

# Unschärferelation und relativistische Quantentheorie

Hendrik van Hees

22. Mai 2001

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Die Heisenbergsche Unschärferelation</b>	<b>1</b>
<b>2 Die Orts- Impulsunschärfe</b>	<b>2</b>
<b>3 Energie-Zeitunschärfe</b>	<b>3</b>
<b>4 Energieunschärfe und Meßprozeß</b>	<b>5</b>
<b>5 Impulsmessungen</b>	<b>6</b>
<b>6 Implikationen für die Ortsunschärfe</b>	<b>7</b>
<b>7 Implikationen für den Begriff des elektromagnetischen Feldes</b>	<b>9</b>

## 1 Die Heisenbergsche Unschärferelation

Die Unschärferelation der Quantentheorie folgt aus der positiven Definitheit des Skalarprodukts im Hilbertraum und der Hermitezität der Operatoren, die Observablen im Rahmen der Quantentheorie repräsentieren (vgl. meinen FAQ-Artikel Grundlagen der Quantentheorie). Für die Bezeichnungen und Grundlagen sei auf diesen Artikel verwiesen.

Es ist für das folgende wichtig, daß sich alle Größen, die wir bei der Herleitung der Unschärferelation zur *gleichen Zeit* zu nehmen sind, d.h. alle Operatoren und Zustände, mit denen im folgenden manipuliert wird, sind mit dem gleichen Zeitargument versehen, das wir der Übersichtlichkeit halber nicht mitnotieren. Den folgenden Abschnitt können wir dem obengenannten FAQ-Artikel einfach entnehmen.

Seien also  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  beliebige zu Observablen  $A$  bzw.  $B$  gehörige Operatoren. Dann sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wegen der positiven Semidefinitheit des Skalarprodukts gilt

$$\langle (\mathbf{A} + i\lambda\mathbf{B})\psi | (\mathbf{A} + i\lambda\mathbf{B})\psi \rangle \geq 0. \quad (1)$$

Wegen der Hermitezität der Operatoren können wir dafür auch schreiben

$$\langle \psi | (\mathbf{A} - i\mathbf{B})(\mathbf{A} + i\mathbf{B}) | \psi \rangle \geq 0. \quad (2)$$

Ausmultiplizieren des Operatorprodukts gibt dann

$$\lambda^2 b^2 + 2c\lambda + a^2 \geq 0 \text{ mit } b^2 = \langle \mathbf{B}^2 \rangle_\psi, \quad c = \frac{i}{2} \langle [\mathbf{A}, \mathbf{B}]_- \rangle_\psi, \quad a^2 = \langle \mathbf{A}^2 \rangle_\psi. \quad (3)$$

Aufgrund der Hermitezität der Operatoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  sind die Koeffizienten des quadratischen Polynoms reell, und da es für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  positiv semidefinit ist, kann sein Radikand höchstens 0 sein. Daraus ergibt sich dann die Ungleichung

$$a^2 b^2 \geq c^2 \text{ oder } |a||b| \geq |c|. \quad (4)$$

Setzen wir hierin statt  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  die Operatoren  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \langle A \rangle_\psi$  und  $\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \langle B \rangle_\psi$  ein, folgt daraus die allgemeine Unschärferelation

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\mathbf{A}, \mathbf{B}]_- \rangle_\psi \right|, \quad (5)$$

wobei  $\Delta A$  die Standardabweichung der Observablen  $\mathbf{A}$  aufgrund der Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Meergergebnisse ist, die durch den Zustand des Systems  $|\psi\rangle$  gegeben ist:

$$\Delta A = \sqrt{\langle \psi | (\mathbf{A} - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle}. \quad (6)$$

Analog ist natürlich auch  $\Delta B$  definiert.

## 2 Die Orts- Impulsunschärfe

Setzt man nun insbesondere  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{p}_x$  für  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  ein, folgt aus der Heisenbergalgebra die bekannte Orts-Impulsunscharferelation:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (7)$$

Die Unschärferelation beantwortet nun klar die Frage, was bei der Messung einer mit dem Systemzustand nicht verträglichen Observable passiert. Es ist i.a. gar nicht möglich, beide Observable gleichzeitig exakt zu messen (im Fall von Ort und Impuls ist das sogar immer der Fall, d.h. unabhängig vom Meergergebnis, denn die rechte Seite hängt in diesem Fall nicht vom Zustand  $|\psi\rangle$  des Systems ab, in dem es sich zum Zeitpunkt der Messung befindet).

Dies bedeutet aber, da es sinnlos ist, zu behaupten, einem Teilchen käme überhaupt gleichzeitig ein scharfer Ort und Impuls zu. Es ist wohl eine der am schwierigsten vorzustellende Implikation der Quantentheorie, da nicht alle sinnvoll definierbaren Observablen simultan am System simultan einen scharfen Wert besitzen können. Über sie sind nur Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich.

Um doch zu einer etwas greifbareren Anschauung zu gelangen, wollen wir uns noch ein wenig mit der Orts- und Impulsunschärfe eines Teilchens mit Spin 0 im Rahmen der *nichtrelativistischen Quantentheorie* befassen. Dabei wollen wir uns der Einfachheit halber auf die Bewegung in einer Raumdimension beschränken.

