\vec{x}) = \vec{x}\vec{x} = 0$ zwingend, daß $\vec{x} = 0$ sein muß. Da die Vektorräume V und V^* definitionsgemäß endlichdimensional sind, ist folglich S ein Isomorphismus. Dieser ist vollkommen unabhängig von der Wahl jeglicher Basen, denn wir haben ja gar keine Basen verwendet.

Seien nun $\vec{b}_j$ wieder eine Basis und $\vec{b}^k$ die dazugehörige Dualbasis. Wie jeder $\binom{0}{2}$-Tensor ist das Skalarprodukt durch dessen Komponenten eindeutig bestimmt:

$$g_{jk} = \vec{b}_j \vec{b}_k. \tag{1.6.2}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren läßt sich damit wie folgt durch die Vektorkomponenten bzgl. der Basis $\vec{b}_j$ ausdrücken:

$$\vec{x}\vec{y} = x^j y^k \vec{b}_j \vec{b}_k = g_{jk} x^j y^k. \tag{1.6.3}$$

gilt

$$S_{\vec{x}} = x_j \vec{b}^j = g_{jk} x^k \vec{b}^j. \tag{1.6.4}$$

Man nennt daher die x_j auch die **kovarianten** Komponenten des Vektors $\vec{x}$. Man erhält sie durch „Indexziehen" mit Hilfe der Komponenten g_{jk} des Skalarprodukts. Man muß aber immer im Hinterkopf behalten, daß dies in dem Sinne des natürlichen Isomorphismusses S zwischen Vektoren und Linearformen gemeint ist und daß sich die so definierten kovarianten Komponenten immer auf die Dualbasis $\vec{b}^j$ zur gegebenen Basis $\vec{b}_k$ beziehen. Daß (1.6.4) korrekt ist, ist unmittelbar einsichtig:

$$x_j \vec{b}^j(\vec{y}) = x_j \vec{b}^j (y^k \vec{b}_k) = x_j y^k \delta^j{}_k = x_k y^k = g_{jk} x^j y^k = \vec{x}\vec{y} = S_{\vec{x}}(\vec{y}). \tag{1.6.5}$$

Es ist weiter klar, daß g_{jk} eine symmetrische invertierbare $d \times d$-Matrix bildet. Das folgt daraus, daß $S : V \rightarrow V^*$ ein Isomorphismus ist. Die entsprechende Umkehrmatrix bezeichnen wir einfach mit g^{jk}, und es gilt die weitere Indexziehregel

$$x^j = g^{jk} x_k, \tag{1.6.6}$$

d.h. man kann das Skalarprodukts auch durch die kovarianten Vektorkomponenten ausdrücken:

$$\vec{x}\vec{y} = g^{jk} x_j y_k. \tag{1.6.7}$$

Es ist klar, daß sich diese Regeln auf Tensoren höherer Stufe verallgemeinern und damit die Kontraktion von Tensoren zu Tensoren niedrigerer Stufe verallgemeinern läßt. So sind z.B. für einen Tensor T der Stufe $\binom{3}{0}$

$$S^j = T^{jkl} g_{kl} \tag{1.6.8}$$

die kontravarianten Komponenten eines Vektors, also eines Tensors der Stufe $\binom{1}{0}$. Der einfache Beweis sei wieder dem Leser überlassen.

1.7 Orthonormalbasen

Eine Basis $\vec{e}_j$ des Vektorraums V heißt **Orthonormalbasis**, wenn

$$\vec{e}_j \vec{e}_k = \delta_{jk} \tag{1.7.1}$$

ist.

Wir zeigen jetzt, daß es stets eine Orthonormalbasis gibt. Wir können sie aus einer beliebigen Basis $\vec{b}_j$ mit Hilfe des **Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens** konstruieren. Dazu definieren wir zunächst

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\vec{b}_1 \vec{b}_1}} \vec{b}_1. \tag{1.7.2}$$

Dies ist stets möglich, denn es sind die $\vec{b}_j$ voneinander linear unabhängig, also insbesondere von Null verschieden. Also ist $\vec{b}_1 \vec{b}_1 > 0$, und die Wurzel ist reell. Offensichtlich gilt $\vec{e}_1 \vec{e}_1 = 1$. Dann können wir weiter bilden

$$\vec{b}_2' = \vec{b}_2 - (\vec{e}_1 \vec{b}_2) \vec{e}_1. \tag{1.7.3}$$

Da die Vektoren $\vec{b}_k$ linear unabhängig sind, ist $\vec{b}_2'$ ebenfalls linear unabhängig von den übrigen $\vec{b}_k$ und auch zu $\vec{e}_1$. Setzen wir nun

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\vec{b}_2' \vec{b}_2'}} \vec{b}_2', \tag{1.7.4}$$

haben wir immerhin schon erreicht, daß $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ zueinander orthogonal, d.h. $\vec{e}_1 \vec{e}_2 = 0$, und normiert, d.h. $\vec{e}_1 \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \vec{e}_2 = 1$ sind.

Auf diese Art verfahren wir rekursiv weiter, bis wir d orthonormierte Vektoren gefunden haben:

$$\vec{b}_{n+1}' = \vec{b}_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (\vec{e}_k \vec{b}_{n+1}) \vec{e}_k, \quad \vec{e}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\vec{b}_{n+1}' \vec{b}_{n+1}'}} \vec{b}_{n+1}'. \tag{1.7.5}$$

Der Vorteil der Orthonormalsysteme ist, daß die Komponenten des Skalarproduktes besonders einfach werden:

$$g_{jk} = \vec{e}_j \vec{e}_k = \delta_{jk} \Rightarrow g^{jk} = \delta^{jk}. \tag{1.7.6}$$

Die ko- und kontravarianten Komponenten müssen also in diesem Fall im Sinne des Isomorphismusses (1.6.4) nicht mehr unterschieden werden. In vielen Lehrbüchern wird deshalb in euklidischen Vektorräumen grundsätzlich nur mit unteren Komponenten gerechnet und eine Unterscheidung zwischen Basen und Dualbasen gar nicht mehr vorgenommen. Vielmehr werden gleich die Linearformen mit den Vektoren im Sinne des Isomorphismus (1.6.4) identifiziert. Dies führt aber häufig zu Verwirrung, und es lohnt sich, allgemeine Rechnungen zunächst im allgemeinen Tensorkalkül auszuführen und dann im konkreten Falle, daß man mit Orthonormalbasen rechnen will, zu spezialisieren. Namentlich in der Tensoranalysis, die wir im nächsten Kapitel behandeln, wird uns diese Auffassung sehr zugute kommen.

Kapitel 2

Tensorfelder und deren Ableitungen

Jetzt wenden wir uns der Analysis von Funktionen zu. Dazu legen wir den d—dimensionalen Vektorraum V zugrunde. Es sei weiter $\vec{b}_j$ eine Basis und $\vec{b}^j$ die dazugehörige Dualbasis.

2.1 Die Norm

Wichtig für die Analysis ist es zunächst, daß durch das Skalarprodukt nicht nur die algebraische Identifikation zwischen V und V^* möglich wird, sondern der $\mathbb{R}^d$ auch zu einem **normierten Vektorraum** wird, d.h. die Abbildung $||\cdot|| : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x}\vec{x}}$ bildet eine **Norm**, d.h. es gilt

(N1) $||\vec{x}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$,

(N2) $||\lambda\vec{x}|| = |\lambda| ||\vec{x}||$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \in V$,

(N3) $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

Die ersten beiden Axiome folgen unmittelbar aus den Eigenschaften des Skalarproduktes. Allein die letzte Bedingung, die sog. **Dreiecksungleichung** ist ein wenig schwierig zu beweisen. Dazu bedienen wir uns eines Tricks, der in solchen Fällen häufig zum Erfolg führt. Für beliebige Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V$ betrachten wir das quadratische Polynom

$$P(\lambda) = (\vec{x} + \lambda\vec{y})(\vec{x} + \lambda\vec{y}). \tag{2.1.1}$$

Wir wissen, daß dieses quadratische Polynom ≥ 0 ist. Es besitzt also entweder gar keine oder genau eine doppelte **reelle** Nullstelle.

Die Lösung der Gleichung $P(\lambda) = 0$ muß also zwei zueinander konjugiert komplexe oder eine doppelte reelle Nullstelle besitzen. Wegen

$$P(\lambda) = a + 2b\lambda + c\lambda^2 \tag{2.1.2}$$

mit $a = \vec{x}\vec{x}$, $b = \vec{x}\vec{y}$ und $c = \vec{y}\vec{y}$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

Sei zunächst $c = 0$. Dann ist wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts aber sogar $\vec{y} = 0$, also $b = c = 0$, und damit $P(\lambda) = a \geq 0$. Die Ungleichung (N3) ist dann trivialerweise mit dem Gleichheitszeichen erfüllt.

Falls $\vec{y} \neq 0$, gilt

$$a + 2b\lambda + c\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{2b}{c}\lambda + \frac{a}{c} = 0. \tag{2.1.3}$$

Die Lösungen dieser Gleichung lauten nun aber

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{c}(-b \pm \sqrt{b^2 - ac}). \tag{2.1.4}$$

Damit also diese Nullstellen komplex oder allenfalls beide gleich reell sind, muß der Ausdruck unter der Wurzel, d.h. die **Diskriminante** der quadratischen Gleichung, negativ oder 0 sein, also

$$b^2 \leq ac \Rightarrow (\vec{x}\vec{y})^2 \leq (\vec{x}\vec{x})(\vec{y}\vec{y}) \Rightarrow |\vec{x}\vec{y}| \geq ||\vec{x}||||\vec{y}||. \tag{2.1.5}$$

Das ist die **Cauchy-Schwarzsche** Ungleichung für Skalarprodukte, die auch für sich gesehen eine wichtige Rolle spielt. Damit folgt aber

$$(\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\vec{x} + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{y} \leq \vec{x}\vec{x} + 2|\vec{x}\vec{y}| + \vec{y}\vec{y} \leq ||\vec{x}||^2 + 2||\vec{x}||||\vec{y}|| + ||\vec{y}||^2 = (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2. \tag{2.1.6}$$

Wurzelziehen liefert gerade die Ungleichung (N3).

Wie man in der Analysisvorlesung lernt, kann man mit Hilfe einer solchen Norm **Grenzwerte** definieren wie mit reellen Zahlen und auch mit diesen Grenzwerten rechnen. Wir wollen darauf aber nicht genauer eingehen, sondern gehen davon aus, daß diese Formalitäten allgemein bekannt sind.

Wir können mit Hilfe einer Basis $\vec{b}_j$ ohnedies alle diesbezüglichen Manipulationen auf die entsprechenden Manipulationen in $\mathbb{R}^d$ zurückführen. Solange wir nur mit solchen Objekten in V und V^* operieren, für die die Wahl der Basis irrelevant ist, erhalten wir dann eine Analysis für Vektoren und Tensoren im Vektorraum V. Freilich benötigen wir hier ein weiterführendes Konzept, nämlich **tensorwertige Funktionen**, die wir in der Physik auch **Tensorfelder** nennen.

2.2 Tensorfelder

Wir betrachten zunächst Tensorfelder in einem beliebigen endlichdimensionalen Vektorraum, also ohne von den Eigenschaften des Skalarproduktes Gebrauch zu machen.

Eine Abbildung $f : V \to T^r_s$ heißt **Tensorfeld** vom Typ $\binom{r}{s}$. Für die Analysis ist es nun entscheidend, daß wir über die Komponenten des Tensorfeldes und seines Argumentes bzgl. einer beliebigen Basis $\vec{b}_k$ und der dazugehörigen Dualbasis $\vec{b}^k$ die gewöhnliche Analysis der reellwertigen Funktionen von mehreren Argumenten zur Verfügung haben. Mit einem Tensorfeld sind ja seine Komponenten bzgl. der Basis und der Dualbasis über (1.5.2) definiert. Die Basis des Vektorraumes T^s_r der Tensoren vom Typ $\binom{s}{r}$ bezeichnen wir wie in (1.5.5) festgelegt. Die Tensorkomponenten bzgl. dieser Basis sehen wir weiter als Funktionen der Vektorkomponenten x^j an, d.h. wir setzen

$$f(\vec{x}) = f^{k_1 \ldots k_r}_{j_1 \cdots j_s}(x^j)\vec{b}^{j_1 \cdots j_s}_{k_1 \ldots k_r}. \tag{2.2.1}$$

Es ist klar, daß wir die Funktion $f^{j_1 \cdots j_r} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d^{r+s}}$ partiell ableiten können, wenn diese Ableitungen existieren. Dies genügt jedoch nicht, wenn wir sicher sein wollen, daß wir dann tatsächlich wieder ein Tensorfeld erhalten. Wir müssen dies vielmehr beweisen. Wir zeigen nun, daß durch Ableiten der Komponenten tatsächlich wieder Tensorkomponenten eines neuen $\binom{r}{s+1}$-Tensorfeldes entstehen, nämlich

$$\mathrm{D}f(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x^j} f^{k_1 \ldots k_r}_{j_1 \cdots j_s}(x^j)\vec{b}^{j j_1 \cdots j_s}_{k_1 \ldots k_r} := f^{k_1 \ldots k_r}_{,j j_1 \cdots j_s}(x^j)\vec{b}^{j j_1 \cdots j_s}_{k_1 \ldots k_r}. \tag{2.2.2}$$

Um das zu zeigen, müssen wir zunächst das Transformationsverhalten der Tensorkomponenten studieren. Wegen (1.5.3) gilt offenbar

$$f'^{j'_1 \cdots j'_r}_{k'_1 \ldots k'_s}(x'^{k'}) = T^{k_1}{}_{k'_1} \cdots T^{k_s}{}_{k'_s} U^{j'_1}{}_{j_1} \cdots U^{j'_r}{}_{j_r} f^{j_1 \cdots j_r}_{k_1 \ldots k_s}(x^k). \tag{2.2.3}$$

Wir fassen dabei die Komponenten bzgl. der gestrichenen Basen als Funktionen der $x'^{k'}$, die Komponenten bzgl. der ungestrichenen Basen als Funktionen von x^k auf. Wegen (1.2.5) ist nun

$$\frac{\partial x'^{k'}}{\partial x^k} = U^{k'}{}_k, \quad \frac{\partial x^k}{\partial x'^{k'}} = T^k{}_{k'}. \tag{2.2.4}$$

Mit der Kettenregel ist also

$$\begin{aligned} f'^{j'_1 \ldots j'_r}{}_{,k' k'_1 \ldots k'_s} &= \frac{\partial}{\partial x'^{k'}} f'^{j'_1 \ldots j'_r}{}_{k'_1 \ldots k'_s} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} T^{j_1}{}_{j'_1} \cdots T^{j_s}{}_{j'_s} U^{k'_1}{}_{k_1} \cdots U^{k'_r}{}_{k_r} f^{k_1, k_2 \ldots k_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \\ &= T^k{}_{k'} T^{j_1}{}_{j'_1} \cdots T^{j_s}{}_{j'_s} U^{k'_1}{}_{k_1} \cdots U^{k'_r}{}_{k_r} f^{j_1 \ldots j_r}_{,k k_1 \ldots k_s}. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Das bedeutet, daß sich die in (2.2.2) definierten Komponenten von $\mathrm{D}f$ tatsächlich wie die Komponenten eines $\binom{r}{s+1}$-Tensors transformieren. Man beachte, daß die partielle Ableitung nach den **kontravarianten** Vektorkomponenten stets einen weiteren **kovarianten** Index erzeugen.

