Magnetische Monopole
Seminarvortrag, TH-Darmstadt 20.05.1995

Markus Eisenbach
Hendrik van Hees

11. Mai 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die folgende Ausarbeitung zum Seminarvortrag „Magnetische Monopole“ beschäftigt sich mit der Frage, welche Konsequenzen die Annahme der Existenz magnetischer Monopole auf die Physik haben.

Dazu wird in Abschnitt 1 die Elektrodynamik im Viererformalismus kovariant dargestellt. Dabei wurde die physikalische Interpretation der Felder, d.h. deren Wirkung auf Punktteilchen, aus allgemeinen Symmetrieprinzipien (Noethertheorem) gewonnen. Dieses Konzept war im Vortrag aus Zeitgründen leider nicht durchführbar, ist aber für die vollständige Begründung der kanonischen Quantisierung wesentlich.

Abschnitt 2 behandelt die Konsequenzen, die sich aus dem Postulat der magnetischen Monopole für die klassische Elektrodynamik ergeben. Dazu wird die Diracsche Stringformulierung (1931 bzw. 1948 publiziert) benutzt, weil sie die mathematisch direkteste Formulierung der Monopole darstellt. Auch hierbei wird der Lagrangeformalismus benutzt.

Abschnitt 3 dient der Vorbereitung der kanonischen Quantisierung der Teilchen und Pole und behandelt den Hamiltonformalismus einer relativistischen Theorie wobei aber der Tensorkalkül zugunsten einfacher Formulierbarkeit aufgegeben wurde, zumal der vierdimensionale Hamiltonformalismus seine Grenzen hat (s. z.B. [Sch89]).

Abschnitt 4 deutet die Problematik einer relativistischen Quantentheorie an und führt die Quantisierung der in Abschnitt 3 formulierten Hamiltontheorie aus. Als wesentliches Ergebnis des Postulats der Existenz magnetischer Monopole wird die Quantelung der elektrischen Ladung hergeleitet.

Abschnitt 5 behandelt das Problem der Quantelung der Ladung vom eichtheoretischen Gesichtspunkt her. Dieses Konzept von Yang und Wu führt wesentlich einfacher zur Quantelung der Ladung und beseitigt Probleme, die mit den Strings als nichtobservablen Singularitäten in den Potentialen zu tun haben (Dirac-Veto).

Abschnitt 6 gibt einige Beispiele für die Experimente, die (bisher erfolglos) zum Nachweis magnetischer Monopole durchgeführt wurden.

2 Klassische Elektrodynamik

Die moderne Physik hat gezeigt, daß ein rein phänomenologischer Standpunkt in der klassischen Elektrodynamik als nicht mehr ausreichend als Zugang zu einer Theorie der Punktteilchen anerkannt werden kann. Vielmehr muß von allgemeingültigen Symmetrieüberlegungen ausgegangen werden, d.h. für die klassische Elektrodynamik, daß sie in jedem Inertialsystem im Sinne der speziell relativistischen Physik forminvariant formuliert sein muß. Mathematisch steht dazu das Mittel der Tensorrechnung über dem Minkowskiraum, also dem $\mathbb{R}^4$ mit einer Metrik der Signatur (1,3), zur Verfügung.

In der Dreierformulierung des 19. Jahrhunderts können die elektromagnetischen Feldgrößen durch die vier Maxwellgleichungen definiert werden, wobei wir uns auf den Fall des Vakuums spezialsieren. Sie lauten im nichtrationalisierten cgs-System (Gaußsches Maßsystem):

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{c \partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{c \partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \end{gathered} \tag{1}$$

Dabei bezeichnen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ elektrisches bzw. magnetisches Feld und ρ und $\vec{j}$ die Ladungs- bzw. Stromdichte. Es fällt bei dieser Schreibweise der Maxwellgleichungen sofort die Rolle auf, die in dieser Theorie der Materie zugewiesen wird: Sie taucht als Inhomogenitäten in den Feldgleichungen in Form von Ladungs- und Stromdichte auf. Das Feldsystem kann also nur dann als abgeschlossenes System gelten, wenn es sich um den ladungs- und stromfreien Raum, das sog. freie Feld, handelt. Eine nähere Begründung dieses Sachverhalts wird sich weiter unten ergeben.