Der Zustand eines solchen Teilchen kann vollständig durch die Wellenfunktionen  $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$  beschrieben werden. Betrachten wir als einfaches Beispiel ein Gausches Wellenpaket, also

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta x (2\pi)^{1/4}}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{4\Delta x^2} \right]. \quad (8)$$

Dies beschreibt ein Teilchen, das sich *im Mittel* am Punkt  $x = x_0$  befindet, sich aber auch mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichte  $w(x) = |\psi(x)|^2$  an jedem beliebigen Punkt befinden kann. Die Standardabweichung ist  $\Delta x$ .

Die Bedeutung der Unschärferelation wird nun deutlich, wenn wir den gleichen Zustand im Impulsraum betrachten. Es gilt

$$\psi(p) = \langle p | \psi \rangle = \int dx \langle p | x \rangle \psi(x). \quad (9)$$

Nun ist aber

$$\langle p | x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\frac{xp}{\hbar}\right), \quad (10)$$

und wir erhalten

$$\psi(p) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{\Delta x}{\hbar}} \exp\left(-\frac{\Delta x^2 p^2 + i\hbar p x_0}{\hbar^2}\right). \quad (11)$$

Der Impulserwartungswert ist 0, und die Impulsunschärfe

$$\Delta p^2 = \int dp p^2 |\psi(p)|^2 = \frac{\hbar}{4\Delta x^2}, \quad (12)$$

d.h. die Gaußverteilung ist gerade die Wellenfunktion, die „minimaler Unschärfe“, also  $\Delta x \Delta p = \hbar/2$  entspricht.

Damit ist aber die Unschärferelation für das Paar konjugierter Variablen „Ort“ und „Impuls“ wellenmechanisch verständlich geworden: Eine scharf gepeakte Ortswellenfunktion besitzt eine breite Fouriertransformierte, und das ist gerade die Impulswellenfunktion.

### 3 Energie-Zeitunschärfe

Aufgrund der Sonderstellung, den die Zeit in der Physik besitzt, muß die quantentheoretische Unschärfe, die die genaue Lokalisierung eines Ereignisses in der Zeit verhindert, speziell behandelt werden.

Betrachten wir den Sachverhalt zunächst physikalisch. In der Newtonschen Mechanik kann man die Zeit in einem gegebenen Inertialsystem dadurch messen, daß man einen Probekörper frei laufen läßt. Nach dem Newtonschen Axiom hat er dann eine konstante Geschwindigkeit und bewegt sich geradlinig, so daß man die Zeitdauer, mit der der Körper eine bestimmte Strecke durchläuft als Zeiteinheit definieren kann.

In der Praxis muß man natürlich eine immer und überall realisierbare Geschwindigkeit besitzen, und dabei hilft uns nun die Relativitätstheorie: Mit dem Licht haben wir ein physikalisches Phänomen, das sich im Vakuum unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle immer mit der gleichen Geschwindigkeit  $c$  bewegt und dadurch die Zeitmessung absolut auf eine Längenmessung reduzieren läßt. Dies findet man im Detail in Einsteins berühmtem Artikel zur Relativitätstheorie [Ein05] beschrieben.

Im Internationalen Einheitensystem (SI) geht man aus meßtechnischen Gründen anders vor. Hier wird die Zeiteinheit Sekunde als Basiseinheit durch den folgenden „Gesetzestext“ definiert: Die Sekunde ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids  $^{133}\text{Cs}$  entsprechenden Strahlung.

Eine Atomuhr wird nun dadurch realisiert, daß Cäsiumdampf in einen Hohlraumresonator gebracht wird, wobei mittels einer Stern-Gerlachapparatur nur diejenigen Atome aus einem Ofen aussortiert werden, die sich in einem bestimmten der beiden Grundzustandsniveaus befinden. Diese Cäsiumatome werden durch Einstrahlung von Mikrowellen dazu gebracht, den Hyperfeinübergang auszuführen. Danach können die Atome, die den Zustand gewechselt haben, wieder aussortiert werden. Je nach Frequenz der eingestrahlten Mikrowellenstrahlung sind das verschieden viele. Diese Zahl nimmt aber bei der Übergangsfrequenz der Hyperfeinstruktur-niveaus (Energiedifferenz zwischen beiden Zuständen  $/\hbar$ ) ein Maximum an. Dadurch kann die Frequenz des Mikrowellensenders sehr genau auf diese Übergangsfrequenz, die durch den Gesetzestext des SI auf 9 192 631 770 1/s festgelegt ist. Man muß also jetzt nur noch diese Zahl Schwingungen des Mikrowellensenders abzählen und hat dadurch die Zeiteinheit Sekunde realisiert.