2.3 Generalisierte Koordinaten und holonome Basen

Oft ist es in den Anwendungen in der Physik sehr zweckmäßig, statt der Vektorkomponenten x^j beliebige Parameter q^k zu verwenden. Auch hier wenden wir obere Indizes an, obwohl die q^k i.a. **keine Vektorkomponenten** sind. Da wir im Moment lediglich lokale Eigenschaften von Tensorfeldern betrachten, genügt es hier, wenn die q^k eine offene Teilmenge von V umkehrbar eindeutig parametrisieren. Wir formulieren dies gleich mit Hilfe der Vektorkomponenten bzgl. einer Basis $\vec{b}_j$. Wir fassen dabei x^j als umkehrbar eindeutige Funktion der q^k auf:

$$x^j : U \to U', \quad q \mapsto x^j. \tag{2.3.1}$$

Dabei sind $U, U' \subseteq \mathbb{R}^d$ offene Mengen[1].

Da die Abbildung (2.3.1) definitionsgemäß umkehrbar eindeutig ist, können wir sogleich neue Basen definieren, indem wir die partiellen Ableitungen nach den q^k bilden:

$$\vec{b}'_k = \frac{\partial x^j}{\partial q^k} \vec{b}_j. \tag{2.3.2}$$

Dabei ist zu beachten, daß dies ein **Vektorfeld** ist, d.h. es hängt von $\vec{x}$ ab, weil es eine Funktion der generalisierten Koordinaten q^k ist. Daß es sich um eine Basis handelt, folgt aus dem aus der Analysisvorlesung bekannten Satz von der Ableitung Umkehrfunktion, wonach die Matrix

$$T^j{}_k := \frac{\partial x^j}{\partial q^k} \tag{2.3.3}$$

für alle $q \in U$ invertierbar ist, und daß

$$(T^{-1})^k{}_j = U^k{}_j = \frac{\partial q^k}{\partial x^j} \tag{2.3.4}$$

gilt. Die Transformationen zwischen diesen **holonomen Basisvektoren** $\vec{b}'_k$ und deren Dualvektoren $\vec{b}'^k$ sind also gemäß (1.2.1) und (1.3.8) durch

$$\begin{aligned} \vec{b}'_k &= T^j{}_k \vec{b}_j, & \vec{b}'^k &= U^k{}_j \vec{b}^j \\ \vec{b}_k &= U^j{}_k \vec{b}'_j, & \vec{b}^k &= T^k{}_j \vec{b}'^j \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

[1] Hier und im folgenden bezeichnet q (ohne Index) einfach das geordnete Tupel (q^k).

bestimmt. Wir können nun die kovariante Ableitung (2.2.2) auch mit Hilfe der generalisierten Koordinaten, der Basis $\vec{b}'_k$ und der dazugehörigen Dualbasis $\vec{b}'^k$ ausdrücken. Die gestrichenen Komponenten des Tensorfeldes mögen sich im folgenden auf die Basen $\vec{b}'^k$ und $\vec{b}'_k$ beziehen.

Zunächst bemerken wir, daß für Tensorprodukte die Produktregel

$$\mathrm{D}(f \otimes g) = (\mathrm{D}f) \otimes g + f \otimes (\mathrm{D}g) \tag{2.3.6}$$

gilt. Dabei sind f und g beliebige Tensorfelder. Um also die kovariante Ableitung des Tensorfeldes zu bestimmen, müssen wir zunächst die Ableitungen der Basis $\vec{b}'_k$, der dazugehörigen Dualbasis $\vec{b}'^k$ und eines skalaren Feldes bzgl. dieser Basen bestimmen. Außerdem wollen wir alle Ableitungen durch Ableitungen nach den verallgemeinerten Koordinaten q ausdrücken.

Beginnen wir mit der kovarianten Ableitung eines Skalarfeldes s. Bzgl. der konstanten Basis $\vec{b}_k$ und ihrer Dualbasis $\vec{b}^k$ können wir unmittelbar die Definition (2.2.2) anwenden:

$$\mathrm{D}s = \frac{\partial s}{\partial x^j}\vec{b}^j = s_{,j}\vec{b}^j = \frac{\partial s}{\partial q^k}U^k{}_j T^j{}_l \vec{b}'^l = \frac{\partial s}{\partial q^l}\vec{b}'^l. \tag{2.3.7}$$

Das bedeutet, daß die Komponenten der kovariante Ableitung eines Skalarfeldes (was man auch als **Gradient des Skalarfeldes** bezeichnet) bzgl. zu generalisierten Koordinaten gehörigen **holonomen Basen** einfach durch die Ableitung des Feldes nach diesen generalisierten Koordinaten gegeben sind.

Jetzt benötigen wir noch die Ableitungen der Basisvektoren $\vec{b}'_j$ und der Dualbasisvektoren $\vec{b}'^k$. Es gilt

$$\mathrm{D}\vec{b}'_j = \mathrm{D}(T^k{}_j \vec{b}_k) = \frac{\partial T^k{}_j}{\partial x^l}\vec{b}^l \otimes \vec{b}_k = \underbrace{\frac{\partial T^k{}_j}{\partial x^l}}_{\partial^2 x^k/(\partial q^j \partial q^{l'})} T^l{}_{l'} U^{k'}{}_k \vec{b}'^{l'} \otimes \vec{b}'_{k'} := \Gamma^{k'}_{jl'} \vec{b}'^{l'} \otimes \vec{b}'_{k'}. \tag{2.3.8}$$

Die Ausdrücke

$$\Gamma^k_{jl} = U^k{}_m \frac{\partial^2 x^m}{\partial q^j \partial q^l} \tag{2.3.9}$$

bezeichnet man als **Christoffelsymbole**.

Auch die kovariante Ableitung der Dualbasisvektoren lassen sich mit Hilfe der Christoffelsymbole ausdrücken. Dabei müssen wir allerdings ausnutzen, daß die Matrix U invers zur Matrix T ist:

$$U^k{}_l T^l{}_m = \delta^k{}_m = \mathrm{const} \Rightarrow \frac{\partial U^k{}_l}{\partial q^n} T^l{}_m + U^k{}_l \frac{\partial T^l{}_m}{\partial q^n} = 0. \tag{2.3.10}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung finden wir nach einigem Rechnen:

$$\mathrm{D}\vec{b}'^k = -\Gamma^l_{mn} \vec{b}'^m \otimes \vec{b}'^n. \tag{2.3.11}$$

Wegen (2.3.6) können wir nun unter Zuhilfenahme von (2.3.7), (2.3.8) und (2.3.11) die kovarianten Ableitungen von beliebigen Tensorfeldern bestimmen. Als Beispiel sei die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes $\vec{V}$ mit Hilfe der generalisierten Koordinaten ausgedrückt:

$$\mathrm{D}\vec{V} = \mathrm{D}(V'^i \vec{b}'_i) = (\partial'_j V'^i)\vec{b}'^j \otimes \vec{b}'_i + V'^i \Gamma^k_{ij} \vec{b}'^j \otimes \vec{b}'_k = (\partial'_j V'^i + \Gamma^i_{kj} V'^k)\vec{b}'^j \otimes \vec{b}'_i := \mathrm{D}_j V'^i. \tag{2.3.12}$$

Bis jetzt haben wir noch nicht vom Skalarprodukt Gebrauch gemacht. Wir zeigen nun, daß die Christoffelsymbole sich mit Hilfe der Komponenten

$$g'_{jk} = \vec{b}'_j \vec{b}'_k \tag{2.3.13}$$

ausdrücken lassen.

Dazu bemerken wir, daß das Skalarprodukt im Sinne von Tensorfeldern betrachtet ein **konstantes Tensorfeld** vom Typ $\binom{0}{2}$ ist. Es gilt also $\mathrm{D}G = 0$, denn bzgl. der festen Basis $\vec{b}_j$ ist $G = g_{jk}\vec{b}^j \otimes \vec{b}^k$ mit konstanten Koeffizienten g_{jk}. Da $\mathrm{D}G$ ein **Tensorfeld** vom Typ $\binom{0}{3}$ ist, gilt diese Gleichung auch bzgl. der holonomen Basis. Das führt zu nichttrivialen Beziehungen für die **Tensorkomponenten des Skalarprodukts**, die nun freilich von q abhängen, denn es ist ja

$$g'_{jk} = \vec{b}'_j \vec{b}'_k, \tag{2.3.14}$$

und die holonomen Basisvektoren hängen von q ab. Nun ist nach unserer Regel zur Bildung der kovarianten Ableitung

$$\mathrm{D}_i g'_{jk} = \partial'_i g'_{jk} - \Gamma^l_{ij} g'_{lk} - \Gamma^l_{ik} g'_{jl} = 0. \tag{2.3.15}$$

Wir schreiben zur Abkürzung

$$\Gamma_{kij} = \Gamma^l_{ij} g'_{lk}. \tag{2.3.16}$$

(2.3.15) notieren wir dann in der Form

$$\partial'_i g'_{jk} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{jik}. \tag{2.3.17}$$

Dieselbe Gleichung lautet nach zweimaliger zyklischer Vertauschung der Indizes ijk:

$$\partial'_j g'_{ki} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}, \quad \partial'_k g'_{ij} = \Gamma_{jki} + \Gamma_{ikj}. \tag{2.3.18}$$

Weiter wissen wir, daß die Christoffelsymbole symmetrisch in den beiden letzten Indizes sind. Addieren wir die beiden ersten und subtrahieren wir die letzte Form dieser Gleichungen voneinander, ergibt sich schließlich

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}(\partial'_i g'_{jk} + \partial'_j g'_{ik} - \partial'_k g'_{ij}). \tag{2.3.19}$$

Die ursprünglichen Christoffelsymbole erhalten wir schließlich, indem wir (2.3.16) mit Hilfe der kontravarianten Komponenten des Skalarproduktes umkehren:

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g'^{lk}(\partial'_i g'_{jk} + \partial'_j g'_{ik} - \partial'_k g'_{ij}). \tag{2.3.20}$$

Weil wir es später noch oft benötigen, führen wir an dieser Stelle das **Levi-Civita-Symbol** ein. Dazu definieren wir

$$\Delta^{j_1 \cdots j_d} = \begin{cases} \operatorname{sign}[(j_1, \ldots, j_d)] & \text{falls } (j_1, \ldots, j_d) \in S_d \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.3.21}$$

Dabei bezeichnet S_d die Menge der Permutationen der d Zahlen $1, 2, \ldots, d$, und das Signum dieser Permutation ist $+1$, falls man sie durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen zweier Zahlen und -1, falls man sie durch eine ungerade Anzahl solcher Vertauschungen erhält. Es sei schon hier betont, daß das Levi-Civita-Symbol i.a. **nicht** Komponenten eines Tensors bezeichnet!

Als erstes können wir das Levi-Civitasymbol dazu benutzen, die Determinante der Metrikkomponenten zu berechnen. Nach der Leibnizschen Definition der Determinante ist nämlich

$$g' := \det(g'_{jk}) = \Delta^{j_1 \cdots j_d} g_{j_1 1} \cdots g_{j_d d} = \frac{1}{d!} \Delta^{j_1 \cdots j_d} \Delta^{k_1 \ldots k_d} g'_{j_1 k_1} \cdots g'_{j_d k_d}. \tag{2.3.22}$$

Dabei haben wir im letzten Rechenschritt ausgenutzt, daß wir die Spalten beliebig permutieren können, ohne daß sich der Betrag der Determinante ändert. Es ergibt sich nur stets das Signum der Permutation. Dem tragen wir mit dem zweiten Levi-Civita-Symbol Rechnung und addieren gemäß der Einsteinschen Summationskonvention über alle möglichen Permutationen der Spaltenindizes, wodurch wir gerade $d!$-mal die Determinante addieren. Daher stammt der Faktor $1/d!$.