Um nun zu einer kovarianten Formulierung zu gelangen, führen wir die elektrodynamischen Potentiale ein. Die dritte Maxwellgleichung, die die Quellenfreiheit des Magnetfeldes beschreibt, besagt, daß

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \tag{2}$$

sein muß. $\vec{A}$ ist aber nicht eindeutig, sondern nur bis auf den Gradienten eines Skalarfeldes bestimmt. Man kann also über $\vec{A}$ noch näher verfügen. Setzen wir (2) in die 1. Maxwellgleichung ein, so folgt

$$\mathrm{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{c\partial t}\right) = 0. \tag{3}$$

Die Rotationsfreiheit eines Feldes besagt, daß dieses ein skalares Potential besitzt:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{c\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi \tag{4}$$

Setzen wir nun (2) und (4) in die zweite Maxwellgleichung ein, folgt unter Ausnutzung der Formel

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\mathrm{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} \tag{5}$$

die Bestimmungsgleichung

$$\vec{\nabla}\left(\mathrm{div}\vec{A} + \frac{\partial\varphi}{c\partial t}\right) = \Delta\vec{A} - \frac{\partial^2\vec{A}}{c^2\partial t^2} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{6}$$

Nun ist A aber nur bis auf einen Gradienten bestimmt, d.h. wir können statt A auch

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi \tag{7}$$

benutzen. Daraus folgt dann

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{c\partial t} - \vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial\vec{A}'}{c\partial t} - \vec{\nabla}\left(\varphi + \frac{\partial\chi}{c\partial t}\right) \Rightarrow \varphi' = \varphi + \frac{\partial\chi}{c\partial t}. \tag{8}$$

(7) und (8) bezeichnet man als Eichtransformation und χ als das zu dieser gehörige Eichfeld. Die Maxwellgleichungen sind eichinvariant. Wir können nun bei gegebenen Feldern $\vec{A}$ und φ über χ so verfügen, daß

$$\mathrm{div}\vec{A}' + \frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

Diese Festlegung des Eichfeldes χ bezeichnet man als Lorentzeichung. Dabei ist aber zu beachten, daß nach der Festlegung der Eichung die Gleichungen nicht mehr eichinvariant sind. Wir werden weiter unten wieder zu einer eichinvarianten Formulierung zurückkehren. Setzt man nun (7)-(8) in (9) ein, findet man als Bestimmungsgleichung für χ:

$$\Box\chi = -\mathrm{div}\vec{A} - \frac{\partial\varphi}{c\partial t} \quad \text{mit} \quad \Box = \frac{\partial^2\varphi}{c^2\partial t^2} - \Delta. \tag{10}$$

Das ist eine inhomogene Wellengleichung, die mit Hilfe der unten hergeleiteten Greenfunktion dieser Gleichung gelöst werden kann, d.h. die Lorentzeichung existiert. Wir nehmen nun im folgenden an, $\vec{A}$ und φ genügten der Lorentzeichung. Dadurch läßt sich (5) vereinfachen:

$$\Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{11}$$

Diese Gleichung ist bereits eine wesentlich übersichtlichere Form der ersten drei Maxwellgleichungen. Wir müssen noch die 4. Maxwellgleichung erfüllen, indem wir (4) einsetzen:

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho = -\Delta\varphi - \frac{\partial}{c\partial t}\mathrm{div}\vec{A} \Rightarrow \Box\varphi = 4\pi\rho. \tag{12}$$

(11) und (12) haben den Vorteil, daß die drei Komponenten von $\vec{A}$ und φ einer einheitlichen Gleichung genügen. Es liegt nun nahe, die vierdimensionalen Vektoren

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad \underline{J} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \tag{13}$$

zu definieren. Dann schreiben sich (11) und (12) in der Form

$$\Box \underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{J}. \tag{14}$$

Dies wird nun aber zu einer kovarianten Vektorgleichung, wenn man den Vierervektor

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \tag{15}$$

und die Metrik

$$\underline{G} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{16}$$

einführt, also Zeit und Raum zu einem vierdimensionalen Vektor im Raum $\mathbb{R}^{(1;3)}$ zusammenfaßt. Dann schreibt sich nämlich (14) in der Einsteinschen Schreibweise des kovarianten Tensorkalküls:

$$\partial^a \partial_a A^b = \frac{4\pi}{c} J^b. \tag{17}$$

Dabei ist

$$\partial^a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad x_a = g_{ab} x^b \tag{18}$$

Die Lorentztransformationen sind nun diejenigen regulären linearen Abbildungen, unter denen die (1,3)-Bilinearform invariant ist. Diese Abbildungen definieren eine Gruppe, die O(1,3), die Isometriegruppe des $\mathbb{R}^{(1;3)}$. Für eine Lorentztransformation $\underline{L}$ gilt

$$(\underline{L}\underline{x})^t \underline{G}(\underline{L}\underline{y}) = \underline{x}^t (\underline{L}^t \underline{G}\underline{L}) y = \underline{x}^t \underline{G}\underline{y} \Rightarrow \underline{L}^t \underline{G}\underline{L} = \underline{G}. \tag{19}$$

Damit sind die fundamentalen Symmetrien der Elektrodynamik bekannt: Nämlich die Lorentztransformationen, die sich auf die Raum- Zeit-Koordinaten beziehen, also die Struktur von Raum und Zeit bestimmen. Das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes transformiert sich wie die Raum-Zeitkoordinaten, stellt also einen Vektor dar. Eine weitere Symmetrie, eine dynamische Symmetrie, ist durch die Eichinvarianz gegeben.

