Kraft zwischen zwei Stromschleifen

Hendrik van Hees

11. Oktober 1997

Inhaltsverzeichnis

1 Magnetfeld einer fadenförmigen Stromverteilung

Wir betrachten zunächst eine beliebige räumliche zeitunabhängige Stromverteilung. Die Maxwellgleichungen spalten im zeitunabhängigen Fall bekanntlich in Gleichungen für das elektrische Feld $\vec{E}$ und das Magnetfeld $\vec{B}$ auf. Hier interessieren wir uns nur für das Magnetfeld. Es ist durch die Gleichungen

$$\nabla\vec{B} = 0,\ \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{1}$$

gegeben. Dabei wurden die üblichen (nicht rationalen) cgs-Einheiten benutzt. Als umgebendes Medium ist der Einfachheit halber Vakuum ($\mu = 1$) angenommen und c bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit.

Die erste Gleichung besagt, daß sich das Magnetfeld in jedem einfach zusammenhängenden Teilbereich des $\mathbb{R}^3$ als Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}$ darstellen läßt:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{2}$$

Da weiter ein Feldfreiheitsgrad von $\vec{A}$ unbestimmt ist, weil $\vec{A}$ nur bis auf einen beliebigen Gradienten bestimmt ist (spezieller Fall von Eichinvarianz), läßt sich $\vec{A}$ eine Nebenbedingung auferlegen. Physikalische Ergebnisse hängen davon ohnehin nicht ab. Wir wählen hier die für statische Rechnungen nützliche Coulomb-Eichung:

$$\nabla\vec{A} = 0. \tag{3}$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung in (1) ein, folgt

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\underbrace{\nabla\vec{A}}_{0}) - \Delta\vec{A} = -\Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{4}$$

Damit erfüllt jede Komponente von $\vec{A}$ die Poissongleichung. In Analogie zum Newtonschen Gravitationsgesetz oder der Elektrostatik (allgemein handelt es sich um die Anwendung der Greenschen Formel für den Fall, daß keine weiteren Randbedingungen vorliegen):

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3\vec{x}\,' \frac{\vec{j}(\vec{x}\,')}{\|\vec{x} - \vec{x}\,'\|}. \tag{5}$$

Hierin ist über den ganzen $\mathbb{R}^3$ zu integrieren.

Jetzt nehmen wir eine Stromverteilung an, die durch einen Draht, der vom Gleichstrom I durchflossen wird, realisiert ist. Dabei idealisieren wir den Draht als unendlich dünn, d.h. der Drahtdurchmesser wird als sehr klein im Vergleich zu den typischen Abmessungen der Geometrie der Leitung angenommen. Dann ist die Stromverteilung durch

$$\vec{j}(\vec{x}) = I \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}\tau} \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{s}(\tau)] \tag{6}$$

gegeben, wobei $\delta^{(3)}$ die dreidimensionale Diracsche δ-Distribution darstellt. $\vec{s} : (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist die Parametrisierung der Stromschleife $\mathscr{C}$.

Setzt man das in (5) ein, läßt sich das Integral über $\vec{x}\,'$ trivial durchführen und man bekommt

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{I}{c} \oint_{\mathscr{C}} \frac{d\vec{s}}{\|\vec{x} - \vec{s}\|}, \tag{7}$$

wobei mit dem Integral das Wegintegral entlang der Leiterschleife $\mathscr{C}$ gemeint ist (wir nehmen im folgenden an, die Leiterschleife sei geschlossen).

Das Magnetfeld ergibt sich gemäß unserem Ansatz (2) zu

$$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{I}{c} \oint_{\mathscr{C}} \mathrm{d}\vec{s} \times \frac{\vec{x} - \vec{s}}{\|\vec{x} - \vec{s}\|^3}. \tag{8}$$

2 Kraft auf eine andere Leiterschleife

Zunächst berechnen wir die Kraft auf eine andere fadenförmige Stromverteilung $\vec{j}\,'$. *Der Einfachheit halber nehmen wir dabei an, daß die Leitungen sich nicht kreuzen und nicht eine Leiterschleife einen Punkt der anderen Leiterschleife im Inneren enthält.* Andernfalls wird das Problem schon kniffliger!

Die Kraft, die *von* der Leiterschleife $\mathscr{C}$ *auf* die Leiterschleife $\mathscr{C}'$ ausgeübt wird, ist nach dem Lorentzschen Kraftgesetz (welches sich übrigens mit Hilfe des Noethertheorems aus „first principles" und der Lagrangedichte der Elektrodynamik herleiten läßt!):

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3\vec{x}\vec{j}\,'(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}). \tag{9}$$

Setzt man hierin (6) für die Stromschleife $\mathscr{C}'$ und (8) für $\vec{B}$ ein und führt das Integral über $\vec{x}$ aus, findet man

$$\vec{F} = \frac{II'}{c^2} \oint_{\mathscr{C}'} \oint_{\mathscr{C}} \mathrm{d}\vec{s}\,' \times \left(d\vec{s} \times \frac{\vec{s}\,' - \vec{s}}{\|\vec{s}\,' - \vec{s}\|^3} \right). \tag{10}$$

Führt man das doppelte Vektorprodukt aus und beachtet, daß sich die Leiterschleifen nicht durchdringen, also das geschlossene Wegintegral über einen Gradienten verschwindet, findet man schließlich die symmetrische Form

$$\vec{F} = -\frac{II'}{c^2} \oint_{\mathscr{C}'} \oint_{\mathscr{C}} \mathrm{d}\vec{s}\,' \cdot \mathrm{d}\vec{s} \left(\frac{\vec{s}\,' - \vec{s}}{\|\vec{s}\,' - \vec{s}\|^3} \right). \tag{11}$$

Das ist die gesuchte Formel für die Kraft.

Hieraus liest man ab, daß die Kraft unter Vertauschung der Stromschleifen das Vorzeichen wechselt. Das muß wegen Newtons drittem Gesetz („actio est reactio") auch so sein: Die Kraft, die $\mathscr{C}$ auf $\mathscr{C}'$ ausübt ist entgegengesetzt gleich der Kraft, die $\mathscr{C}'$ auf $\mathscr{C}$ ausübt.

3 SI-System

Im SI lauten die relevanten Gleichungen (1) der Magnetostatik

$$\nabla \vec{B} = 0, \; \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \tag{12}$$

Dabei ist μ_0 die magnetische Suszeptibilität des Vakuums. Sie ist durch die Ampère-Definition exakt festgelegt: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N A^{-2}$. Im SI-System ist also das Endergebnis mit $c^2 \mu_0 / (4\pi)$ zu multiplizieren, d.h. (11) lautet im SI

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 II'}{4\pi} \oint_{\mathscr{C}'} \oint_{\mathscr{C}} \mathrm{d}\vec{s}\,' \cdot \mathrm{d}\vec{s} \left(\frac{\vec{s}\,' - \vec{s}}{\|\vec{s}\,' - \vec{s}\|^3} \right). \tag{13}$$

Setzt man die Ströme in Ampère und sämtliche Längen im Integral in Meter ein, erhält man die Kraft in Newton.