Nach dem Satz vom Inversen einer Matrix ergibt sich daraus für die kontravarianten Komponenten der Metrik

$$g'^{jk} = \frac{1}{g'(d-1)!} \Delta^{j j_2 \cdots j_d} \Delta^{k k_2 \ldots k_d} g'_{j_2 k_2} \cdots g'_{j_d k_d}. \tag{2.3.23}$$

Weiter bilden wir die partielle Ableitung der Determinante der Metrik

$$\begin{aligned} \partial'_j g' = \frac{1}{d!} \Delta^{j_1 \cdots j_d} \Delta^{k_1 \ldots k_d} [& \\ & (\partial'_j g'_{j_1 k_1}) g'_{j_2 k_2} \cdots g'_{j_d k_d} + g'_{j_1 k_1} (\partial_j g'_{j_2 k_2}) g'_{j_3 k_3} \cdots g'_{j_d k_d} + \cdots \\ & + g'_{j_1 k_1} \cdots g'_{j_{d-1} k_{d-1}} (\partial'_j g'_{j_d k_d})]. \end{aligned} \tag{2.3.24}$$

Nach dem Entwicklungssatz für Determinanten bildet aber zusammen mit den Levi-Civita-Symbolen jeder der d Summanden in der eckigen Klammer den gleichen Ausdruck. Mit Hilfe von (2.3.23) können wir also

$$\partial'_j g' = g g^{kl} (\partial_j g_{kl}) \tag{2.3.25}$$

schreiben. Eine Anwendung ist die Kontraktion der Christoffelsymbole. Wegen (2.3.20) gilt nämlich unter Benutzung von (2.3.25)

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2} g'^{ik} \partial_j g'_{ik} = \frac{1}{2g} \partial_j g = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_j \sqrt{g}. \tag{2.3.26}$$

Als Beispiel für die Anwendung dieser Formel betrachten wir die **Divergenz eines Vektorfeldes**, welche als die Kontraktion der kovarianten Ableitung desselben definiert ist. Aus (2.3.26) ergibt sich dann aus in allgemeinen holonomen Komponenten:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \mathrm{D}_i V^i = \partial_i V^i + \Gamma^i_{ij} V^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} V^i). \tag{2.3.27}$$

2.4 Krummlinige Orthonormalkoordinaten

Ein besonderer Fall von verallgemeinerten Koordinaten q liegt dann vor, wenn die Vektoren $\vec{b}'_k$ aufeinander orthogonal sind, d.h. wenn $\vec{b}'_k \vec{b}'_j = 0$ für alle $k \neq j$ ist. In diesem Abschnitt wollen wir **die Einsteinsche Summationskonvention nicht benutzen**. Wir schreiben hier also alle Summen explizit hin. Die Summen laufen dabei immer entsprechend der Dimension des zugrundeliegenden Vektorraumes von 1 bis d. Dann definieren wir

$$h_j = \sqrt{\vec{b}'_j \vec{b}'_j}, \quad \vec{e}_j = \frac{1}{h_j} \vec{b}'_j. \tag{2.4.1}$$

Dann gilt voraussetzungsgemäß

$$\vec{e}_j \vec{e}_k = \delta_{jk}, \tag{2.4.2}$$

und die $\vec{e}_j$ bilden ein Orthonormalsystem. Wir bezeichnen die dazugehörige Dualbasis wie üblich mit $\vec{e}^j$ und die Tensorkomponenten bzgl. dieser Basen mit einer Tilde über dem Symbol, also:

$$T = \sum_{j_1, \ldots, k_r} \tilde{T}^{k_1 \ldots k_r}_{j_1 \ldots j_s} \vec{e}^{j_1 \ldots j_s}_{k_1 \ldots k_r}. \tag{2.4.3}$$

Weiter gilt wegen

$$\delta^j{}_k = \vec{e}^j(\vec{e}_k) = \frac{1}{h_j} \vec{e}^j(\vec{b}'_k) \Rightarrow \vec{e}^j = h_j \vec{b}'^j. \tag{2.4.4}$$

Man beachte, daß hierbei gemäß unserer obigen Verabredung **nicht** über j zu summieren ist!

Aus (2.4.3) folgt dann

$$T = \sum_{j_1,\ldots,k_r} \tilde{T}^{k_1\ldots k_r}_{j_1\ldots j_s} \prod_{\rho=1}^{r} \frac{1}{h_{k_\rho}} \prod_{\sigma=1}^{s} h_{j_\sigma} \vec{b}^{j_1\ldots j_s}_{k_1,\ldots,k_r}. \tag{2.4.5}$$

Also ist

$$T'^{k_1\ldots k_r}_{j_1\ldots j_s} = \tilde{T}^{k_1\ldots k_r}_{j_1\ldots j_s} \prod_{\rho=1}^{r} \frac{1}{h_{k_\rho}} \prod_{\sigma=1}^{s} h_{j_\sigma}. \tag{2.4.6}$$

oder

$$\tilde{T}^{k_1\ldots k_r}_{j_1\ldots j_s} = T'^{k_1\ldots k_r}_{j_1\ldots j_s} \prod_{\rho=1}^{r} h_{k_\rho} \prod_{\sigma=1}^{s} \frac{1}{h_{j_\sigma}}. \tag{2.4.7}$$

Weiter bemerken wir, daß in diesem Falle die Determinante der Metrik bzgl. der holonomen Koordinaten durch

$$g = \prod_{j=1}^{d} h_j^2 \tag{2.4.8}$$

gegeben ist. Man kann also für Orthogonalkoordinaten leicht mit Hilfe von (2.4.4)-(2.4.8) sämtliche Rechnungen, die man mit den Komponenten bzgl. holonomer Koordinaten ausdrücken kann, auch mit den Komponenten bzgl. der Orthonormalbasen hinschreiben.

Es folgt z.B. aus (2.3.7) für den Gradienten eines Skalarfeldes s:

$$\mathrm{D}s = \sum_j (\partial'_j s) \vec{b}'^j = \sum_j \frac{1}{h_j} (\partial'_j s) \vec{e}^j \Rightarrow \tilde{D}_j s = \frac{1}{h_j} (\partial'_j s). \tag{2.4.9}$$

Für die Divergenz eines Vektorfeldes finden wir hingegen:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \partial_i \left(\frac{\sqrt{g}}{h_i} \tilde{V}^i \right). \tag{2.4.10}$$

2.5 Alternierende Formen

Wie wir später bei der Integration noch sehen werden, nehmen die sog. **alternierenden Formen** eine besondere Stellung in der Vektoranalysis ein, und zwar deshalb weil bestimmte Kombinationen von kovarianten Ableitungen identisch sind mit den partiellen Ableitungen nach beliebigen generalisierten Koordinaten.

Zunächst definieren wir eine alternierende p-Form ω als einen total antisymmetrischen $\binom{0}{p}$-Tensor. Dabei heißt totale Antisymmetrie, daß

$$\omega(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \ldots \vec{v}_l, \ldots, \vec{v}_p) = -\omega(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_l, \ldots \vec{v}_k, \ldots, \vec{v}_p) \tag{2.5.1}$$

für beliebige Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, d.h. vertauscht man zwei Argumente wechselt der Wert der Multilinearform stets einfach das Vorzeichen. Für die Komponenten bzgl. einer beliebigen Basis gilt demnach insbesondere

$$\omega_{j_1\ldots j_k\ldots j_l\ldots j_p} = -\omega_{j_1\ldots j_l\ldots j_k\ldots j_p}. \tag{2.5.2}$$

Es ist klar, daß die Menge der alternierenden p-Formen einen Untervektorraum des Tensorraumes T_p^0 bildet, den wir mit A_p bezeichnen wollen.

Weiter ist das **alternierende Tensorprodukt** oder **Keilprodukt** wichtig. Offensichtlich erhält man nämlich aus einer p-Form ω und einer q-Form ω' eine $p+q$-Form, indem man definiert

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \omega')(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots \vec{v}_{p+q}) \\ = \sum_{\tau \in S_{p+q}} \frac{\operatorname{sign}(\tau)}{p!q!} \omega(\vec{v}_{\tau(1)}, \ldots, \vec{v}_{\tau(p)}) \omega'(\vec{v}_{\tau(p+1)}, \ldots \vec{v}_{\tau(p+q)}).\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Dabei durchläuft τ die Menge S_{p+q} der Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, p+q$.

Die alternierenden Formen können dann mit Hilfe mehrfacher Keilprodukte der Dualbasisvektoren ausgedrückt werden:

$$\omega = \omega_{j_1 \cdots j_p} \vec{b}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \vec{b}^{j_p} = \frac{1}{p!} \omega_{j_1 \cdots j_p} \vec{b}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \vec{b}^{j_p}. \tag{2.5.4}$$

Dabei nutzen wir aus, daß die Komponenten total antisymmetrisch unter Vertauschung der Indizes sind, so daß durch das Antisymmetrisieren der direkten Produkte einfach $p!$-mal die gleiche p-Form addiert wird, was wir durch Division durch eben diese Zahl wieder wettmachen.

Es ist auch klar, daß der Vektorraum A_p der p-Formen die Dimension $\binom{d}{p}$ besitzt. Es ist klar, daß es für $p > d$ nur genau eine p-Form gibt, nämlich die triviale, die alle Vektoren auf 0 abbildet. Um das einzusehen, bemerken wir, daß für jede p-Form (p beliebig) gilt $\omega(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p) = 0$, falls die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ linear abhängig sind. Ist das nämlich der Fall, können wir mit geeigneten $\lambda_i \in \mathbb{R}$ schreiben

$$\vec{v}_p = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{v}_i. \tag{2.5.5}$$

Wegen der Linearität der p-Form im letzten Argument ist dann aber

$$\omega(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_p) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \omega(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p-1}, \vec{v}_i). \tag{2.5.6}$$

In der Summe auf der rechten Seite verschwindet aber jeder einzelne Summand, denn es taucht ja stets ein Argument doppelt auf, und das muß stets 0 ergeben, weil eine Vertauschung der beiden gleichen Argumente einerseits das Vorzeichen ändern soll, andererseits diese Vertauschung aber gar keine Änderung bedeutet.

2.6 Alternierende Differentialformen

Wir betrachten nun wieder die Dualbasis $\vec{b}'^i$ zur holonomen Basis $\vec{b}'_i$, s. (2.3.2), bzgl. beliebiger generalisierter Koordinaten (q) und betrachten nun alternierende Tensorfelder.

Es ist klar, daß wir ein alternierendes p-Formfeld kovariant ableiten können, denn dieses ist ja ein spezielles $\binom{0}{p}$-Tensorfeld. Es entsteht dann aber nicht wieder ein alternierendes p-Formfeld, sondern ein allgemeines $\binom{0}{p+1}$-Feld:

$$\mathrm{D}\omega = \frac{1}{p!} \mathrm{D}_k \omega_{j_1 \cdots j_p} \vec{b}'^k \otimes \vec{b}'^{j_1} \wedge \cdots \wedge \vec{b}'^{j_p}. \tag{2.6.1}$$

Wir können daraus aber ganz einfach eine alternierende $p+1$-Form machen, indem wir statt des einfachen Tensorproduktes einfach ein Keilprodukt setzen. Diese Konstruktion heiß **Cartanableitung** der alternierenden p-Form:

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{p!} \mathrm{D}_k \omega_{j_1 \cdots j_p} \vec{b}'^k \wedge \vec{b}'^{j_1} \wedge \cdots \wedge \vec{b}'^{j_p} \tag{2.6.2}$$

Wir wollen nun die wichtigste Eigenschaft der Cartan-Ableitung zeigen, nämlich daß wir die kovariante Ableitung D_k durch die partielle Ableitung $\partial'_k = \partial/\partial q^k$ ersetzen können. Dies sehen wir wie folgt ein: Gemäß (2.3.8,2.3.10,2.3.11) gilt

$$\mathrm{D}_k \omega_{j_1 \cdots j_p} = \partial'_k \omega_{j_1 \cdots j_p} - \Gamma^{j'_1}_{j_1 k} \omega_{j'_1 j_2 \cdots j_p} - \cdots - \Gamma^{j'_p}_{j_p k} \omega_{j_1 j_2 \cdots j'_p}. \tag{2.6.3}$$

Setzen wir dies nun in (2.6.2) ein, verschwinden alle Beiträge mit den Christoffelsymbolen, denn diese sind wegen (2.3.9) symmetrisch in den beiden unteren Indizes, werden jedoch mit dem antisymmetrischen Keilprodukt der Dualbasisvektoren multipliziert, wodurch sich freilich 0 ergibt. Damit ist also

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{p!} \partial'_k \omega_{j_1 \cdots j_p} \vec{b}'^k \wedge \vec{b}'^{j_1} \wedge \cdots \wedge \vec{b}'^{j_p}. \tag{2.6.4}$$

Konstruktionsgemäß ist dies einerseits eine $p+1$-Form, insbesondere also ein $\binom{0}{p+1}$-Tensorfeld, andererseits konnten wir aber zeigen, daß in diesem speziellen Falle die kovariante Ableitung D_k durch die partielle Ableitung ersetzt werden durfte. Dies ist deshalb für die Physik von besonderer Wichtigkeit, weil dies bei der kovarianten Integration von Feldern zur Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zum verallgemeinerten **Stokesschen Theorem** führt.

Wir weise noch auf zwei weitere wichtige Eigenschaften hin. Zum einen gilt offenbar

$$\mathrm{dd}\omega = 0, \tag{2.6.5}$$

denn mit (2.6.4) ist

$$\mathrm{dd}\omega = \frac{1}{p!} \partial'_l \partial'_k \omega_{j_1 \cdots j_p} \vec{b}'^l \wedge \vec{b}'^k \wedge \vec{b}'^{j_1} \wedge \cdots \wedge \vec{b}'^{j_p}. \tag{2.6.6}$$

Da wir aber die ganze Zeit stillschweigend davon ausgehen, daß die Komponenten stetig partiell differenzierbar sind, vertauschen die partiellen Ableitungen $\partial'_l \partial'_k = \partial'_k \partial'_l$, und durch die Überschiebung mit $\vec{b}'^l \wedge \vec{b}'^k \wedge \cdots$ erhalten wir 0, so daß (2.6.5) gezeigt ist.

Weiter gilt für das Keilprodukt einer p- mit einer q-Form die Produktregel

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \omega') = (\mathrm{d}\omega) \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge (\mathrm{d}\omega'). \tag{2.6.7}$$

Zum Beweis gehen wir über die Basisdarstellung (2.5.3) und wenden wieder (2.6.4) an:

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \omega') = \frac{1}{p!q!} [(\partial'_l \omega_{j_1 \cdots j_p}) \omega'_{k_1 \dots k_q} + \omega_{j_1 \cdots j_p} (\partial'_l \omega'_{k_1 \dots k_q})] \vec{b}'^l \wedge \vec{b}'^{j_1} \wedge \cdots \wedge \vec{b}'^{k_q} \tag{2.6.8}$$

Im zweiten Summanden vertauschen wir nun $\vec{b}'^l$ mit den p Dualbasisvektoren vor ihm, wodurch sich ein Vorzeichen $(-1)^p$ ergibt, denn das Keilprodukt ist ja seiner Definition gemäß alternierend. Daraus folgt dann aber, wiederum unter Anwendung von (2.6.4), die Behauptung (2.6.7).