Wir formulieren nun die physikalisch relevanten Größen, nämlich die Felder, kovariant, also im Rahmen des Tensorkalküls, wobei gleichzeitig die Eichinvarianz, die wir oben zugunsten der Lorentzeichung fallen gelassen haben, wieder hergestellt wird. Ein Blick auf die Maxwellgleichungen und die obige Dreierformulierung der Potentiale zeigt, daß dafür nur der antisymmetrische Tensor

$$F^{ab} = \partial^a A^b - \partial^b A^a = A^{b,a} - A^{a,b} \tag{20}$$

in Frage kommt. Die ursprünglichen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ des Dreierformalismus erhält man daraus durch Aufspalten in Raum- und Zeitkomponenten. Da ein antisymmetrischer Tensor im vierdimensionalen Raum sechs unabhängige Komponenten enthält, nennt man ihn auch Sechservektor. Die erwähnte Aufspaltung in Raum und Zeit ergibt

$$F^{0\alpha} = \frac{\partial A^\alpha}{c\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} = -E_\alpha, \quad F^{\alpha\beta} = -\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma. \tag{21}$$

Dabei laufen griechische Indizes von 1 bis 3, d.h. die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind im Viererformalismus durch den antisymmetrischen Feldstärketensor (Sechservektor) F^{ab} gegeben. Dieser Tensor ist eichinvariant, wie es für physikalisch relevante Größen sein muß. Auch die Maxwellgleichungen lassen sich eichinvariant im Viererformalismus vermittels des Feldstärketensors ausdrücken. Dazu gehen wir auf die Gleichungen (6) und (12) zurück. Danach gilt

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} J^\alpha &= -\partial^\alpha(\partial_b A^b) + \partial^b \partial_b A^\alpha = \partial_b F^{b\alpha}, \\ 4\pi\rho = \frac{4\pi}{c} J^0 &= -\frac{\partial}{c\partial t} \partial_\alpha A^\alpha + \partial^\alpha \partial_\alpha A^0 = \partial_a F^{a0}, \end{aligned} \tag{22}$$

d.h. man kann die Maxwellgleichungen in eichinvarianter Form anschreiben:

$$\frac{4\pi}{c} J^a = \partial_b F^{ba}. \tag{23}$$

Weiter muß man aber noch die Integrabilitätsbedingung, d.h. die Darstellbarkeit des Vierertensors $\underline{F}$ als Viererrotation eines Vektorpotentials vierdimensional formulieren. Diese Integrabilitätsbedingung ist durch die beiden homogenen Maxwellgleichungen gegeben. Betrachtet man diese, erkennt man, daß der dualisierte Tensor

$$(F\dagger)^{ab} = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} F_{cd} = \epsilon^{abcd} (\partial_c A_d) \tag{24}$$

die geeignete Größe zur Formulierung der Integrabilitätsbedingung ist. Die rechts stehende Formulierung mit Hilfe des Vektorpotentials zeigt, daß die Integrabilitätsbedingung gegeben ist durch

$$\partial_a (F\dagger)^{ab} = 0. \tag{25}$$

(23) und (25) stellen also die eichinvariante relativistisch kovariante Formulierung der klassischen Elektrodynamik dar.

Um nun die Symmetrieprinzipien der Mechanik auf die Feldtheorie übertragen zu können, benötigen wir die Lagrangeformulierung bzw. das Hamiltonsche Prinzip für Felder. Die Verallgemeinerung des Hamiltonschen Prinzips für die Punktmechanik ergibt sich nun wie folgt:

Statt einer Lagrangefunktion L wird für die Felder eine Lagrangedichte $\mathscr{L}$ eingeführt. Dafür, daß die Feldgleichungen kovariant sind, ist es hinreichend (aber nicht notwendig!), daß $\mathscr{L}$ eine skalare Viererdichte ist. Das Hamiltonprinzip für Felder besagt in Analogie zum Hamiltonprinzip der Mechanik, daß das Wirkungsintegral

$$I = \int_{V^{(4)}} \mathscr{L}(\underline{A}, \partial_\mu \underline{A}, \underline{X}) d^4 \underline{X} \tag{26}$$

unter den üblichen Randbedingungen stationär werden muß, d.h.