Auch diese Zeit weist noch eine prinzipielle minimale Ungenauigkeit (die freilich durch den Meßfehler noch übertroffen wird) aufgrund der Quantentheorie auf: Der atomare Übergang weist nämlich seinerseits eine Unschärfe auf. Aufgrund der Quantenelektrodynamik existieren nämlich auch im Vakuum Quantenfluktuationen, die oft auch als *virtuelle Teilchen* bezeichnet werden. Darauf kommen wir weiter unten nochmals ausführlich zu sprechen. Das angeregte Atom wird durch diese „Wechselwirkung mit dem virtuellen Strahlungsfeld“ also selbst, wenn es allein im absoluten Vakuum gehalten würde, unter Aussendung eines Photons in den Grundzustand wechseln. Dieses Phänomen bezeichnet man als *spontane Emission*, deren quantentheoretische Erklärung in dem eben angedeuteten Sinne von Dirac stammt. Die Frequenz dieses Photons entspricht nun der Energiedifferenz der Niveaus, aber eben nur mit einer durch den statistischen Charakter der Quantenfluktuationen bedingten Unsicherheit: Die Spektrallinie weist also eine Breite auf, die man in diesem Zusammenhang als „natürliche Linienbreite“ bezeichnet.

Zu dieser quantentheoretischen nie zu unterbietenden Unsicherheit kommen natürlich noch weitere hinzu, wie z.B. die Dopplerverbreiterung, die sich daraus ergibt, daß sich die Atome im Hohlraum in einer thermischen (also stochastischen) Bewegung befinden, und diese Bewegung eine Dopplerverschiebung der Spektrallinien bewirkt. Um diese Unsicherheit wollen wir uns aber im Sinne eines idealisierten Gedankenexperiments nicht kümmern.

Kommen wir zur Erklärung der prinzipiellen Energie-Zeitunschärfe aber zunächst einmal auf das einfache Gedankenexperiment zurück, bei der die Zeit durch ein in einem Inertialsystem sich frei bewegenden Teilchen über eine Ortsmessung definiert ist. Ein freies Teilchen besitzt aber eine Ortsunschärfe, die sogar mit der Zeit noch zunimmt (vgl. die diesbezügliche Rechnung in Grundlagen der Quantentheorie).

Das bedeutet, daß die Abschnitte, die man zur Definition der Zeiteinheit benutzt nicht genauer als durch die Unschärferelation definiert werden können. Dies läßt sich sehr leicht mit Hilfe der allgemeinen Unschärferelation (5) zeigen. Dazu bilden wir die Unschärferelation für den Hamiltonoperator und den Ortsoperator:

$$\Delta x \Delta E \geq \frac{1}{2} | -i \langle [\mathbf{x}, \mathbf{H}]_- \rangle |. \quad (13)$$

Der unter dem Erwartungswert stehende Operator ist aber die quantenmechanische Zeitableitung des Ortsoperators, also der Geschwindigkeitsoperator, und der Erwartungswert ist nach dem Ehrenfestschen Theorem (vgl. Grundlagen der Quantentheorie) bis auf einen Faktor  $\hbar$  gerade die Ableitung des Ortserwartungswertes nach der Zeit. Im Bild der Einteilchenwellenmechanik entspricht dies für freie Teilchen (also bei Abwesenheit von anomaler Dispersion) der Gruppengeschwindigkeit der Welle. Die so definierte Geschwindigkeit bezeichnen wir mit  $v$ , und

dann liest sich die Unschärferelation (13):

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (14)$$

Dabei ist  $\Delta t = \Delta x/|v|$ . Im Einteilchenwellenbild ist das gerade die Zeit, die der Schwerpunkt der Welle (Gruppengeschwindigkeit!) benötigt, um die Ortsunschärfe zu durchlaufen, und die Ortsunschärfe gibt ja ein Maß dafür an, mit welcher Genauigkeit für eine Ortsmessung ich zu rechnen habe. Definieren wir also die Zeit über die Geschwindigkeit freier Teilchen in einem Inertialsystem gelangen wir mit (14) zwangsläufig zu der obigen Energie-Zeit-Unschärferelation. Sie ist aber eine Folgerung aus der Ortsunschärferelation aufgrund der Tatsache, daß die Zeit lediglich ein Parameter, der die Kausalfolge von Ereignissen bezeichnet, und keine Observable per se ist. Sie läßt sich daher immer nur indirekt über observable Größen bestimmen, in unserem Fall durch die Abmessung von zurückgelegten Wegstrecken eines freien Teilchens im Inertialsystem (oder bei der internationalen Definition der Sekunde durch das Abzählen von Schwingungen eines Mikrowellensenders).

## 4 Energieunschärfe und Meßprozeß

Wir wollen uns noch ein bißchen genauer mit dem Meßvorgang selber beschäftigen. Diese Betrachtung wird auch etwas genauer aufzeigen, in welchem Sinne die Unschärferelation auf der unvermeidlich notwendigen Wechselwirkung zwischen Meßapparat und Meßobjekt beruht. Diese wichtige Interpretationshilfe für die Quantentheorie kommt deshalb nicht so deutlich zum Ausdruck, weil wir oben die Meßapparatur durch die formale Behandlung der Quantentheorie eliminiert haben. Wir werden jetzt den Meßapparat sehr schematisch wieder einführen und dabei der Diskussion in [LL77] folgen.