Kapitel 3

Integration über Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Integration über **Untermannigfaltigkeiten** des $\mathbb{R}^d$. Dies ist für die Physik besonders wichtig, weil diese Techniken in Kombination mit der **Variationsrechnung** zum einen die Aufstellung von kovarianten, d.h. von Koordinatensystemen unabhängigen, Gleichungen ermöglichen und zum anderen die Lösung von Feldgleichungen ermöglichen. Wir gehen auf diese physikalischen Anwendungen im nächsten Kapitel ein. Hier konzentrieren wir uns auf die mathematischen Grundlagen.

3.1 Geometrische Vorbereitungen

Wie schon bei der Differentiation wollen wir die Integration auf die gewöhnliche Integration über $\mathbb{R}^n$-wertige Funktionen zurückführen. Dabei benutzen wir wieder die Komponenten von Vektorfeldern, um koordinatenunabhängige Größen zu berechnen.

Bei der Integration ist es aber sehr hilfreich, die analytische Geometrie zuhilfe zu nehmen, um zu solchen **kovarianten** Integrationsdefinitionen zu gelangen.

Wir betrachten dazu als Vektorraum den euklidischen Raum, also den dreidimensionalen reellen Vektorraum, der dadurch entsteht, daß wir uns einen willkürlichen Bezugspunkt O unseres Anschauungsraums auszeichnen. Dann können wir die Vektoren mit den gerichteten Strecken, die diesen Punkt mit einem anderen Punkt verbinden, identifizieren.

Wir führen nun in O drei aufeinander senkrecht stehenden Vektoren der Länge 1, $\vec{e}_j$, ein die dann eine Orthonormalbasis bilden. Für die Integration wird nun der Begriff der **Orientierung** wichtig. Wir definieren ein solches Orthonormalsystem als **positiv orientiert**. Um eine bessere Merkhilfe zu haben, legen wir fest, daß wir drei solche Vektoren positiv orientiert nennen, wenn Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand der Reihe nach in die Richtungen der drei Basisvektoren $\vec{e}_j$ weisen. Dann heißt jede andere Basis $\vec{b}_j = T^k{}_j e_k$, welche aus diesem Standardsystem hervorgeht, ebenfalls positiv orientiert, wenn die Determinanten $\det(T^k{}_j) > 0$ ist.

Jetzt betrachten wir die kartesischen Komponenten des Ortsvektors $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$. Dann bilden die Mengen der Gestalt $Q = \{x^i \in [\alpha_i, \beta_i] \subseteq \mathbb{R}^3\}$ **Quader**, deren Volumen durch $\prod_i (\beta_i - \alpha_i)$ gegeben ist. Sei dann $s : Q \to \mathbb{R}$ ein skalares Feld. Dann definieren wir als das **Volumenintegral** des skalaren Feldes über den Quader

$$\int_Q \mathrm{d}^3\vec{x}\, s(\vec{x}) = \int_{\alpha^1}^{\beta^1} \mathrm{d}x^1 \int_{\alpha^2}^{\beta^2} \mathrm{d}x^2 \int_{\alpha^3}^{\beta^3} \mathrm{d}x^3 s(\vec{x}). \tag{3.1.1}$$

Es ist klar, daß wir diese Betrachtung auf beliebige meßbare Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ erweitern können, insbesondere auch auf ganz $\mathbb{R}^3$. Letzteres werden wir im folgenden stets tun. Man kann dann alle Integrale als solche über ganz $\mathbb{R}^3$ auffassen und die charakteristische Funktion über eine beliebige meßbare Teilmenge $M \subseteq V$ benutzen:

$$\chi_M(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \vec{x} \in M \\ 0 & \text{falls } \vec{x} \notin M. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Dann definieren wir einfach

$$\int_M \mathrm{d}^3\vec{x}\, s(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \chi_M(\vec{x}) s(\vec{x}). \tag{3.1.3}$$

Ein Integral ohne Angabe von Grenzen steht dabei immer für ein Integral über den ganzen Raum V. Als nächstes fragen wir, wie wir das Integral in anderen Koordinaten als den kartesischen Koordinaten ausdrücken können. Wir können gleich beliebige generalisierte Koordinaten $q = (q^k)$ betrachten. Seien die x^i die Komponenten des Ortsvektors $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ die x'^i die Koordinaten bzgl. der holonomen Basis $\vec{x} = x'^i \vec{b}'_i$. Dann gelten wieder die allgemeinen Formeln (2.3.3-2.3.5), und aus der Transformationsformel für mehrfache Integrale folgt sofort

$$\int \mathrm{d}^3\vec{x}\, s(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3 q \det({T^j}_k) s[\vec{x}(q)] \tag{3.1.4}$$

Wir können nun die Jacobideterminante $\det({T^j}_k)$ mit Hilfe der Metrik ausdrücken. Es gilt nämlich:

$$g = \det\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial q^k} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^l}\right) = \det\left(\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{\partial x^i}{\partial q^l}\right) = \det(T T^t) = (\det T)^2 \Rightarrow |\det T| = \sqrt{g}. \tag{3.1.5}$$

Dabei haben wir die Tatsache benutzt, daß die x^i Komponenten bzgl. des Orthonormalsystems $\vec{}_i$ sind. Damit ist in beliebigen generalisierten Koordinaten also

$$\int \mathrm{d}^3\vec{x}\, s(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3 q \sqrt{g(q)} s[\vec{x}(q)]. \tag{3.1.6}$$

Es ist klar, daß dieses Integral über ein Skalarfeld einen Skalar ergibt. Da die Determinante orthogonaler Transformationen stets ± 1 ist, ist es auch gleichgültig, welches Orthonormalsystem des $\mathbb{R}^3$ man verwendet, um das Integral gemäß (3.1.1) zu definieren. Es ist klar, daß all diese Betrachtungen auf euklidische Räume beliebiger Dimension d anwendbar sind.

Man gelangt dann zur Definition des Volumenintegrals in beliebigen generalisierten Koordinaten

$$\int \mathrm{d}^d\vec{x}\, s(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^d q \sqrt{g(q)} s[\vec{x}(q)]. \tag{3.1.7}$$

3.2 Untermannigfaltigkeiten

Als eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit im d-dimensionalen euklidischen Vektorraum bezeichnen wir differenzierbare Abbildungen $\vec{x} : U \to V$, $q \mapsto \vec{s}(q)$, wo $U \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge ist, so daß die $\mathbb{R}^{p \times d}$-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial q^p} \\ \frac{\partial x^2}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial q^p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x^d}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial x^d}{\partial q^p} \end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

vom Range p ist, d.h. die Matrix $(\tilde{g}_{\alpha\beta})$ ist für alle $q \in U$ invertierbar:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^\beta} \tag{3.2.2}$$

Zur geometrischen Interpretation ist zu sagen, daß die $\partial \vec{x}/\partial q^\alpha$ gerade p linear unabhängige **Tangentialvektoren** an die Untermannigfaltigkeit liefern. Man mache sich das an dem Fall $d=3$, $p=2$ klar: Man hat dann eine zweidimensionale Fläche im Anschauungsraume vorliegen. Die Zahlen $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ liefern dann eine lokale Metrik für die **Tangentialvektoren**. An jedem Punkt P der Fläche, welcher durch den Ortsvektor $\vec{x}(q)=\overrightarrow{OP}$ eindeutig bestimmt ist, kann man sich also den Tangentialvektorraum T_p befestigt denken, der über das Skalarprodukt im euklidischen dreidimensionalen Vektorraum ebenfalls ein Skalarprodukt „erbt". Man nennt $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ daher die durch g_{jk} **induzierte Metrik**.

Als Beispiel nehmen wir die Kugelfläche mit Radius R, die wir fast überall durch zwei Winkel wie folgt parametrisieren können:

$$\vec{x}(\vartheta,\varphi)=R\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix},\quad \varphi\in[0,2\pi),\vartheta\in(0,\pi). \tag{3.2.3}$$

Die lokale Metrik ist

$$(\tilde{g}_{\alpha\beta})=R^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^2\vartheta\end{pmatrix}. \tag{3.2.4}$$

Die Determinante ist im angegebenen Parameterbereich $\tilde{g}=R^4\sin^2\vartheta>0$, so daß die Kugelfläche bis auf die beiden Punkte $\vartheta=0$ und $\vartheta=\pi$ eindeutig parametrisiert ist.

Wir können uns freilich noch einen Spezialfall veranschaulichen, nämlich den einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit. Das ist dann eine Kurve im Raum (wenn der zugrundeliegende Vektorraum V dreidimensional ist) oder in der Ebene (wenn V zweidimensional ist).

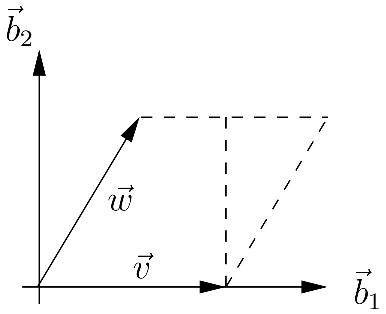
Die obige Definition im allgemeinen Falle einer p-dimensionalen Untermannigfaltigkeit im euklidischen d-dimensionalen Vektorraum V ist dann zwar abstrakter, ist aber rein technisch nicht schwieriger zu handhaben als die anschaulichen Beispiele. In der Physik benötigt man diese allgemeineren Fälle manchmal in der **speziellen Relativitätstheorie**. Wir kommen darauf weiter unten noch zurück.

3.3 Integration von Tensorfeldern über Untermannigfaltigkeiten

Wir betrachten nun alternierende p-Formen und versuchen, einen Integralbegriff zu finden, so daß wir sie über p-dimensionale Untermannigfaltigkeiten eines d-dimensionalen Vektorraums integrieren können, so daß von der Parametrisierung der Untermannigfaltigkeit unabhängige Integrale entstehen.

Wir wollen zunächst die Entscheidung für alternierende p-Formen als geeignete Integrationsobjekte anschaulich motivieren. Dazu bedienen wir uns eines Beispiels aus der Physik. Als Vektorraum wählen wir den dreidimensionalen euklidischen Raum. Sei dann $\vec{e}_i$ eine Orthonormalbasis, und als Untermannigfaltigkeit diene die von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aufgespannte Ebene (die 12-Ebene).

Diese Ebene stellen wir uns nun gleichmäßig aufgeladen vor, d.h. in jedem Teilgebiet der Ebene möge die auf ihr sitzende elektrische Ladung proportional zur Fläche des Teilgebietes sein. Wir sagen dann, die **Flächendichte** ω sei konstant auf der ganzen Ebene. Wie können wir die Idee der Flächendichte jetzt mathematisch formalisieren?



Seien nun $\vec{v}=v^i\vec{e}_i$ und $\vec{w}=w^i\vec{e}_i$ zwei linear unabhängige Vektoren auf der Ebene. Dabei möge die Reihenfolge $\vec{v}$ und $\vec{w}$ so festgelegt sein, daß sie in dieser Reihenfolge durch $\vec{e}_3$ zu einer positiv orientierten Basis von V ergänzt werden. Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen nun ein Parallelogramm auf. Dann definieren wir ω als diejenige Funktion $\omega: T_O\times T_O\to\mathbb{R}$, die diesem Parallelogramm die auf ihr sitzende Ladung zuordnet. Dabei haben wir $\vec{v}$ und $\vec{w}$ als Tangentenvektoren an die Ebene im Punkt O (dem Ursprung des Koordinatensystems) interpretiert.

Als erstes versuchen wir nun die Fläche des Parallelogramms aus kartesischen Koordinaten der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zu gewinnen. Dazu können wir mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens $\vec{b}_1 = \vec{v}/||\vec{v}||$ als einen der beiden orthonormierten Basisvektoren wählen. Dann ist offenbar die Fläche des Parallelogramms $A = v^1 w^2$. Dies ist nun mit Sicherheit kein kovarianter Ausdruck. Wir können zum korrekten Ausdruck gelangen, indem wir uns klar machen, daß bei einer Vertauschung der beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$, also einer Umorientierung relativ zum Koordinatensystem betragsmäßig ebenfalls die Fläche herauskommt, aber mit umgekehrtem Vorzeichen. Das bedeutet, daß die Fläche hier eine alternierende Form zweiter Stufe ist. Im zweidimensionalen reellen Vektorraum V und bzgl. kartesischer Koordinaten ist also die **vorzeichenbehaftete** Fläche eines von den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms durch $A = \Delta_{jk} v^j w^k$ gegeben, wobei Δ_{jk} das Levi-Civitasymbol ist.

Um dies zu allgemeinen Koordinaten zu verallgemeinern, benötigen wir eine Verallgemeinerung des Levi-Civita-Symbols zu echten Tensorkomponenten. Sei dazu $\vec{e}_j$ eine beliebige Orthonormalbasis und $\vec{e}^k$ die dazugehörige Dualbasis. Dann definieren wir den ϵ-Tensor durch

$$\epsilon = \Delta_{jk} \vec{e}^{jk} = \frac{1}{2!} \Delta_{jk} \vec{e}^j \wedge \vec{e}^k \tag{3.3.1}$$

Mit (3.1.5) erhalten wir die Koeffizienten dieses Tensors in beliebigen holonomen Koordinaten:

$$\epsilon = \frac{1}{2!} \sqrt{g} \Delta_{jk} \vec{b}'^j \wedge \vec{b}'^k. \tag{3.3.2}$$

Damit ist die orientierte Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Flächenstücks bzgl. beliebiger holonomer Koordinaten durch

$$A = \epsilon(\vec{v}, \vec{w}) = \epsilon_{jk} v^j w^k = \sqrt{g} \Delta_{jk} v^j w^k \tag{3.3.3}$$

gegeben.