$$\delta I = 0 \quad \text{wobei} \quad \delta \underline{X} = 0, \quad \delta \underline{A} = 0|_{\underline{X} \in \partial V^{(4)}}. \tag{27}$$

Die Feldgleichungen ergeben sich daraus durch Bildung der Variation unter dem Integral

$$\delta I = \int_{V^{(4)}} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^a} \delta A^a + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{a,b}} \delta A^{a,b} \right] d^4 \underline{X} = 0. \tag{28}$$

Da die Feldvariation mit der Differentiation vertauschbar ist und der vierdimensionale Gaußsche Satz angewandt werden kann, gilt die Formel der partiellen Integration

$$\int_{V^{(4)}} (\partial_b \Phi)\Psi^b d^4\underline{X} = \int_{\partial V^{(4)}} \Phi\Psi^b dS_b - \int_{V^{(4)}} \Phi\partial_b\psi^b d^4\underline{X}. \tag{29}$$

Daraus folgt nun wegen der Vertauschbarkeit der Feldvariation mit den partiellen Ableitungen nach den Raum-Zeit-Koordinaten:

$$\begin{aligned}\int_{V^{(4)}} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{a,b}} \delta A^{a,b} &= \int_{\partial V^{(4)}} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{a,b}} \delta A^a dS_b - \int_{V^{(4)}} \partial^b \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{a,b}} \delta A^a d^4\underline{X} \\ &= -\int_{V^{(4)}} \partial^b \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{a,b}} \delta A^a d^4\underline{X},\end{aligned} \tag{30}$$

letzteres weil die Feldvariationen auf dem Rand des vierdimensionalen Volumens beim Hamiltonschen Prinzip verschwinden sollen. Setzt man dies in das obige Wirkungsintegral ein, folgt

$$\delta I = \int_{V^{(4)}} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^a} - \partial^b \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{a,b}}\right] \delta A^a d^4\underline{X} \tag{31}$$

Da die δA^a unabhängig voneinander sind, folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, daß die Feldgleichungen durch die Euler-Lagrangegleichungen

$$\partial^b \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{a,b}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^a} = 0 \tag{32}$$

gegeben sind. Um die sich aus diesem Formalismus ergebenden weiteren Folgerungen verwerten zu können, müssen die Feldgleichungen (23) der Elektrodynamik mit (32) beschreibbar sein. Wir haben die dazu passende Lagrangedichte $\mathscr{L}$ aufzufinden. Es ist klar, daß $\mathscr{L}$ nur bis auf einen konstanten Faktor durch (32) und die Maxwellgleichungen bestimmt sein kann. Das Vorzeichen des Faktors kann dadurch gefunden werden, daß bei linearen Feldgleichungen die Feldgradienten eine quadratische Form in $\mathscr{L}$ bilden. Das Vorzeichen ist so zu wählen, daß Terme, die der kinetischen Energie der Mechanik entsprechen, also die Zeitableitungen der Felder enthalten, mit positivem Vorzeichen erscheinen. Der Absolutwert des Faktors legt, wie sich weiter unten zeigen wird, die Verbindung des elektromagnetischen zum mechanischen Maßsystem fest. Wir haben hier die nichtrationalen Gaußschen cgs-Einheiten gewählt, so daß ein Faktor $1/(4\pi)$ in $\mathscr{L}$ auftaucht. Die Feldgleichungen (23) schreiben sich unter Verwendung von (20) wie folgt:

$$\frac{1}{4\pi}\partial^b(A_{b,a} - A_{a,b}) = \frac{1}{c}J_a \Leftrightarrow \partial^b \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{a,b}} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^a} \tag{33}$$

Man sieht durch einfache Integration, daß sich $\mathscr{L}$ aus den beiden Summanden

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1, \quad \mathscr{L}_0 = -\frac{1}{16\pi}F^{ab}F_{ab} \quad (\text{mit } F^{ab} = \partial^a A^b - \partial^b A^a), \quad \mathscr{L}_1 = \frac{1}{c}J_a A^a \tag{34}$$

zusammensetzt. Das ist die gesuchte Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes. Das freie Feld enthält nur $\mathscr{L}_0$. Die Stromdichte J stellt dabei ein äußeres nicht im Hamiltonprinzip zu variierendes Feld dar, d.h. J führt die Raum-Zeitkoordinaten explizit in die Lagrangedichte ein. Das ist dadurch verständlich, daß es sich um die Ankopplung der Teilchen, die sich in der Elektrodynamik als Viererstrom äußern, an das elektromagnetische Feld handelt.