Wir beschreiben ihn einfach durch eine zeitunabhängige Störung des Systems, die zur Zeit  $t = 0$  eingeschaltet wird. Wir gehen davon aus, daß die Wechselwirkung zwischen Meßobjekt und Meßapparatur sehr klein gemacht werden kann, so daß die Anwendung der Störungstheorie in erster Ordnung gerechtfertigt ist.

Wir behandeln also ein Quantensystem, das aus Meßobjekt (Teilchen) und Meßapparat besteht. Die Meßdauer sei  $\Delta t$ . Die Energien von Teilchen und Meßapparatur seien vor der Messung  $E_t$  und  $E_m$  bzw. nach der Messung  $E'_t$  und  $E'_m$ . Wir wollen davon ausgehen, daß der Meßapparat makroskopische Ausmaße hat. Dann können wir dessen Energieunschärfen vernachlässigen, und wir dürfen davon ausgehen, daß  $E_m$  und  $E'_m$  exakt bekannt sind. Ferner seien  $E$  und  $E'$  die Gesamtenergie vor und nach der Messung.

Um die Vorstellung ein bißchen zu konkretisieren wollen wir unter dem „Energie-meßgerät“ ein Kalorimeter verstehen. Ein solcher Apparat wird auch in realen Experimenten an Teilchenbeschleunigern eingesetzt, um Energien von Teilchen zu messen. Dabei werden die Teilchen in ein Absorbermaterial gelenkt, wo sie durch Ionisations- und Strahlungsverluste abgebremst werden. Beliebte sind z.B. für Elektronen oder Photonen Natrium-Jodid, das als Szintillatormaterial genutzt wird, um die durch die diversen Abbremsprozesse erzeugten Photonen in einem Photomultiplier nachzuweisen und so die Energie des Teilchens zu bestimmen. Letztlich wird die Energie des Teilchens in Wärmeenergie des gesamten Meßapparates umgewandelt. Die Gesamtenergie ist aber durch die Temperatur bestimmt (kanonisches Ensemble!), und die Energiefluktuationen können im thermodynamischen Limes vernachlässigt werden. Es ist hier schon anschaulich klar, daß

eine genaue Energiebestimmung eine gewisse Zeit braucht, nämlich mindestens bis die Teilchen vollständig abgebremst sind.

Wie wir im Anhang zeigen werden, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Energie nach einer Meßzeit  $\Delta t$

$$w(E', \Delta t | E, 0) = N \frac{\sin^2[(E' - E)t/(2\hbar)]}{t^2(E' - E)^2}. \quad (15)$$

Der wahrscheinlichste Wert für die Energiedifferenz  $E - E'$  ist von der Größenordnung der „Breite“ der Verteilungsfunktion, also in unserem Falle

$$|E - E'| \sim \frac{\hbar}{\Delta t} \quad (16)$$

Wegen der Energieerhaltung für das Gesamtsystem müssen wir davon ausgehen, daß dies der statistischen Schwankung der Energie entspricht, d.h. wir haben für die Unschärfe der Energie des Teilchens (die Unschärfe der Energie des Meßapparates können wir Dank seiner makroskopischen Natur vernachlässigen):

$$\Delta(E_t - E'_t) \sim \frac{\hbar}{\Delta t}. \quad (17)$$

Dies bedeutet, daß bei einer Messung der Energie, die eine endliche Zeit  $\Delta t$  dauert, eine unvermeidliche Ungenauigkeit beim Test des Energieerhaltungssatzes besteht, die durch die quantenmechanische Unschärfe gegeben ist. Dabei ist es unerheblich, wie schwach die Wechselwirkung des Meßapparates mit dem Meßobjekt ist. Unsere Abschätzung der Unschärfe beruhte ja auf der Störungsrechnung, die umso besser gerechtfertigt ist, je kleiner die Stärke dieser Wechselwirkung ist.

## 5 Impulsmessungen

Wir können uns die Messung einer Impulskomponente idealisiert durch den Stoß des Teilchens mit einem total reflektierenden „ebenen Spiegel“ vorstellen. Die Impulse und Energien des Spiegels vor und nach der Messung dürfen wir uns wieder als praktisch exakt bekannt vorstellen, und zwar in demselben Sinne wie oben, weil es sich um einen Meßapparat mit makroskopischen Ausmaßen handelt. Wir messen dadurch natürlich die Impulskomponente senkrecht zum Spiegel. Die beiden unbekanntenen Größen sind nun die Impulse des Teilchens vor und nach der Messung, uns diese sind durch die Impulse des Spiegels vor und nach der Messung keineswegs exakt bestimmt. Wir benötigen also als zweite Information noch die Energie-Impulsbeziehung der Teilchen und eine Energiemessung. Diese ist aber entsprechend der obigen Unschärfebeziehung (17) mit von der Meßdauer abhängigen Unschärfe behaftet.