Entsprechend definiert man das **orientierte Maß** für das Volumen eines d-dimensionalen Parallelepipeds, aufgespannt durch Vektoren $\vec{v}_j$ ($j \in \{1, \ldots, d\}$) durch

$$V^{(d)} = \epsilon(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_d) = \sqrt{\tilde{g}} \Delta_{j_1 \cdots j_d} v_1^{j_1} \cdots v_d^{j_d}. \tag{3.3.4}$$

Betrachten wir nun Integrale über Untermannigfaltigkeiten des d-dimensionalen Vektorraumes und Formen, dann stellen wir zunächst fest, daß das p-dimensionale Volumenelement bzgl. beliebiger holonomer generalisierter Koordinaten q^α die Gestalt

$$\mathrm{d}V^{(p)} = \sqrt{\tilde{g}} \mathrm{d}q^1 \cdots \mathrm{d}q^p \tag{3.3.5}$$

besitzt. Das p-dimensionale Volumen der gesamten Untermannigfaltigkeit ist demnach

$$V^{(p)} = \int_G \sqrt{\tilde{g}} \mathrm{d}q^1 \cdots \mathrm{d}q^p. \tag{3.3.6}$$

Dabei ist G der Bereich, über die die verallgemeinerten Koordinaten q zu nehmen ist, so daß die gesamte Untermannigfaltigkeit (evtl. bis auf Lebesguesche Nullmengen) abgedeckt wird.

Nehmen wir als **Beispiel** wieder unsere Kugelfläche im dreidimensionalen Raume, so ist deren zweidimensionales Volumen (also ihre Oberfläche) dieser Definition gemäß wie folgt zu berechnen. Es ist wegen (3.2.4) $\tilde{g} = \det(\tilde{g}_{\alpha\beta}) = R^4 \sin^2 \vartheta$. Die Oberfläche ist also

$$V^{(2)} = R^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi = 4\pi R^2, \tag{3.3.7}$$

ganz wie es die elementare Geometrie auch ergibt.

Verallgemeinern läßt sich nun diese Integration über p-dimensionale Untermannigfaltigkeiten offenbar für p-Formen im d-dimensionalen Vektorraum, indem man sie auf die Integration einer p-Form im $\mathbb{R}^p$ zurückführt. Ein p-Formfeld im $\mathbb{R}^p$ besitzt bzgl. orthnormaler Basisvektoren offenbar die Gestalt

$$\omega = f\vec{e}^1 \wedge \cdots \wedge \vec{e}^p, \tag{3.3.8}$$

Dann definieren wir wie oben in (3.1.1) das Integral über diese Form

$$\int \omega(\vec{x}) = \int_G f(x^j)\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^p, \tag{3.3.9}$$

wobei G der Bereich in den kartesischen Koordinaten ist, über den integriert werden soll.

Betrachten wir nun ein p-Formfeld ω im d-dimensionalen Vektorraum. Dann können wir daraus eine p-Form im $\mathbb{R}^p$ bilden mit Hilfe der Abbildung

$$\omega' = \frac{1}{p!}\omega_{j_1 \cdots j_p}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial q^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial q^{\alpha_p}}\mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_p} = \frac{1}{p!}\omega_{j_1 \cdots j_p} \det \frac{\partial(x^{j_1}, \ldots, x^{j_p})}{\partial(q^1, \ldots, q^p)}\mathrm{d}q^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^p. \tag{3.3.10}$$

Dabei stehen die $\mathrm{d}q^{\alpha_1}$ für die Dualbasisvektoren $\vec{b}'^{\alpha}$, die zur holonomen Basis $\vec{b}'_{\alpha} = \partial\vec{x}/\partial q^{\alpha}$ der Tangentialräume an die Untermannigfaltigkeit gehören. Die x^{j_k} sind dabei die Komponenten des Ortsvektors $\vec{x}$ bzgl. einer beliebigen holonomen Basis. Wegen der Transformationseigenschaften der p-Formkomponenten und der Vektorkomponenten (1.5.3) und (2.3.3) ist unmittelbar klar, daß ω' unabhängig von der Wahl dieser holonomen Basis ist. Freilich ist ω' **nicht** unabhängig von der Wahl der Parametrisierung q^{α} der Untermannigfaltigkeit. Wir werden aber sogleich sehen, daß dies für das im folgenden definierte Integral der Fall ist!

Das Integral des p-Formenfeldes ω über die p-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist dann über die Definition (3.3.9) der Integration einer p-Form eines p-Formenfeldes im $\mathbb{R}^p$ definiert, d.h. es ist

$$\int_M \omega = \int_M \omega_{j_1 \cdots j_p}\mathrm{d}x^{j_1} \cdots \mathrm{d}x^{j_p} := \int_G \frac{1}{p!}\omega_{j_1 \cdots j_p}(q) \det \frac{\partial(x^{j_1}, \ldots, x^{j_p})}{\partial(q^1, \ldots, q^p)}\mathrm{d}q^1 \cdots \mathrm{d}q^p \tag{3.3.11}$$

Dieses Integral ist offenbar tatsächlich invariant unter **orientierungserhaltenden Transformationen der verallgemeinerten Koordinaten**. Führt man nämlich neue generalisierte Koordinaten q'^{α} ein, dann gilt nach der Transformationsformel für mehrfache Integrale

$$\begin{aligned}\int_M \omega &= \int_{G'} \frac{1}{p!}\omega_{j_1 \cdots j_p}(q') \det \frac{\partial(x^{j_1}, \ldots, x^{j_p})}{\partial(q^1, \ldots, q^p)} \det \frac{\partial(q^1, \ldots, q^p)}{\partial(q'^1, \ldots, q'^p)}\mathrm{d}q'^1 \cdots \mathrm{d}q'^p \\ &= \int_{G'} \frac{1}{p!}\omega_{j_1 \cdots j_p}(q') \det \frac{\partial(x^{j_1}, \ldots, x^{j_p})}{\partial(q'^1, \ldots, q'^p)}\mathrm{d}q'^1 \cdots \mathrm{d}q'^p.\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Daß die betrachtete Koordinatentransformation $q'(q)$ orientierungserhaltend sein muß, d.h. daß die Funktionaldeterminante $\det(\partial q^{\alpha}/\partial q^{\beta}) > 0$ ist, ist hier wichtig, weil ja in der Transformationsformel für mehrfache Integrale der **Betrag der Jacobideterminante** der Transformation steht. Benutzt man also eine Transformation, die die Orientierung umkehrt, ändert das Integral sein Vorzeichen!

Der Grund dafür, daß gerade die alternierenden p-Formfelder sich zum Integrieren eignen, liegt also an der totalen Antisymmetrie ihrer Komponenten bzgl. Vertauschens der Indizes, so daß man die Transformationsformel bis auf den trivialen Faktor $p!$, den wir oben stets wieder herausdividiert haben, als Jacobideterminanten schreiben kann. Die entsprechenden Jacobideterminanten treten aber auch beim Integrieren auf, und zwar genau so, daß das Integral wie eben gezeigt unabhängig von der Parametrisierung der Untermannigfaltigkeit ist.

Dies gilt übrigens unabhängig von der Existenz des Skalarprodukts, denn bei der Definition des Integrals (3.3.11) spielten deren Komponenten, also die Metrik g_{jk} des Vektorraums oder die Metrik $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ der Untermannigfaltigkeit keine Rolle.

Um Anschluß an unsere obigen geometrischen Betrachtungen zu gewinnen, versuchen wir nun, unser Integral von p-Formen über p-dimensionale Untermannigfaltigkeiten zu interpretieren.

Beginnen wir mit einem 3-Formfeld ω im dreidimensionalen Anschauungsraum. Die Dreiform besitzt nur eine unabhängige Komponente, und bzgl. beliebiger holonomer Koordinaten q^j können wir schreiben

$$\omega_{jkl} = \rho\epsilon_{jkl} = \rho\sqrt{g}\Delta_{jkl} \Rightarrow \omega = \rho\sqrt{g}\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3. \tag{3.3.13}$$

Dann ist

$$\int_M \omega = \int_G \rho(q)\sqrt{g}\mathrm{d}^3 q. \tag{3.3.14}$$

Wegen (3.1.6) ist dies gerade das Volumenintegral über eine skalare Dichte, denn $\sqrt{g}\mathrm{d}^3 q$ ist ja das kovariante Volumen, d.h. $\rho(q)$ gibt die Dichte einer irgendwie verteilten Quantitätsgröße an, z.B. die Ladungsdichte einer Verteilung elektrisch geladener Teilchen.

Als nächstes betrachten wir ein 2-Formfeld. Dieses 2-Formfeld können wir mit Hilfe des ϵ-Tensors umkehrbar eindeutig über ein Vektorfeld $\vec{j}$ charakterisieren:

$$\omega_{lm} = j^k \epsilon_{klm} = j^k\sqrt{g}\Delta_{klm}. \tag{3.3.15}$$

Dann ist das Integral über eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit in V, also eine Fläche im dreidimensionalen Anschauungsraume, durch

$$\int_M \omega = \int \frac{1}{2}\omega_{lm} \det \frac{\partial(x^l, x^m)}{\partial(q^1, q^2)}\mathrm{d}^2 q = \int \sqrt{g} j^k \Delta_{klm}\frac{\partial x^l}{\partial q^1}\frac{\partial x^m}{\partial q^2}\mathrm{d}q^1\mathrm{d}q^2 \tag{3.3.16}$$

definiert. Nun ist gemäß (3.3.4) offenbar in jedem Punkt der Integrand das Volumen des von den beiden Tangentialvektoren an die Fläche und j^k aufgespannten Parallelepipeds, denn g ist ja die Determinante der dreidimensionalen Metrik.

Um dieses Integral nun interpretieren zu können, stellen wir uns vor, j^k sei die **Stromdichte** irgendeiner Größe, wie z.B. die Masse eines Gases, d.h. die Stromdichte beschreibt die Richtung und die Masse, die pro Zeit- und Flächeneinheit durch ein Flächenelement strömt. Ist $\vec{v}(\vec{x})$ die Geschwindigkeit des Gases im Punkt $\vec{x}$, dann ist diese Größe offenbar durch $\vec{j} = \rho\vec{v}$ gegeben, wo ρ diesmal die Massendichte, welche wieder ein skalares Feld ist, bezeichnen soll. Durch unsere Fläche M fließt dann offenbar im infinitesimalen Zeitelement $\mathrm{d}t$ die Masse

$$\mathrm{d}m = \mathrm{d}t\int_M \omega. \tag{3.3.17}$$

Denn die drei Vektoren $\vec{v}\mathrm{d}t$, $\partial\vec{x}/\partial q^1\mathrm{d}q^1$ und $\partial\vec{x}/\partial q^2$ spannen das von dem Gas in der infinitesimalen Zeit eingenommene infinitesimale Parallelepipedvolumen $\mathrm{d}V$ mit der Grundfläche, die durch die beiden Tangentialvektoren vorgegeben ist, auf. Folglich ist $\rho\mathrm{d}V$ die in der Zeit $\mathrm{d}t$ durch dieses Flächenelement geflossene Masse. Das Integral ist dann die Masse des durch die Gesamtfläche M geströmten Gases. Das Vorzeichen des Integrals ist wieder durch die Orientierung bestimmt: Ist die Reihenfolge der Parameter q^α der Fläche so gewählt, daß die beiden Tangentialvektoren zusammen mit $\vec{j}$ ein Rechtssystem bilden, ergibt sich eine positive Masse, andernfalls entsprechend eine negative. Ist M eine geschlossene Fläche, wie z.B. unsere Kugelfläche, ergibt sich also gleichzeitig, ob netto etwas in das Innere der Kugelfläche oder aus ihm herausströmt. Kurz und gut, gibt also das Integral $\int_M \omega$ in diesem Falle die pro Zeit durch eine Fläche geströmte Gesamtmenge einer Größe an, wobei $\vec{j}$ die dazugehörige Stromdichte ist.

Im dreidimensionalen Raum gibt es nun noch die Möglichkeit, ein 1-Formfeld entlang einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit, eine glatte Kurve also, zu integrieren. Mit Hilfe der Metrik können wir die Komponenten der 1-Form wieder durch ein Vektorfeld darstellen:

$$\omega_j = g_{jk} F^k. \tag{3.3.18}$$

Dabei stellen wir uns unter $\vec{F}$ ein Kraftfeld vor, in dem sich ein Teilchen bewegt. Als Parameter der Kurve M können wir dann die Zeit wählen und uns die Kurve als Bahn eines sich im Kraftfeld bewegenden Punktteilchens vorstellen. Das besagte Integral ist dann seiner Definition nach

$$\int_M \omega = \int g_{jk} F^j \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \int \vec{F}\vec{v}\mathrm{d}t \tag{3.3.19}$$

was aber nichts anderes als die entlang des Weges durch das Kraftfeld am Teilchen verrichtete Arbeit ist.

3.4 Hodge-Dualisierung

Während es also mathematisch einfacher ist, die Integrale über Formen zu definieren, wobei man wie oben gesehen ohne Skalarprodukt und Metrikkomponenten auskommt, kommt es in der Physik häufiger vor, daß man mit Hilfe des ϵ-Tensors, den wir mit Hilfe der Metrik definieren konnten, die in den Integralen auftretenden p-Formen ($1 \leq p \leq d$), also alternierende $\binom{0}{p}$-Tensoren durch alternierende $\binom{d-p}{0}$-Formen auszudrückt. Dadurch sind wir ganz natürlich zu einer Operation gelangt, die man **Hodge-Dualisierung** nennt.

Wir zeigen jetzt, daß diese Operation umkehrbar ist, also umgekehrt auch p-Formen durch die entsprechenden alternierenden $\binom{d-p}{0}$-Tensoren ausgedrückt werden können. Dazu berechnen wir durch Indexziehen (vgl. z.B. (1.6.8)) die total kontravarianten ϵ-Tensorkomponenten:

$$\epsilon^{j_1 \cdots j_d} = g^{j_1 j_1'} \cdots g^{j_d j_d'} \epsilon_{j_1' \ldots j_d'} = \frac{1}{\sqrt{g}} \Delta^{j_1 \cdots j_d}. \tag{3.4.1}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß $\det(g^{jk}) = 1/\det(g_{jk})$ ist, da die kontravarianten Metrikkomponenten definitionsgemäß die inverse Matrix der kovarianten Metrikkomponenten bilden.