Als nächster Schritt bei der Analyse der Struktur der Lagrangetheorie der Felder, ist die Klärung der Frage, welche Lagrangedichten $\mathscr{L}'$ zu (34) äquivalent sind, d.h. welche Lagrangedichten zu denselben Feldgleichungen führen. Diese Frage läßt sich am schnellsten beantworten, wenn man die obige Rechnung, die vom Hamiltonprinzip zu den Lagrangegleichungen führten, betrachtet. Es folgt, daß man zu $\mathscr{L}$ die Divergenz eines beliebigen Feldes, das nur von den Feldern A und explizit von den Raum-Zeit-Koordinaten abhängt, addieren kann:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L} + \partial^k \Omega_k \quad \text{mit} \quad \Omega_k = \Omega_k(\underline{A}, \underline{X}). \tag{35}$$

Es folgt nämlich

$$\delta\mathscr{L} = \delta\mathscr{L} + \delta(\partial^k \Omega_k) = \delta\mathscr{L} + \partial^k \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial A^a} \delta A^a\right) \Rightarrow \delta I' = \delta I + \int_{\partial V(4)} \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial A^a} \delta A^a\right) dS^k = \delta I \tag{36}$$

Dabei haben wir den vierdimensionalen Gaußschen Satz benutzt, wobei das Flächenintegral verschwindet, weil die Feldvariationen definitionsgemäß auf dem Rand des betrachteten Gebiets verschwinden.

Auch die Eichtransformationen ändern die Lagrangedichte in dieser Weise ab. Setzt man nämlich die Eichtransformation (7-8) in (34) ein, so folgt

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} - \frac{1}{c} J_a \partial^a \chi = \mathscr{L} - \frac{1}{c} \partial^a (J_a \chi) \tag{37}$$

weil gemäß (23) $\underline{J}$ divergenzfrei ist:

$$\frac{4\pi}{c} \partial_a J^a = \partial_a \partial_b F^{ba} = 0. \tag{38}$$

Diese Divergenzfreiheit des Viererstroms ist offensichtlich aber umgekehrt auch als Folgerung der Eichinvarianz der Elektrodynamik anzusehen, d.h. die durch die Eichgruppe beschriebene Symmetrie zieht die Divergenzfreiheit des Stromes nach sich. Diese Divergenzfreiheit schreibt sich nun aber im Dreierformalismus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \vec{j} = 0. \tag{39}$$

Integrieren wir diese Gleichung über den gesamten Ortsraum, so folgt aus dem Gaußschen Satz bei hinreichend schnellem Abfall des Stromes im Unendlichen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \mathrm{d}^3 \vec{x} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = - \int_{\partial \mathbb{R}^3} \mathrm{d}\vec{S}\, \vec{j} = 0, \tag{40}$$

d.h. die Divergenzfreiheit des Viererstroms stellt in integraler Form einen Erhaltungssatz bzw. in differentieller Form eine Kontinuitätsgleichung dar. Die Symmetrie des Maxwellfeldes, die durch die Eichgruppe beschrieben wird, zieht die Ladungserhaltung nach sich.

Das Noethertheorem

Im folgenden betrachten wir die totale Variation der Lagrangedichte, die sich zum einen aus der bereits eben hergeleiteten Feldvariation, zum anderen aus der Variation der Raum-Zeitvariablen $\underline{X}$ ergibt. Wir behandeln Transformationen, die sich durch infinitesimale Erzeugende beschreiben lassen, setzen also voraus, daß die Transformationsgruppen Liegruppen sind.

Das Hauptproblem ist, daß anders als beim Hamiltonprinzip die Variation mit der partiellen Differentiation aufgrund der Mitvariation der Raum-Zeit-Koordinaten nicht vertauschen. Es gilt

$$\delta(A_{i,k}) = \frac{\partial(A_i + \delta A_i)}{\partial(x^k + \delta x^k)} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = (\delta A_i)_{,k} - (\delta x^l)_{,k} A_{i,l}. \tag{41}$$

Dabei haben wir die Ableitung der Umkehrfunktion benutzt und die Taylorentwicklung bzgl. der Variationen mit dem linearen Glied abgebrochen. Außerdem wurde die Inversion einer nur infinitesimal von der Einheitsmatrix verschiedenen Matrix benutzt:

$$[(\delta^l{}_k + (\delta x^l)_{,k}]^{-1} = \delta^k{}_l - (\delta x^k)_{,l}. \tag{42}$$