Aufgrund des Impulssatzes gilt nun  $\Delta p_t = \Delta p'_t$ . Die Energieunschärfen des Teilchens vor und nach der Messung ist demnach durch die Energie-Impulsbeziehung gegeben:

$$\Delta E_t = \frac{dE_t}{dp_t} \Delta p_t = v \Delta p_t \text{ und analog } \Delta E'_t = v' \Delta p'_t = v' \Delta p_t. \quad (18)$$

Man beachte, daß hier nebenbei gezeigt wurde, daß die mit der oben bei der Herleitung von (17) gegebenen Interpretation der Geschwindigkeit als Gruppengeschwindigkeit der Materiewellen im Einteilchenbild korrekt war, denn es ist ja nach der de Brogliebeziehung  $v = dE/dp = d\omega/dk$ , wobei  $\omega$  und  $k$  die Frequenz bzw. Wellenzahl der Materiewelle bezeichnen. Allerdings zeigt

die gegebene Herleitung auch, daß die Interpretation als mittlere Teilchengeschwindigkeit auch noch im relativistischen Kontext korrekt ist, wo die Einteilchenwellenfunktionendarstellung ihre Grenzen hat, worauf wir unten noch genauer zurückkommen werden.

Damit ergibt sich aber jedenfalls die Impulsunschärfe zusammen mit (17) zu

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta t |v' - v|}. \quad (19)$$

Das ist nun eine sehr interessante Gleichung, denn sie zeigt, daß man den Impuls eines Teilchens nur dann beliebig genau messen kann, indem man entweder eine große Geschwindigkeitsänderung  $|v' - v|$  in Kauf nimmt oder eine große Meßdauer  $\Delta t$  benötigt.

Betrachtet man aber nun relativistische Teilchen, ist  $|v' - v| \leq |v'| + |v| \leq 2c$ , und wir haben

$$\Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{2c\Delta t} \quad (20)$$

Dies bedeutet, daß man aufgrund der Begrenztheit der Geschwindigkeit von Teilchen durch die Lichtgeschwindigkeit *immer* eine umso längere Meßzeit benötigt, je genauer man den Impuls des Teilchens messen will.

Die Zuordnung eines sehr scharfen Impulswertes eines Teilchens verlangt also im Rahmen der relativistischen Physik eine lange Dauer der Impulsmessung. Das verlangt aber, daß es nur dann sinnvoll ist, einem Teilchen einen bestimmten Impuls mit hoher Genauigkeit zuzuordnen, wenn es sich um ein freies Teilchen handelt, für das der Impuls während der gesamten zur Erreichung dieser Genauigkeit notwendigen großen Meßdauer konstant ist. Dies bedeutet, daß die Zuordnung eines scharfen Impulses im Rahmen der relativistischen Quantentheorie nur für freie Teilchen sinnvoll ist.

## 6 Implikationen für die Ortsunschärfe

Gleichzeitig verschärft aber die Energie-Zeitunschärfe auch die Ungenauigkeit einer Ortsmessung. Wir werden sehen, daß im Rahmen der relativistischen Quantentheorie keine wechselwirkenden Theorien gibt, wo die Wechselwirkung die Teilchenzahl erhält. Vielmehr existieren zu jedem Teilchen notwendig auch Antiteilchen. Die formale Herleitung dafür erfordert komplizierte Gruppentheorie und ist ein bißchen verwickelt. Qualitativ läßt sich diese Folgerung jedoch bereits mit Hilfe der Unschärferelationen ziehen, wie wir nun zeigen wollen.

Für ein freies Teilchen lautet die relativistische Energie-Impulsbeziehung bekanntlich  $(E/c)^2 - p^2 = m^2c^2$ . Folgt man nun derselben heuristischen Argumentation wie in meiner Quantentheorie-FAQ, folgt daraus, daß die relativistischen Wellengleichungen für freie Teilchen stets neben den ebenen Wellenlösungen mit positiver Frequenz auch eine solche mit negativer Frequenz besitzen, und im Rahmen der Einteilcheninterpretation der Wellenmechanik würde dies bedeuten, daß keine untere Schranke für die Energie freier Teilchen existiert.

Bei der nichtrelativistischen Schrödingergleichung kann dieses Problem natürlich nicht auftreten, denn es ist ja die Energie-Impulsbeziehung freier Teilchen  $E = p^2/(2m)$ , und das bedeutet, daß die ebenen Wellen der freien Schrödingergleichung notwendig positive Frequenzen haben müssen, und man kann die Einstein-de Broglie-Beziehung zwischen Wellen- und Teilchengrößen in der üblichen Weise interpretieren, wobei die Bedingung, daß ein stabiler Grundzustand existiert, erfüllt ist.

Ist die Energie nämlich nicht nach unten beschränkt, könnte man ja sehr viele Teilchen in den Zuständen negativer Energie unterbringen, und so durch Hinzufügen beliebig vieler Teilchen in diese Zustände beliebig viel Energie gewinnen, ohne den Energiesatz zu verletzen. Es würde aber auch die gesamte Materie in diese Zustände negativer Energie stürzen, und nichts wäre stabil. Dirac hat das für Fermionen in einer heuristischen Weise gelöst, daß er gesagt hat, das Vakuum bestünde aus einem See von unendlich vielen Fermionen, die sämtliche Zustände negativer Energie auffüllen. Das Pauliverbot verhindert dann, daß noch mehr Fermionen in diese Zustände hineinstürzen können.