Sind nun $T^{j_1 \cdots j_p}$ die Komponenten eines alternierenden $\binom{p}{0}$-Tensors, wobei „alternierend" wieder bedeuten soll, daß beim Vertauschen zweier beliebiger Indizes die Komponente lediglich ihr Vorzeichen wechselt. Dann ist das **Hodge-Dual** dieses Tensors durch

$$({}^*T)_{k_1 \ldots k_{d-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon_{k_1 \ldots k_{k-p} j_1 \cdots j_p} T^{j_1 \cdots j_p} \tag{3.4.2}$$

definiert. Das sind der Konstruktion zufolge tatsächlich die Komponenten einer $d - p$-Form.

Entsprechend definieren wir das Hodgedual einer p-Form durch seine Komponenten gemäß

$$({}^*\omega)^{k_1 \ldots k_{d-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon^{k_1 \ldots k_{n-p} j_1 \cdots j_p} \omega_{j_1 \cdots j_p} \tag{3.4.3}$$

Nun gilt

$$\epsilon_{j_1 \cdots j_p k_1 \ldots k_{d-p}} \epsilon^{j_1 \cdots j_p k_1' \ldots k_{d-p}'} = p! \det \begin{pmatrix} \delta_{k_1}^{k_1'} & \ldots & \delta_{k_1}^{k_{d-p}'} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{k_{d-p}}^{k_1'} & \ldots & \delta_{k_{d-p}}^{k_{d-p}'} \end{pmatrix}. \tag{3.4.4}$$

Der Beweis bleibe dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.
Wir wenden die Formel zur Berechnung des Doppelduals an:

$$\begin{aligned}
[^*(^*\omega)]_{j_1,\dots j_p} &= \frac{(-1)^{p(d-p)}}{p!(d-p)!}\epsilon^{k_1\dots k_p j'_1\dots j'_{d-p}}\epsilon_{j'_1\dots j'_{d-p}j_1\dots j_p}\omega_{k_1\dots k_p} \\
&= \frac{(-1)^{p(d-p)}}{p!}\det\begin{pmatrix}\delta^{k_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{k_p}_{j_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta^{k_1}_{j_p} & \cdots & \delta^{k_p}_{j_p}\end{pmatrix}\omega_{k_1\dots k_p} \\
&= (-1)^{p(d-p)}\omega_{j_1\dots j_p}.
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Bis auf das Vorzeichen $(-1)^{p(d-p)}$ ist also der Dualisierungsoperator seine eigene Umkehrung.

Kapitel 4

Das allgemeine Stokessche Theorem

Jetzt kommen wir zu einem für die Physik sehr wichtigen Satz, dem **Stokesschen Integralsatz**. Wir werden diesen Satz zunächst für Integrale allgemeiner p-Formen formulieren. Als Spezialfälle im dreidimensionalen Vektorraume fallen dann, wie nebenbei, auch der Stokessche Satz (im engeren Sinne) und der Gaußsche Satz ab!

Wie wir sehen werden, ist der allgemeine Stokessche Satz nichts anderes als die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt $\int_a^b \mathrm{d}x f'(x) = f(b) - f(a)$.

Wir benötigen zunächst jedoch den Begriff des Randes einer Untermannigfaltigkeit. Dabei setzen wir voraus, daß der Rand einer Untermannigfaltigkeit wieder eine Mannigfaltigkeit ist. Als Beispiele im dreidimensionalen Raume haben wir etwa die Kugel, also der dreidimensionale Körper, der durch $\vec{x} \cdot \vec{x} \leq R^2$ charakterisiert ist und deren Rand, nämlich die Sphäre $\vec{x} \cdot \vec{x} = R^2$ vor Augen. Wir müssen dabei jedoch auch auf die Orientierung dieser Mannigfaltigkeiten achten.

Freilich läßt sich auch eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im dreidimensionalen Raume denken (z.B. eine Halbkugelfläche), deren Rand dann eine Kurve (hier also ein Kreis) ist.

4.1 Berandete Untermannigfaltigkeiten

Der Prototyp einer berandeten Untermannigfaltigkeit M im d-dimensionalen reellen Vektorraum ist der **Halbraum** V_{-}. Diesen definieren wir in kartesischen Koordinaten x^j durch $x^1 < 0$. Der Rand der Mannigfaltigkeit ist dann eine $d-1$-dimensionale unberandete Mannigfaltigkeit, welche durch $x^1 = 0$ charakterisiert ist.

Wir betrachten nun weiter den d-dimensionalen Vektorraum V als durch die zugrundegelegte Basis $\vec{e}_j$ orientiert. Jeder Vektor $\vec{a} = x^j \vec{e}_j$ mit $x^1 > 0$ heißt dann **nach außen weisender** Vektor. Weiter heißt eine Basis $\vec{b}_\alpha$ der Tangentialvektoren an den Rand des Halbraums, welcher hier als $d-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von V aufgefaßt wird, relativ zum Halbraum positiv orientiert, wenn $\{a, \vec{b}_\alpha\}_{\alpha=1}^{d-1}$ positiv orientiert ist im Sinne der oben zugrundegelegten Basis $\vec{e}_j$ von V.

Diese Definition läßt sich nun auch in beliebigen krummlinigen Koordinaten fassen und damit auf allgemeinere berandete Untermannigfaltigkeiten erweitern. Nehmen wir als Beispiel die Kugel K_R mit Radius R im 3-dimensionalen Raum V. Diese kann man in Polarkoordinaten durch die Definition

$$K_R = \{\vec{x} = \vec{x}(r, \theta, \phi) | r < R\} \tag{4.1.1}$$

charakterisieren. Bzgl. einer kartesischen Basis $\vec{e}_i$ lautet die entsprechende Parameterdarstellung:

$$x^1 = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad x^2 = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad x^3 = r\cos\vartheta. \tag{4.1.2}$$

Dabei sind die Definitionsbereiche $0 < r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $0 < \vartheta < \pi$. Der Rand ist durch $r = R$ definiert und ist die Kugelschale vom Radius R. Genau genommen fehlt der Kugel die Achse entlang der Polarrichtung $\vec{e}_3$, bzw. deren Rand die beiden Pole, diese bilden aber jeweils eine Nullmenge bzgl. der Mannigfaltigkeit bzw. deren Rand, und da wir die berandeten Mannigfaltigkeiten für das Integrieren benötigen werden, ist das nicht weiter relevant.

Jetzt ist die holonome Basis $\vec{b}_j = \partial\vec{x}/\partial q_j$ von V mit $r = q^1$, $\vartheta = q^2$, $\varphi = q^3$ positiv orientiert bzgl. der ursprünglich zugrundegelegten (in diesem Falle orthonormierten) Basis $\vec{e}_j$, denn die Jacobideterminante ist $r^2\sin^2\vartheta$ (was der Leser aufgefordert ist, nachzurechnen).

Der Rand der Kugel ist durch $r = R$, also die Oberfläche der Kugel, gegeben. Die Tangentialraumbasen sind für jeden Punkt der Oberfläche durch $\vec{b}_1' = \vec{b}_2, \vec{b}_2' = \vec{b}_3$ gegeben. Ein nach außen weisender Vektor ist offenbar durch $\vec{b}_1$ definiert, und folglich sind die Basen $\vec{b}_\alpha'$ für jeden Punkt des Randes relativ zu V positiv orientiert.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Halbkugelfläche, die durch die Parametrisierung

$$H_R = \{\vec{x} = \vec{x}(\vartheta,\varphi)\}, \quad x^1 = R\cos\varphi\sin\vartheta, \quad x^2 = R\cos\varphi\sin\vartheta, \quad x^3 = R\cos\vartheta \tag{4.1.3}$$

mit den Definitionsbereichen $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $0 < \vartheta \leq \pi/2$ definiert ist.

Der Rand ist durch $\vartheta = \pi/2$ definiert. Die Untermannigfaltigkeit ist der Kreis vom Radius R in der durch $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aufgespannten Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung. Er wird durch φ parametrisiert, ist also durch (4.1.3) mit $\vartheta = \pi/2$ gegeben:

$$\partial H_r = \{\vec{x} = \vec{x}(\varphi)\}, \quad x^1 = R\cos\varphi, x^2 = R\sin\varphi. \tag{4.1.4}$$

Weiter ist nun $\vec{b}_1 = \partial\vec{x}/\partial\vartheta$ bei $\vartheta = \pi/2$ „nach außen", also am Rand von der Fläche weg gerichtet und also ∂H_r gemäß der obigen Definition im Halbraum wieder im gleichen Sinne wie H_r orientiert.

Wir wollen im folgenden nur solcherart definierte berandete Untermannigfaltigkeiten betrachten. Die Verallgemeinerung für stückweise mit verschiedenen Parametrisierungen (in der modernen Mathematik oft auch als **Karten** bezeichnet) findet sich in der Literatur.

4.2 Das Stokessche Theorem

Wir betrachten nun zunächst wieder die am einfachsten invariant integrierbaren Objekte, nämlich die p-Formfelder im d-dimensionalen Vektorraume V. Es ist dann natürlich $0 \leq p \leq d$. Sei nun also ω eine $p-1$-Form. Dann ist $\mathrm{d}\omega$ eine p-Form. Diese letztere integrieren wir über eine **berandete Mannigfaltigkeit** M mit der Randmannigfaltigkeit ∂M.

Wir nehmen wieder an, daß M mit q^α ($\alpha \in \{1,\ldots,p\}$) parametrisiert sei. Die dazugehörigen holonomen Basen des Tangentialraumes seien $\vec{b}_\alpha$ und die Dualbasen seien mit $\vec{b}^\alpha$ bezeichnet. Die Mannigfaltigkeit sei durch $q^1 < c$ charakterisiert, so daß der ∂M durch $q^1 = c$ definiert ist. Die Parametrisierung von ∂M ist dann durch $q^2 \ldots q^p$ gegeben, und durch die entsprechenden Basen im gleichen Sinne wie die Untermannigfaltigkeit M orientiert.

Dann gilt nach der Definition des Integrals von p-Formen (3.3.12) über Mannigfaltigkeiten

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_Q \frac{1}{(p-1)!}\partial_{j_1}\omega_{j_2\cdots j_p}\det\left(\frac{\partial(x^{j_1},\ldots,x^{j_p})}{\partial(q^1,\ldots,q^p)}\right)\mathrm{d}^p q. \tag{4.2.1}$$

Die Determinante schreiben wir mit Hilfe des Levi-Civitasymbols als

$$\det\left(\frac{\partial(x^{j_1},\ldots,x^{j_p})}{\partial(q^1,\ldots,q^p)}\right)=\Delta^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial q^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial q^{\alpha_p}}. \tag{4.2.2}$$

Für den Integranden von (4.2.1) ergibt dies

$$\partial_{j_1}\omega_{j_2\ldots j_p}\det\left(\frac{\partial(x^{j_1},\ldots,x^{j_p})}{\partial(q^1,\ldots,q^p)}\right)=\frac{\partial}{\partial q^{\alpha_1}}\omega_{j_2\ldots j_p}\Delta^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\frac{\partial x^{j_2}}{\partial q^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial q^{\alpha_p}}. \tag{4.2.3}$$

Dann können wir das Integral über q^{α_1} sofort ausführen. Für $\alpha_1=1$ läuft dieses der Definition der Mannigfaltigkeit nach von $-\infty$ bis c, wobei wir uns das $(p-1)$-Formfeld, als Funktion der Parameter q^α gedacht, über den eigentlichen Definitionsbereich dieser Parameter hinaus durch 0 fortgesetzt denken. Für $\alpha_1\in\{2,\ldots,p\}$ ist über ganz $\mathbb{R}$ zu integrieren. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung tragen aber all diese Integrale nichts bei, weil entweder das Formfeld vermöge der Fortsetzung verschwindet, oder im Unendlichen des Parameterbereiches ohnehin hinreichend schnell abfallen muß, damit das Integral überhaupt existiert. Das bedeutet, daß bei der Integration von (4.2.3), wie in (4.2.1) beschrieben, nur der erste Summand für $\alpha_1=1$ übrig bleibt, und dieser ist aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

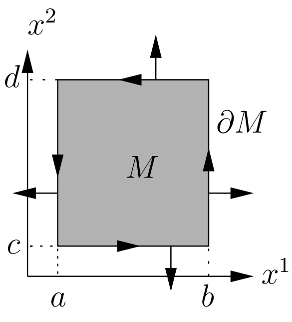
$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{d}\omega&=\int\frac{1}{(p-1)!}\,\omega_{j_2\ldots j_p}\Big|_{q^1=c}\Delta^{1\alpha_2\ldots\alpha_p}\frac{\partial x^{j_2}}{\partial q^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial q^{\alpha_p}}\mathrm{d}^{p-1}(q^2,\ldots,q^p)\\&=\int\frac{1}{(p-1)!}\,\omega_{j_2\ldots j_p}\Big|_{q^1=c}\det\frac{\partial(x^{j_2},\ldots,x^{j_p})}{\partial(q^2,\ldots,q^p)}\mathrm{d}^{p-1}(q^2,\ldots,q^p)\\&=\int_{\partial M}\omega\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Letzteres ist der Fall, weil $\omega|_{q^1=c}$ gerade das $p-1$-Formfeld mit Argumenten auf dem Rand der Mannigfaltigkeit M ist. Das ist das **Stokessche Theorem**:

Ist ω ein stetig differenzierbares $p-1$-Formfeld und M eine differenzierbare p-dimensionale Untermannigfaltigkeit im d-dimensionalen Vektorraum V mit (stückweise) glattem Rand ∂_M, dann gilt

$$\int_M \mathrm{d}\omega=\int_{\partial M}\omega. \tag{4.2.5}$$

Dabei ist darauf zu achten, daß M und ∂M im gleichen Sinne orientiert sind.