Weiter benötigen wir die Variation des Vierervolumenelements:

$$\delta(d^4\underline{X}) = [\det(\delta^k{}_l + (\delta x^k)_{,l}) - 1] d^4\underline{X} = \left[\sum_P \sigma(P) \prod_{i=0}^{3} (\delta^i{}_{P(i)} + (\delta x^i)_{,P(i)}) - 1\right] d^4\underline{X} \tag{43}$$

$$\delta(d^4\underline{X}) = (\delta x^i)_{,i} d^4\underline{X}. \tag{44}$$

Dabei durchläuft P die 24 Permutation der Zahlen 0 bis 3. Die totale Variation des Wirkungselements lautet demnach

$$\delta(\mathscr{L} d^4\underline{X}) = \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_i} \delta A_i + \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^k}\right)_{\text{exp}} \delta x^k + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{i,k}} (\delta A_i)_{,k} + \left[\mathscr{L} \delta^k{}_l - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{i,k}} A_{i,l}\right] (\delta x^l)_{,k} \right\} d^4\underline{X} \tag{45}$$

In Analogie zur klassischen Punktmechanik führen wir den kanonischen Energie-Impulstensor

$$\Theta^k{}_l = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{i,k}} A_{i,l} - \mathscr{L} \delta^k{}_l \tag{46}$$

ein, so daß sich (45) abkürzen läßt zu

$$\delta(\mathscr{L} d^4\underline{X}) = \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_i} \delta A_i + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{i,k}} (\delta A_i)_{,k} - \Theta^k{}_l \delta x^l{}_{,k} + \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^k}\right)_{\text{exp}} \delta x^k \right] d^4\underline{X}. \tag{47}$$

Eine Symmetrietransformation ist nun eine solche Transformation, bei der die Feldgleichungen forminvariant bleiben, d.h. die eckige Klammer darf nur eine Divergenz der Form (35) sein. Damit also die betrachtete Transformation eine Symmetrietransformation darstellt, ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_i} \delta A_i + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{i,k}} (\delta A_i)_{,k} - \Theta^k{}_l (\delta x^l)_{,k} + \left(\frac{\partial L}{\partial x^k}\right) \delta x^k + (\delta \Omega^i)_{,i} = 0. \tag{48}$$

Wir folgern daraus nun einen Erhaltungssatz indem wir (46) nach x^k differenzieren:

$$\Theta^k{}_{l,k} = -\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^l}\right)_{\text{exp}}. \tag{49}$$

Dabei haben wir die Lagrangegleichungen (32) benutzt. Setzt man dies in (48) ein, läßt sich (48) als Divergenz schreiben:

$$\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{i,k}} \delta A_i - \Theta^{kl} \delta x_l + \delta \Omega^k\right]_{,k} = 0. \tag{50}$$

Dies ist aber genau wie der Erhaltungssatz der Ladung ein Erhaltungssatz in lokaler Form. Wir nutzen jetzt die Kenntnis des Verhaltens der Felder unter der Poincarégruppe aus, die eine Symmetrietransformation darstellt.

Wir beginnen mit der Translation. Dabei ändern sich die Felder nicht explizit, sondern nur über die Variablentransformation, die aber in der obigen Rechnung berücksichtigt ist. Dann folgt für die Translationsgruppe

$$\delta x^k = \text{const}, \quad \delta A^k = 0, \quad \delta\Omega^k = 0. \tag{51}$$

Ein Blick auf (48) lehrt, daß Translationsinvarianz besteht, wenn

$$(\mathscr{L}_{,i})_{\text{exp}} = 0, \tag{52}$$

also die Lagrangefunktion nicht explizit von den Koordinaten abhängt, d.h. im Falle der Elektrodynamik für das strom- und ladungsfreie Maxwellfeld. Dann ist

$$\Theta^{kl}{}_{,k} = 0. \tag{53}$$

In Raum und Zeitkoordinaten getrennt geschrieben (griechische Indizes laufen im folgenden von 1 bis 3) heißt das

$$\Theta^{\alpha b}{}_{,\alpha} = -\frac{\partial}{c\partial t}\Theta^{0b} \tag{54}$$

Der korrespondierende globale Erhaltungssatz wird hergeleitet wie bei der Ladungserhaltung. Daraus geht hervor, daß

$$g^\alpha = \frac{1}{c}\Theta^{0\alpha}, \quad u = \Theta^{00} \tag{55}$$

die Impuls- bzw. Energiedichte des Feldes sein müssen.