Ein schnelles Fermionen kann nun im Prinzip durch Streuung ein Fermion negativer Energie anregen, das ein Loch im „Diracsee“ hinterläßt und mit umgekehrtem Impuls wie ein Teilchen positiver Energie mit der entgegengesetzten Ladung aussieht. Das führte zur Vorhersage der Positronen, also der Antiteilchen der Elektronen.

Mittlerweile kennt man aber auch einen ganzen „Zoo“ von Bosonen (z.B. die Mesonen), und für diese ist das Argument mit dem Pauliverbot nicht mehr stichhaltig: Es können beliebig viele Bosonen einen Einteilchenzustand besetzen, und das würde wieder zum Kollaps führen.

Heute formuliert man die relativistische Quantentheorie wechselwirkender Teilchen daher in einer etwas formaleren Weise von vornherein als Vielteilchentheorie, nämlich als *Quantenfeldtheorie*. Dies ist immer dann eine sehr bequeme Beschreibung, wenn die Teilchenzahl nicht erhalten ist. Die Näherung, ein Teilchen mit einer Wellenfunktion zu beschreiben, funktioniert im relativistischen Bereich nur so lange, wie das Teilchen auch wirklich allein bleibt, und nicht durch Paarerzeugungsprozesse viele neue Teilchen entstehen.

Paarerzeugung findet nun immer statt, wenn die Stoßenergie größer wird als die Masse  $\times c^2$  des Paares. Wird diese Schwelle  $E_{pb} = 2mc^2$  überschritten, können neue Teilchen und Antiteilchen erzeugt werden.

Wollen wir nun die Position *eines* bestimmten Teilchens bestimmen, dürfen wir zur Messung also nicht beliebige Energien aufwenden. Denken wir uns etwa die Ortsmessung durch Photonen realisiert, das sog. „Heisenbergmikroskop“, d.h. strahlen wir mit elektromagnetischen Wellen auf das Teilchen und schauen nach, wo es ist, muß die Energie der Photonen, die auf das zu messende Teilchen im Maximalfall übertragen wird (entsprechend einer totalen Absorption des Photons),  $E_t - E_t' \lesssim 2mc^2$  sein. Damit ist aber die Impulsunschärfe aufgrund des Impulserhaltungssatzes auch begrenzt, nämlich auf  $\Delta p_{\max}^2 = (E_{\max}/c)^2 - m^2c^2 = 3m^2c^2$

Die Orts-Impulsunschärferelation verlangt dann aber

$$\Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{2\Delta p} \gtrsim \frac{\hbar}{2\sqrt{3}mc}. \quad (21)$$

Dies bedeutet also, daß auch die Ortsmessung nicht beliebig exakt durchgeführt werden kann, weil andernfalls die Individualität des Teilchens durch Produktion von neuen Teilchen verloren geht und man nicht sinnvoll vom Ort eines individuellen Teilchens sprechen kann.

Anschluß an die klassische Physik finden diese Betrachtungen, wenn wir dieselbe Diskussion für Photonen führen. Sie sind masselose Teilchen, so daß zu Ihrer Erzeugung gerade ihre Energie notwendig ist. Das zur Messung verwendete Teilchen muß also eine kleinere Energie haben als das zu vermessende Photon, damit nicht noch mehr zu ihm identische Photonen entstehen und es sinnvoll bleibt, von der Position des Einen Photons zu sprechen. Die maximal mögliche Impulsänderung des Photons bei der Messung ist also in diesem Falle  $E/c$ , und die Ortsunschärfe



ist also durch

$$\Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{p} \quad (22)$$

gegeben, wobei  $p$  der Impuls des Photons ist. Auf der rechten Seite steht aber gerade die Wellenlänge des Photons. Das bedeutet mit anderen Worten, daß die Zuordnung eines bestimmten Ortes zu einem Photon nicht genauer möglich ist, als es dessen Wellenlänge vorgibt.

Dies ist auch aus der klassischen Elektrodynamik bekannt: Es ist nur solange sinnvoll, von einem *Lichtstrahl* zu sprechen, wie die Abmessungen der Öffnungen, durch die das Licht hindurchtreten muß, kleiner als die Wellenlänge des Lichtes sind. Diese Bild vom Licht als einem Strahl entspricht aber gerade einer Korpuskeltheorie des Lichtes, d.h. der Vorstellung das Licht bestehe aus einem Strom von Teilchen, die einer bestimmten Bahn folgen.

Dies erkennt man auch formal daran, daß die Wellenoptik in die Strahlenoptik übergeht, wenn man die Eikonalnäherung durchführt. Man gelangt dann von den Wellengleichungen, also den Maxwellgleichungen für elektrisches und magnetisches Feld zu einer Gleichung vom Typ der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung, die in der klassischen Mechanik eine Möglichkeit, Teilchenbewegungen zu beschreiben liefert. Die Lichtstrahlen sind die Charakteristiken der Eikonalgleichung, genau wie die Teilchenbahnen in der Hamiltonschen Mechanik die Charakteristiken der Hamilton-Jacobigleichung sind.