Wir haben dies zwar nur für den Fall bewiesen, daß M Lebesgue-fast überall durch eine Parametrisierung mit Parameterbereichen, die einem Halbraum des $\mathbb{R}^p$ entsprechen, gegeben ist. Es ist jedoch leicht, den Satz für allgemeinere Parametrisierungen zu beweisen, insbesondere wenn ein Parameter über ein endliches Intervall laufen muß oder mehr als ein Parameter über einen eingeschränkten Bereich verläuft.

Betrachten wir als Beispiel ein 1-Formfeld ω im zweidimensionalen Vektorraum und für M ein Rechteck, das in bestimmten kartesischen Koordinaten durch $a\le x^1\le b$, $c\le x^2\le d$ gegeben sei. Die Randorientierung und die zugehörigen nach außen weisenden Vektoren sind der nebenstehenden Skizze zu entnehmen.

Auch hier erhalten wir sofort wieder den Stokesschen Satz. Es ist ja

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\omega&=\int_a^b\mathrm{d}x^1\int_c^d\mathrm{d}x^2(\partial_1\omega_2-\partial_2\omega_1)\\&=\int_a^b\mathrm{d}x^1[-\omega_1(x^1,d)+\omega_1(x^1,c)]+\int_c^d\mathrm{d}x^2[\omega_2(b,x^2)-\omega_2(a,x^2)]\\&=\int_{\partial M}\omega.\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Man beachte anhand der Skizze, daß hier in der Tat die Orientierung des Weges zu der Orientierung der Fläche, d.h. die Definition der Richtung der „nach außen weisenden” Vektoren am Rand, korrekt gewählt ist.

4.3 Der allgemeine Gaußsche Satz

Dieser Satz bezieht sich auf Vektorfelder im d-dimensionalen Vektorraum V. Wir erinnern uns, daß wegen (2.3.27) in allgemeinen holonomen Koordinaten V^i des Vektorfeldes

$$\operatorname{div} \vec{V} := \mathrm{D}_i V^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} \tilde{V}^i) \tag{4.3.1}$$

ein Skalarfeld ist[1]. Dieses können wir mit Hilfe von (3.1.7) kovariant über eine d-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit M von V integrieren:

$$\int_M \mathrm{d}V \operatorname{div} \vec{V} = \int_Q \mathrm{d}^d q \sqrt{g} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} \tilde{V}^i). \tag{4.3.2}$$

Wir nehmen wieder an, daß wir Q, eventuell nach Fortsetzung des Feldes durch 0 über seinen Definitionsbereich hinaus, wieder als den Halbraum $Q = \{q | q^1 < c\}$ annehmen dürfen. Dann ist der Rand ∂M durch $q^1 = c$ und $q^2, \ldots, q^d \in \mathbb{R}$ parametrisiert, und zwar relativ zu der zu den q^j gehörigen holonomen Basisvektoren gebildeten Basis von V positiv orientiert.

Wesentlich ist hierbei nun, daß sich die „Jacobideterminante” $\sqrt{g}$ des Integranden herauskürzt und wir daher jeden Summanden von (4.3.2) nach der jeweiligen Koordinate integrieren können, bzgl. der die Ableitung gebildet wird. Dies ist aber nur von 0 verschieden für q^1 und auch da nur an der oberen Grenze c. Damit ist also

$$\int_M \mathrm{d}V \operatorname{div} \vec{V} = \int \mathrm{d}^{d-1}(q^2, \ldots, q^{d-1}) \sqrt{g} \tilde{V}^1(c, q^2, \ldots, q^d) \tag{4.3.3}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung ein Skalar, also eine Invariante unter allgemeinen Koordinatentransformationen ist, muß das auch für die rechte Seite der Fall sein. Wir versuchen also, dies in ein Integral über ein $d-1$-Formfeld umzuformen. Schon der Faktor $\sqrt{g}$ weist darauf hin, daß dies nur das Hodge-Dual von $\vec{V}$ sein kann, welches die kartesischen Komponenten

$$({}^*V)_{j_1 \cdots j_{d-1}} = \Delta_{j_1 \cdots j_d} V^{j_d} \tag{4.3.4}$$

besitzt[2].

Das Integral über dieses $d-1$-Formfeld entlang ∂M ist nun in der Tat gemäß (3.3.11) durch

$$\int_{\partial M} ({}^*V) = \int \mathrm{d}^{d-1}(q^2, \ldots, q^d) \frac{1}{(d-1)!} \left[\Delta_{j_1 \cdots j_d} V^{j_d} \det \frac{\partial(x^{j_1}, \ldots, x^{j_{d-1}})}{\partial(q^2, \ldots, q^d)} \right]_{q^1 = c} \tag{4.3.5}$$

definiert.

Nach der Kramerschen Regel ist aber

$$\det \frac{\partial x^{j_1}, \ldots x^{j_{d-1}}}{\partial q^2, \ldots, q^d} \Delta_{j_1 \cdots j_d} = (d-1)! \sqrt{g} \frac{\partial q^1}{\partial x^{j_d}}, \tag{4.3.6}$$

[1] Hier und im folgenden bedeuten V^i die Komponenten von $\vec{V}$ bzgl. einer beliebigen festen Orthonormalbasis und $\tilde{V}^i$ die Komponenten von $\vec{V}$ bzgl. der holonomen Basis bzgl. beliebiger generalisierter Koordinaten q.

[2] Man beachte daß die kartesischen Komponenten des ϵ-Tensors durch das Levi-Civita-Symbol gegeben sind!

wobei wir ausgenutzt haben, daß wir gemäß (3.1.5) die Determinante der Jacobimatrix der Transformation von kartesischen in verallgemeinerte Koordinaten als $\sqrt{g}$ schreiben können. Weiter ist wegen (2.3.4)

$$\frac{\partial q^1}{\partial x^{j_d}} V^{j_d} = \tilde{V}^1. \tag{4.3.7}$$

Nacheinander (4.3.6) und (4.3.7) in (4.3.5) eingesetzt und das Resultat mit (4.3.3) verglichen ergibt dann den **Gaußschen Satz** in d Dimensionen:

$$\int_M \mathrm{d}V \operatorname{div} \vec{V} = \int_{\partial M} ({}^*V). \tag{4.3.8}$$

Kapitel 5

Das Poincarésche Lemma

Wir haben gesehen, daß für jede Differentialform (2.6.5) gilt, d.h. die Cartanableitung einer Cartanableitung verschwindet stets identisch:

$$\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0 \tag{5.0.1}$$

für jedes alternierende p-Formfeld ω.

Das Poincarésche Lemma beantwortet nun die Frage, inwiefern auch die Umkehrung gilt, also wann aus dem Verschwinden der Cartanableitung eines alternierenden p-Formfeldes geschlossen werden kann, daß das Feld seinerseits Ableitung die Cartanableitung eines $p-1$-Formfeldes ist:

Sei ω ein in einer offenen Teilmenge M des d-dimensionalen euklidischen Vektorraums V definiertes p-Formfeld mit $\mathrm{d}\omega = 0$. Für alle $\vec{x} \in M$ gibt es dann eine Umgebung $U(\vec{x})$ und ein $p-1$-Formfeld Ω, so daß in dieser Umgebung $\omega = \mathrm{d}\Omega$ ist.

Zum Beweis benutzen wir wieder lokale Koordinaten. Da M offen ist, existiert eine ganz in M gelegene Kugel um $\vec{x}$. Diese Kugel ist die in der Behauptung genannte Umgebung $U = U(\vec{x})$. Sei nun $\vec{x}' \in U$, und $\vec{b}^j$ seien beliebige Dualbasisvektoren zu kartesischen Koordinaten und wie üblich

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{j_1 \cdots j_p} \vec{b}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \vec{b}^{j_p}. \tag{5.0.2}$$

Da U eine Kugelumgebung mit Mittelpunkt $\vec{x}$ ist und $\vec{x}' \in U$ liegt, ist auch die ganze Verbindungsstrecke in U. Weiter sind die durch (5.0.2) definierten Komponenten des p-Formfeldes ω voraussetzungsgemäß in ganz U differenzierbar, also auch stetig und folglich entlang der Verbindungsstrecke von U integrierbar. Wir setzen nun

$$\Omega(\vec{x}') = \frac{1}{p!}\sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha-1}\int_0^1 \mathrm{d}t\; t^{p-1}(x'^{j_\alpha} - x^{j_\alpha})\omega_{j_1 \cdots j_p}[\vec{x} + t(\vec{x}' - \vec{x})]\vec{b}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\vec{b}^{j_\alpha}} \wedge \cdots \wedge \vec{b}^{j_p}. \tag{5.0.3}$$

Dabei bedeutet das Dach über dem α-ten Faktor in dem Keilprodukt, daß dieses in dem Produkt wegzulassen ist. Freilich muß gemäß der Einsteinschen Summationskonvention über j_α summiert werden, weil in dem Produkt aus den Koordinatendifferenzen und den Komponenten von ω ja j_α vorkommt. In (5.0.3) wird also tatsächlich ein $p-1$-Formfeld definiert, weil durch diese Indexkontraktion die Komponenten eines vollständig antisymmetrischen Tensorfeldes entstehen, die dann wiederum mit den dazugehörigen Basisvektoren in dem Keilprodukt kontrahiert werden.

Zum Beweis schreiben wir zunächst die Bedingung $\mathrm{d}\omega = 0$ in Komponenten:

$$\partial_{[j_{p+1}}\omega_{j_1 \cdots j_p]} = 0, \tag{5.0.4}$$

wobei die eckigen Klammern die totale Antisymmetrisierung des Ausdrucks in den $p+1$ Indizes bedeuten. Nun sind aber die Komponenten von ω schon total antisymmetrisch, und wir können diese Gleichung auch in der Form

$$\partial_{[j_{p+1}}\omega_{j_1\cdots j_p]}=\sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha-1}\partial_{j_\alpha}\omega_{j_{p+1}j_1\cdots\widehat{j_\alpha}\cdots j_p} \tag{5.0.5}$$

schreiben. Auch hier bedeutet das Dach über einem Index, daß dieser auszulassen ist.

Bilden wir nun mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel die Cartanableitung von (5.0.3), können wir (5.0.5) unmittelbar anwenden. Es ergibt sich dann nach einigen Umformungen:

$$\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{p!}\int_0^1\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{t^p\omega_{j_1\cdots j_p}[\vec{x}+t(\vec{x}'-\vec{x})]\right\}=\omega, \tag{5.0.6}$$

wobei wir im letzten Schritt den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewandt haben, was hier voraussetzungsgemäß erlaubt ist.

Damit ist das Poincarésche Lemma bewiesen.

Kapitel 6

Traditionelle Schreibweise im $\mathbb{R}^3$

Um nun dem Titel dieses Skripts gerecht zu werden, also die „klassische" Vektoranalysis zu behandeln, wollen wir nun zur traditionellen Schreibweise im $\mathbb{R}^3$ kommen und einige Anwendungen aus der klassischen Physik behandeln. Insbesondere die Fluiddynamik bietet nämlich schöne Veranschaulichungsmöglichkeiten der bisher recht abstrakten Begriffe.

Die bisherigen Untersuchungen zu den Integralsätzen haben nun alternierende Formen und Duale betroffen. In der klassischen Physik sind diese Integralsätze, angewandt im euklidischen $\mathbb{R}^3$ der Ausgangspunkt für die Feldtheorie, wobei man allerdings die Vektor- und Tensorfelder in kontravarianten Komponenten ausdrückt. Dabei definiert man nun bestimmte in den Anwendungen oft benötigte Manipulationen, hinter denen eigentlich der oben entwickelte Formenkalkül steckt, als die Differentialoperatoren grad, div und rot und formuliert diese in kontravarianten Komponenten. Der Stokessche Satz und das Poincarésche Lemma werden dann mit diesen Operationen statt dem einheitlicheren Formenkalkül ausgedrückt. Es werden auch meist krummlinige Orthonormalkoordinaten verwendet, die wir bereits in Abschnitt 2.4 eingeführt haben. In diesem Kapitel wollen wir diese „traditionellen" Vektoroperatoren einführen und ihre physikalische Bedeutung an einigen Beispielen aus der Fluid- und Elektrodynamik veranschaulichen.

6.1 Die traditionellen Differentialoperatoren

Im $\mathbb{R}^3$ gibt es nun naturgemäß relativ wenig alternierende Formen, eben nur die der Stufen 0 bis 3. Betrachtet man etwa eine alternierende Form vierter Stufe, wären deren Komponenten ω_{jklm} bzgl. einer beliebigen Dualbasis total antisymmetrisch bei Vertauschen der Indizes. Diese können nun aber eben nur die drei Werte $\{1,2,3\}$ annehmen, d.h. von den Indizes $jklm$ wären wenigstens zwei gleich und folglich $\omega_{jklm} = 0$, d.h. im $\mathbb{R}^3$ gibt es für $n > 3$ nur die triviale n-Form.

Weiter kann man aber mit Hilfe der Hodge-Dualisierung alle Formen durch Skalare und Vektoren ausdrücken. In der Tat besitzt eine Zweiform ω nur $\binom{3}{2} = 3$ unabhängige Komponenten ω_{jk}, und die lassen sich mit Hilfe des ϵ-Tensors umkehrbar eindeutig in kontravariante Vektorkomponenten abbilden:

$$({}^*\omega)^l = \frac{1}{2}\epsilon^{jkl}\omega_{kl}. \tag{6.1.1}$$

Ebenso ist eine Dreiform ρ durch Dualisierung umkehrbar eindeutig auf einen Skalar abzubilden:

$${}^*\rho = \frac{1}{3!}\epsilon^{jkl}\rho_{jkl}. \tag{6.1.2}$$

Weiter besitzen wir im euklidischen $\mathbb{R}^3$, der ja den Raum sowohl in der Newtonschen als auch in der speziell relativistischen Physik beschreibt, das Skalarprodukt und damit den Metriktensor. Wir können also alle kovarianten Tensorkomponenten ebenso gut durch kontravariante Komponenten ausdrücken. In der klassischen Physik tut man genau dies.