Wir betrachten nun eine infinitesimale Lorentztransformation (obwohl wir das Ergebnis im folgenden nicht weiter benötigen werden). Für diese gilt

$$(\delta^{a'}{}_a + \delta\omega^{a'}{}_a)(\delta^{b'} + \delta\omega^{b'}{}_b)g^{ab} = g^{a'b'} \Rightarrow \delta\omega^{b'a'} = -\delta\omega^{a'b'} \tag{56}$$

Dabei haben wir die Bewegungsregeln für Indizes auf die infinitesimalen Lorentzmatrizen $\delta\omega$ angewandt:

$$\delta\omega^{ab} = g^{bc}\delta\omega^a{}_c. \tag{57}$$

Die infinitesimale Erzeugende der Lorentztransformation ist also eine antisymmetrische Matrix. Unter Lorentztransformationen gilt demnach

$$\delta X^a = \delta\omega^a{}_b X^b, \quad \delta A_i = S^j{}_{imn}\delta\omega^{mn}A_j. \tag{58}$$

Wegen (56) können wir o.B.d.A S als antisymmetrisiert in den Indizes m und n denken. S bestimmt die Darstellung der Lorentztransformation, nach der sich die Feldgrößen transformieren. Im Falle des elektromagnetischen Vierervektors $\underline{A}$ haben wir offenbar zu setzen

$$S^j{}_{imn} = \frac{1}{2}(g_{im}\delta_n{}^j - g_{in}\delta_m{}^j). \tag{59}$$

Gehen wir mit (58) in (50) ein, finden wir demnach

$$\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{i,k}}S^j{}_{imn}\delta\omega^{mn}A_j - \Theta^k{}_m\delta\omega^{mn}X_n\right)_{,k} = 0, \tag{60}$$

d.h. mit den kanonischen Feldimpulsen

$$\Pi^{ik} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{i,k}} \tag{61}$$

ergibt sich der gesuchte Erhaltungssatz durch Antimetrisieren des Koeffizienten von $\delta\omega$ in (41), weil $\delta\omega$ allein durch die Antimetrie eingeschränkt ist, d.h. das Feld

$$cL^k{}_{mn} = 2H^k{}_{mn} - (\Theta^k{}_m X_n - \Theta^k{}_n X_m) \tag{62}$$

$$\text{mit} \quad H^k{}_{mn} = S^j{}_{imn} \Pi^{ik} A_j. \tag{63}$$

Die $k = 0$-Komponente von L muß nach unserem allgemeinen Schema für $m = 0$ der Schwerpunkts- für $m = \mu$ der Drehimpulsdichte des Feldes zugeordnet werden. Man erkennt ferner, daß sich der kanonische Felddrehimpuls aus dem vom geometrischen Typ der Felder, also dem Transformationsverhalten derselben unter Lorentztransformationen, abhängigen „Spin-" und dem aus dem kanonischen Energie-Impulstensor zusammengesetzten „Bahndrehimpuls" zusammensetzen.

Wir gehen jetzt auf das elektromagnetische Maxwellfeld zurück. Dazu benutzen wir (34) um den kanonischen Energie-Impulstensor auszurechnen. Es gilt

$$\Theta^{kl} = -\frac{1}{4\pi} F^{ki} A_i{}^{,l} + \left(\frac{1}{16\pi} F^{ab} F_{ab} + \frac{1}{c} J_a A^a \right) g^{kl} \tag{64}$$

Bis jetzt haben wir bei unseren Herleitungen nur Lorentzkovarianz gefordert und durch den Tensorkalkül praktisch automatisch eingehalten. Nun muß aber jede meßbare physikalische Größe (dazu gehören offensichtlich Energie und Impuls) eichinvariant sein. Das ist aber für den kanonischen Energie-Impulstensor nicht der Fall, denn es gilt

$$A^k \to A^k + \chi^{,k}; \Theta^{kl} \to \Theta^{kl} - \frac{1}{4\pi} F^{ki} \partial_i \partial^l \chi + \frac{1}{c} J_a \partial^a \chi g^{kl}. \tag{65}$$

Wir haben aber Θ dadurch physikalisch ausgezeichnet, daß er einen Erhaltungssatz $\Theta^{kl}{}_{,k} = 0$ ergibt, falls es sich um ein freies Maxwellfeld (also $J = 0$) handelt. Der Erhaltungssatz ändert sich aber offenbar nicht, wenn man zum kanonischen Energie-Impulstensor einen divergenzfreien Term addiert. Auf diese Weise können wir einen eichinvarianten Energie-Impulstensor gewinnen. Wenn man (65) betrachtet, sieht man, daß dies durch

$$T^{kl} = \frac{1}{4\pi} F^{ki} A^l{}_{,i} - \frac{1}{c} J_a A^a g^{kl} + \Theta^{kl} \tag{66}$$

erfüllt wird. Für $\underline{J} = 0$ kann man (66) aufgrund von (23) schreiben:

$$T^{kl} = \frac{1}{4\pi} (F^{ki} A^l)_{,i} + \Theta^{kl}, \tag{67}$$

und der Zusatzterm ist divergenzfrei bzgl. k wie es sein muß.