Betrachtet man allerdings die Lichtausbreitung in der Nähe von Körpern (Nähe heißt hier, daß man Abstände in der Größenordnung der Wellenlänge betrachtet), bricht die Eikonalnäherung zusammen, und es tritt Beugung auf, ein Phänomen, das strahlenoptisch nicht erklärt werden kann.

## 7 Implikationen für den Begriff des elektromagnetischen Feldes

Wir wenden uns nun einer spezifisch relativistischen Fragestellung zu, nämlich dem Begriff des elektromagnetischen Feldes und führen damit die Diskussion der qualitativen Anfangsgründen der QED, die wir mit unserer Betrachtung der Orts-Impuls und der damit implizierten Zeit-Energie-Unschärfe bereits begonnen haben, fort.

Zunächst müssen wir uns noch einmal der Gründe versichern, die zu der Einführung des Feldbegriffs in der *klassischen relativistischen Physik* führen: Während in der Galilei-Newtonschen Welt eine instantane Fernwirkung, wie sie paradigmatisch im Newtonschen Begriff der Gravitationswechselwirkung zwischen massiven Körpern exemplifiziert ist, keinerlei Widersprüche in sich birgt, ändert sich dies mit der Existenz einer *endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit kausaler Wirkungen* drastisch. Hier stellt schon das dritte Newtonsche Gesetz, also die *actio = reactio* ein Problem dar: Soll dieses Gesetz weiterbestehen, muß ja die Änderung der relativen Lage zweier voneinander entfernter Körper, die eine Änderung der wirkenden Kräfte hervorruft, *instantan* wirken, damit dieses Gesetz zu jeder Zeit erfüllt ist. Dies kann aber wegen der mit endlichen Wirkungsausbreitungsgeschwindigkeit immer nur näherungsweise für Bewegungen erfüllt sein, die quasi statisch ablaufen, d.h. wenn sich die Bewegungen der Körper so langsam vollzieht und die Entfernungen so klein sind, daß die Zeitdauer zur Wirkungsausbreitung (die sog. *Retardierung*) keine Rolle spielt.

Andererseits ist aber das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung insofern wichtig für die Physik, weil es den Impulserhaltungssatz impliziert und dieser läßt sich bekanntlich über das

Noethertheorem als direkte Folge der *räumlichen Translationsinvarianz* der Naturgesetze deuten. Diese Annahme liegt der speziellen Relativitätstheorie schon in ihren Grundlagen zugrunde. Aus dem Dilemma befreit man sich nun dadurch, daß man die Wechselwirkungen als *lokal* auffaßt, d.h. Kräfte werden nicht instantan übertragen, sondern durch *Felder* bewirkt. Dabei ist ein Feld eine dynamische Entität, die sich kontinuierlich im Raum ausbreitet, und zwar höchstens mit der Grenzgeschwindigkeit für Wirkungsausbreitungen. Nach allem was wir wissen, ist im Fall der elektromagnetischen Wechselwirkungen, diese Grenzgeschwindigkeit erreicht, und diese somit gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  zu setzen, so wie wir es oben auch bereits getan haben. Nun müssen physikalische Größen über Meßvorschriften quantitativ definiert werden. Klassisch geschieht dies durch die Vermessung der Kraftwirkungen des Feldes auf sog. *Probeladungen*. Darunter versteht man Ladungen hinreichend geringer Ausdehnungen (idealisiert betrachten wir *Punktladungen*), deren Ladungsbetrag man prinzipiell beliebig klein machen kann, und zwar klein gegen die Ladungen, die das Feld verursachen, das wir durch die Probeladungen vermessen wollen. Dann dürfen wir von der Rückwirkung der von den Probeladungen hervorgerufenen Eigenfeldern auf die Probeladungen selbst (kurz von der *Selbstwechselwirkung*) absehen. Die dynamischen Gleichungen der Wechselwirkung zwischen Probeladungen und Feldern, also die Maxwellgleichungen ergeben für die Kraft

$$\vec{F}(t, \vec{x}) = \frac{q}{4\pi} \left[ \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\vec{v}(t)}{c} \times \vec{B}(t, \vec{x}) \right]. \quad (23)$$

Dies ist die *Lorentzkraft*, in der gerade die Selbstwechselwirkung der Probeteilchen mit ihren eigenen Feldern gegen die äußeren Felder vernachlässigt wird. Diese Gleichung gilt in jedem Inertialsystem und ließe sich auch manifest kovariant formulieren, jedoch ist dies für die hier angestrebte qualitative Diskussion dem Verständnis nicht förderlich.

An dieser Gleichung wird nun aber bereits die Komplikation deutlich, die eine quantentheoretische Beschreibung mit sich bringt. Die Vermessung des gesamten elektromagnetischen Feldes würde ja verlangen, daß ich Ort und Geschwindigkeit des Teilchens zu jedem Zeitpunkt genau festlegen kann. Dies ist aber aufgrund der oben besprochenen Orts-Impulsunschärfe unmöglich, weil eine genaue Ortsfestlegung durch eine genaue Impulsfestlegung zerstört wird und umgekehrt.