Daher müssen wir nun die im Formenkalkül formulierten Differentialoperatoren, die aufgrund der oben bewiesenen Integralsätze für die Physik besonders wichtig sind, in Differentialoperatoren, die auf Skalarfelder und Vektorfelder, ausgedrückt durch kontravariante Komponenten, wirken, übersetzen. In allgemeinen Räumen haben wir die dabei verwendete Methode schon bei der Definition der Divergenz gesehen. Deren Einführung rechtfertigte sich dann später u.a. durch die Gültigkeit des Gaußschen Satzes in euklidischen Räumen der allgemeinen Dimension d, und natürlich haben wir auch im $\mathbb{R}^3$ den Gaußschen Satz:

$$\int_V \mathrm{d}V \operatorname{div} \vec{V} = \int_{\partial V} \mathrm{d}^2\vec{F}\,\vec{V}. \tag{6.1.3}$$

Beim Beweis des allgemeinen Gaußschen Satzes haben wir gesehen, daß sich dieser über das Hodgedual von $\vec{V}$ auf den Stokesschen Integralsatz, angewandt auf die Zweiform ${}^*\vec{V}$ zurückführen läßt, d.h. der Stokessche Satz für Zweiformenfelder im $\mathbb{R}^3$ ist äquivalent durch den Gaußschen Satz (6.1.3) ausgedrückt.

Betrachten wir nun den Stokesschen Satz für ein Einsformfeld A. Da wir in der traditionellen Vektoranalysis mit kontravarianten Komponenten, also eigentlich mit Vektorfeldern arbeiten wollen, geben wir uns ein Vektorfeld $\vec{A}$ vor und schreiben die kovarianten Komponenten mit Hilfe der Komponenten der Metrik:

$$A_j = g_{jk}A^k. \tag{6.1.4}$$

Damit haben wir also die Einsform selbst auf ein Vektorfeld zurückgeführt.

Jetzt müssen wir dA übersetzen. Diese Cartanableitung ist hier natürlich ein Zweiformfeld, das wir durch Dualisieren wieder auf ein Vektorfeld abbilden. Diese Operation heißt **Rotation**[1] des Vektorfeldes $\vec{A}$, also

$$\operatorname{rot}\vec{A} = {}^*(\mathrm{d}A). \tag{6.1.5}$$

In Komponenten läßt sich diese Operation besonders einfach in kartesischen Koordinaten ausdrücken. Dann ist ja $g_{jk} = \delta_{jk} = \text{const}$ und insbesondere $\mathrm{d}\vec{b}^k = 0$, also:

$$\mathrm{d}A = \partial_j A_k \vec{b}^j \wedge \vec{b}^k. \tag{6.1.6}$$

Weiter ist $\epsilon^{jkl} = \Delta^{jkl}$, also

$${}^*\mathrm{d}A = \Delta^{jkl}\partial_j A_k \vec{b}_l. \tag{6.1.7}$$

Die Komponenten der Rotation bzgl. der kartesischen Basis $\vec{b}_l$ lauten wegen $A_k = \delta_{kk'}A^{k'}$ also

$$(\operatorname{rot}\vec{A}) = \begin{pmatrix} \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 \\ \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 \\ \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 \end{pmatrix}. \tag{6.1.8}$$

Man beachte, daß hier die mnemotechnischen Vorteile der Indexstellung vollkommen verlorengegangen ist und daß folglich (6.1.8) **nur in kartesischen Koordinaten** korrekt ist. Wir kommen im nächsten Abschnitt auf den Ausdruck der traditionellen Differentialoperatoren bzgl. krummliniger Orthonormalkoordinaten noch zu sprechen.

Jetzt wenden wir uns aber zunächst dem Stokesschen Satz für diesen Fall zu. Im Formenkalkül lautet er, wie jeder Stokessche Satz einfach

$$\int_F \mathrm{d}A = \int_{\partial F} A. \tag{6.1.9}$$

[1] in der englischen und amerikanischen Literatur curl

Dabei ist F eine zweidimensionale, berandete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ mit Rand ∂F. Nun ist aber $\mathrm{d}A = {}^*(\text{rot}\,\vec{A})$, so daß wir schreiben können

$$\int_F \mathrm{d}A = \int_F \mathrm{d}^2\vec{F}\,\text{rot}\,\vec{A}. \tag{6.1.10}$$

Das Integral über ∂F ist einfach das Wegintegral entlang des Randes von F und wird in der traditionellen Schreibweise zu

$$\int_{\partial F} A = \int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{x}\,\vec{A}. \tag{6.1.11}$$

Dieser spezielle Stokessche Satz lautet also in seiner traditionellen Schreibweise im $\mathbb{R}^3$

$$\int_F \mathrm{d}^2\vec{F}\,\text{rot}\,\vec{A} = \int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{x}\,\vec{A}. \tag{6.1.12}$$

Besonders einfach ist der Fall eines Skalarfeldes ϕ, also eines Nullformfeldes. Dessen Cartanableitung ist eine Einsform, die wir mit Hilfe des Metriktensors als Vektorfeld schreiben. Bzgl. einer kartesischen Basis ist also

$$\mathrm{d}\phi = \partial_j\phi\vec{b}^j = \delta^{kj}\partial_j\phi\vec{b}_k := (\text{grad}\,\phi)^k\vec{b}_k. \tag{6.1.13}$$

In kartesischen Koordinaten ist der Gradient also

$$\text{grad}\,\phi = \begin{pmatrix} \partial_1\phi \\ \partial_2\phi \\ \partial_3\phi \end{pmatrix}. \tag{6.1.14}$$

Der Stokesche Satz nimmt für diesen Fall die Gestalt

$$\int_s \mathrm{d}\phi = \int_s \mathrm{d}\vec{x}\,\text{grad}\,\phi = \phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1) \tag{6.1.15}$$

an. Dabei sind $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ die Ortsvektoren von Anfangs- und Endpunkt einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit (also eines Weges) s.

Man beachte, daß allgemein die Stokesschen Sätze sich auf Vektorfelder beziehen, die im ganzen $\mathbb{R}^3$ mitsamt ihren Ableitungen wohldefiniert und stetig sind. Insbesondere ist dann das Integral (6.1.15) von der konkreten Gestalt des Weges unabhängig. Wir werden weiter unten noch Beispiele angeben, wo ein Vektorfeld zwar überall in seinem Definitionsbereich durch den Gradienten eines Skalarfeldes gegeben ist, wo aber das Integral entlang bestimmter Wege durchaus von der Gestalt des Weges abhängig ist. Hier spielt allerdings das Lemma von Poincaré eine entscheidende Rolle, und dieses gilt nur **lokal**. Wir werden dies weiter unten in einem gesonderten Abschnitt noch ausführlich behandeln. Zunächst wenden wir uns allerdings dem Audruck der nunmehr definierten Differentialoperatoren in Komponenten bzgl. allgemeiner krummliniger Orthonormalkoordinaten zu, weil diese für die Anwendungen wichtig sind.

6.2 Die Differentialoperatoren in krummlinigen Orthonormalkoordinaten

Da wir die Vektoroperatoren über die Cartanableitungen definiert haben, brauchen wir nur die Rechnungen aus Abschnitt 2.4 zu vervollständigen. Es seien also (q^k) generalisierte Orthogonalkoordinaten, $\vec{b}'_k$ die dazugehörigen holonomen Basisvektoren und $\vec{b}'^j$ deren Dualbasisvektoren. Weiter wollen wir wie dort auch hier vereinbaren, daß in Formeln, die die Komponenten bzgl. der normierten Basisvektoren enthalten, die

Summationskonvention außer Kraft gesetzt sei, d.h. alle Summen über Indizes explizit notiert werden. Für die normierten Basisvektoren gelten dann (2.4.1) und (2.4.4), also

$$h_j = \sqrt{\vec{b}'_j \vec{b}'_j}, \quad \vec{e}_j = \frac{1}{h_j} \vec{b}'_j. \tag{6.2.1}$$

Beginnen wir mit dem Gradienten. Sei also ϕ ein Skalarfeld. Wegen (2.6.4) ist also

$$\mathrm{d}y\phi = \partial_j \phi \vec{b}'^j = \sum_j \frac{1}{h_j} (\partial_j \phi) \vec{e}^j = \sum_j \frac{1}{h_j} (\partial_j \phi) \vec{e}_j. \tag{6.2.2}$$

Dabei haben wir benutzt, daß bzgl. der $\vec{e}_j$ die Metrikkomponenten δ_{jk} sind, weil die $\vec{e}_j$ ja die orthonormierten lokalen Basisvektoren bezeichnen. Wir haben für die Komponenten des Gradienten bzgl. der krummlinigen Orthonormalbasis also

$$\operatorname{grad} \phi = \sum_j \vec{e}_j \frac{1}{h_j} \partial_j \phi. \tag{6.2.3}$$

Für die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{V}$ haben wir bereits in (2.4.10)

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_j \partial_j \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_j} \tilde{A}^j \right), \tag{6.2.4}$$

gefunden, wobei wir die Beziehung

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \tag{6.2.5}$$

ausgenutzt haben. Die Komponenten Rotation eines Vektorfeldes bestimmen wir am einfachsten, indem wir zunächst die Definition (6.1.5) mit Hilfe der holonomen Basis ausdrücken:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \sum_{jkl} \epsilon^{jkl} \vec{b}'_j \partial_k A_l. \tag{6.2.6}$$

Wir wollen dies nun in Bezug auf die normierte Basis und mittels der dazugehörigen kontravarianten Komponenten $\tilde{A}^l$ ausdrücken. Dazu verwenden wir (6.1.4, 3.4.1, 6.2.1, 6.2.5) um nach einigen einfachen Umformungen das folgende Resultat zu erhalten:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{jkl} \vec{e}_j h_j \Delta^{jkl} \partial_k (h_l \tilde{A}^l). \tag{6.2.7}$$

6.2.1 Kugelkoordinaten

Sei $\vec{b}_j$ eine kartesische Basis. Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) mit der 3-Achse als Polarachse sind dann durch

$$\vec{r} = r(\sin\vartheta \cos\varphi \, \vec{b}_1 + \sin\vartheta \sin\varphi \, \vec{b}_2 + \cos\vartheta \, \vec{b}_3), \tag{6.2.8}$$

wo $r > 0$, $0 < \vartheta < \pi$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$. Die holonomen Basisvektoren sind

$$\begin{aligned}
\vec{b}'_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin\vartheta \cos\varphi \, \vec{b}_1 + \sin\vartheta \sin\varphi \, \vec{b}_2 + \cos\vartheta \, \vec{b}_3, \\
\vec{b}'_2 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = r(\cos\vartheta \cos\varphi \, \vec{b}_1 + \cos\vartheta \sin\varphi \, \vec{b}_2 - \sin\vartheta \, \vec{b}_3), \\
\vec{b}'_3 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r \sin\vartheta(-\sin\varphi \, \vec{b}_1 + \cos\varphi \, \vec{b}_2).
\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

Diese Vektoren sind orthogonal zueinander und in dieser Reihenfolge (relativ zum vorgegebenen kartesischen Basissystem) rechtshändig orientiert. Die Normen sind

$$h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = r\sin\vartheta. \tag{6.2.10}$$

Die normierten Basisvektoren ergeben sich somit zu

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{b}_1 + \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{b}_2 + \cos\vartheta\,\vec{b}_3,\\
\vec{e}_2 &= \cos\vartheta\cos\varphi\,\vec{b}_1 + \cos\vartheta\sin\varphi\,\vec{b}_2 - \sin\vartheta\,\vec{b}_3,\\
\vec{e}_3 &= -\sin\varphi\,\vec{b}_1 + \cos\varphi\,\vec{b}_2.
\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

Die Differentialoperatoren drücken sich in Kugelskoordinaten schließlich durch

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\phi &= \vec{e}_1\frac{\partial\phi}{\partial r} + \vec{e}_2\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} + \vec{e}_3\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi},\\
\operatorname{div}\vec{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A^1)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial(\sin\vartheta\tilde{A}^2)}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\tilde{A}^3}{\partial\varphi}\right],\\
\operatorname{rot}\vec{A} &= \vec{e}_1\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial(\sin\vartheta\tilde{A}^3)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\tilde{A}^2}{\partial\varphi}\right] + \vec{e}_2\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\tilde{A}^1}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\tilde{A}^3)}{\partial r}\right]\\
&\quad + \vec{e}_3\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\tilde{A}^2)}{\partial r} - \frac{\partial\tilde{A}^1}{\partial\vartheta}\right]
\end{aligned} \tag{6.2.12}$$

aus.

6.2.2 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten sind durch

$$\vec{r} = \rho(\cos\varphi\vec{b}_1 + \sin\varphi\vec{b}_2) + z\vec{b}_3 \tag{6.2.13}$$

für $\rho > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $z \in \mathbb{R}$ definiert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&h_1 = h_3 = 1,\ h_2 = \rho\\
&\vec{e}_1 = \cos\varphi\vec{b}_1 + \sin\varphi\vec{b}_2,\\
&\vec{e}_2 = -\sin\varphi\vec{b}_1 + \cos\varphi\vec{b}_2,\\
&\vec{e}_3 = \vec{b}_3.
\end{aligned} \tag{6.2.14}$$

Die Formeln für die Differentialoperatoren lauten

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\phi &= \vec{e}_1\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \vec{e}_2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \vec{e}_3\frac{\partial\phi}{\partial z},\\
\operatorname{div}\vec{A} &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho\tilde{A}^1)}{\partial\rho} + \frac{\partial\tilde{A}^2}{\partial\varphi}\right] + \frac{\partial\tilde{A}^3}{\partial z},\\
\operatorname{rot}\vec{A} &= \vec{e}_1\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{A}^3}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\tilde{A}^2}{\partial z}\right) + \vec{e}_2\left(\frac{\partial\tilde{A}^1}{\partial z} - \frac{\partial\tilde{A}^3}{\partial\rho}\right) + \vec{e}_3\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho\tilde{A}^2)}{\partial\rho} - \frac{\partial\tilde{A}^1}{\partial\vartheta}\right].
\end{aligned} \tag{6.2.15}$$