Ein weiteres Problem ist die Tatsache, daß die Ladung quantisiert ist. Wollen wir nun im Extremfall das von einem Elementarteilchen bewirkte Feld vermessen, können wir keine „Probeladungen“ für diesen Fall finden, denn sie selber würden ja mindestens wieder Elementarteilchen sein müssen, und die Ladung ist immer in derselben Größenordnung wie die Ladung des Elementarteilchens, dessen Feld wir vermessen wollen.

Wir besprechen im folgenden, wie der Feldbegriff im Rahmen der Quantentheorie abgeändert werden *muß*. Wir werden sehen, daß die Quantentheorie nicht nur eine radikale Änderung der klassischen Punktmechanik impliziert, sondern mit ihr auch eine Änderung des klassischen Feldbegriffes bewirkt. Wir folgen hier nur kurz der Diskussion eines Papiers von N. Bohr und L. Rosenfeld [BR50].

Beginnen wir mit dem elektrischen Feld in  $x$ -Richtung. Wir wollen dann gemäß der Lorentzkraftformel die Kraftwirkung auf eine ruhende Probeladung aufgrund des elektrischen Feldes messen. Dazu müssen wir die Kraft, also die Impulsänderung in  $x$ -Richtung, und die Zeitdauer, in der diese erfolgt, genau messen. Damit ist es aber ausgeschlossen, daß wir den Ort allzu genau kennen können, d.h. wir können nur das über ein in  $x$ -Richtung hinreichend großes räumliches

Volumen gemittelte elektrische Feld messen. Sei das Zeitintervall  $T$  und die Ladung  $q$ . Dann ist nach der Lorentzformel

$$E_{x,\Delta V} = \frac{4\pi}{q} \frac{p_x(t+T) - p_x(t)}{T} \quad (24)$$

das mittlere elektrische Feld. Verwenden wir nun die Orts-Impulsunschärfe  $\Delta p_x \Delta x \approx \hbar$ , so ist die Feldunschärfe also

$$\Delta E_{x,\Delta V} \approx \frac{4\pi\hbar}{q\Delta x T}. \quad (25)$$

Dies bedeutet, daß wir eine genaue Auflösung des elektromagnetischen Feldes in der Umgebung von  $x$ , also für kleines  $\Delta x$  nur erhalten können, wenn wir die *Ladung des Testteilchens groß* machen!

Damit kommt aber wieder das Problem des Eigenfeldes des Testteilchens zum Tragen, d.h. wir können die in der klassischen Feldtheorie so bequeme Definition der Probeladung, wo diese Selbstwirkung vernachlässigt werden konnte, nicht aufrecht erhalten. Man kann zeigen, daß es die Unsicherheit der Bestimmung dieses Eigenfeldes des Testteilchens ist.

Allerdings kann man hier die Argumentation umkehren, denn bei einem relativ schweren Teilchen mit großer Ladung ist dessen Behandlung als *äußeres klassisches Feld* für die quantentheoretische Bewegung des Elementarteilchens statthaft in diesem *externen Feld* statthaft, und dieses Problem läßt sich durch Lösen der entsprechenden Wellengleichung und störungstheoretische Behandlung der Quantenkorrekturen in recht guter Näherung behandeln.

Bei dieser Betrachtung zeigt sich dann auch, daß die bei der *kanonischen Feldquantisierung* auftretenden Feldstärkekommutatorrelationen aufgrund der in Abschnitt 1 besprochenen allgemeinen Unschärferelationen mit der über die Testladungsdefinition der Felder bewirkte Orts-Impulsunschärfe der Testladungen konsistent ist.

Für eine ausführliche und mathematischere Behandlung diese in moderneren Lehrbüchern leider vernachlässigten qualitative Bedeutung der Feldquantisierung und der Quantenfeldtheorie als einer Theorie über den Meßprozeß in der atomistischen Welt, sei auf [Hei54] verwiesen, einem Klassiker der QED-Lehrbuchliteratur, der allerdings naturgemäß in weiterführenden Teilen heutzutage angesichts der Entwicklung der Diagrammtechniken durch Feynman und die moderne Sicht und Technik der Renormierungstheorie nur noch als historische Quelle empfohlen werden kann.

Allerdings zeigen diese qualitativen Betrachtungen einmal mehr die Bedeutung der Quantentheorie als einer Theorie von Meßvorgängen im atomaren Bereich. Sie beschreibt also, was wir *prinzipiell* in einer atomistischen Welt *über die elementaren Konstituenten* überhaupt wissen können. Die Möglichkeit der Formalisierung dieser Überlegungen in abstrakte durch die Gruppentheorie der Raumzeit- und der Ladungsraumstruktur implizierte Quantentheorie, hat im Laufe der relativ kurzen Zeit von etwa 1950 bis 1973 zur Entwicklung des *Standardmodells* der Elementarteilchen geführt, von dem in dieser FAQ an anderer Stelle zu berichten sein wird.

## Literatur

[BR50] N. Bohr und L. Rosenfeld, Field and Charge Measurements in Quantum Electrodynamics. Phys. Rev. **78** 794 (1950)

[Ein05] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Annalen der Physik **17** 891 (1905)

[Hei54] W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, 3. Aufl., Oxford at the Clarendon Press (1954)

[LL77] L. D. Landau und E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics, Pergamon Press (1977)