Für uns ist im folgenden die Wirkung des Viererstroms interessant, denn er beschreibt die Quellen des elektromagnetischen Feldes. Aus (66) folgt

$$T^{kl}{}_{,k} = \frac{1}{c} J_a F^{al}. \tag{68}$$

Die Vierkraftdichte, die aufgrund des elektromagnetischen Feldes auf ein Kontinuum (bzw. Teilchen bei Verwendung der Diracschen δ-Funktion) ist demgemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{\lambda}_{\text{mech}} = -T^{k\lambda}{}_{,k} = k^{\lambda} = \frac{1}{c} J_c F^{\lambda c} = \rho E_{\lambda} + \left(\frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B}\right)^{\lambda}. \tag{69}$$

Im Dreierformalismus schreibt sich das wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{\lambda}^{(\text{mech})} + g_{\lambda}^{(\text{Feld})}\right) = -T^{\alpha\lambda}{}_{,\alpha} = T^{(M)}{}_{\alpha\lambda,\alpha}. \tag{70}$$

Der rechts im Dreierformalismus geschriebene Tensor T^M ist der Maxwellsche Spannungstensor, der sich schreiben läßt zu

$$T^{(M)}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}(E_{\alpha}E_{\beta} + B_{\alpha}B_{\beta} - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\delta_{\alpha\beta}). \tag{71}$$

Wir wollen nun (69) zur Herleitung der Kraftwirkung auf Punktladungen anwenden. Die Viererstromdichte einer Punktladung ist offenbar

$$J^0(t;\vec{x}) = qc\delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{z}(t)], \quad \vec{j}(t;\vec{x}) = q\vec{v}\delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{z}(t)]. \tag{72}$$

Daß dies eine kovariante Ausdruck ist, zeigt sich daran, daß man ihn in der explizit kovarianten Form

$$J^a(\underline{X}) = q\int_R \frac{dZ^a}{d\tau}\delta^{(4)}[\underline{X} - \underline{Z}(\tau)]d\tau \tag{73}$$

schreiben kann, wobei τ irgendein die Bahnkurve im Minkowskiraum (die Weltlinie) des Teilchens parametrisierender Skalar ist. Dazu kann die Eigenzeit des Teilchens gewählt werden. Setzen wir den Strom in der Form (72) in (69) ein, so erhalten wir nach Integration über das Dreiervolumen

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}. \tag{74}$$

Die 0-Komponente der Gleichung (69) schreibt sich

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{v}\vec{E}. \tag{75}$$

Explizit relativistisch kovariant wird diese Bewegungsgleichung erst dadurch, daß wir (74) und (75) durch den Lorentzfaktor dividieren und damit

$$\frac{dP^a}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{ab}\frac{dX_b}{d\tau} \tag{76}$$

erhalten.

Eine andere Fragestellung ist die nach dem durch auf vorgegebenen Viererbahnen bewegten Teilchen erzeugten elektromagnetischen Feld. In Lorentzeichung schreibt sich das als die inhomogene Wellengleichung (14) mit dem gegebenen Strom (73). Eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung kann allgemein angegeben werden, wenn man die Greenfunktion des d'Alembert-Operators findet. Die Greenfunktion ist definiert durch die Differentialgleichung

$$\Box_{\underline{X}} G(\underline{X};\underline{X}') = \delta^{(4)}(\underline{X} - \underline{X}') \tag{77}$$

und die Retardierungsbedingung

$$G(\underline{X};\underline{X}') = \Theta(X_0 - X_0')g(\underline{X} - \underline{X}'). \tag{78}$$

Dabei ist Θ die Heavisidesche Sprungfunktion. Um das Problem zu lösen, führen wir eine Fouriertransformation von (77) durch:

$$G(\underline{X};\underline{X}') = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{R^4} G(\underline{k};\underline{X}') \exp(ik^a X_a) d^4\underline{k}. \tag{79}$$

Setzt man dies in (77) ein, findet man:

$$-k^a k_a G(\underline{k};\underline{x}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \exp(-ik^a X'{}_a) \Rightarrow G(\underline{k};\underline{X}') = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{\exp(-ik^a X_{a'})}{k^a k_a}. \tag{80}$$

Bei der Rücktransformation von (80) in den Raum-Zeit-Bereich ist (78) zu beachten. Deshalb erscheint es sinnvoll, zunächst das k_0-Integral auszuwerten. Die Schwierigkeit besteht dabei darin, daß auf der k_0-Achse Pole der Fouriertransformierten liegen. Man hat also den Integrationsweg in der folgenden Weise ins Komplexe zu deformieren:

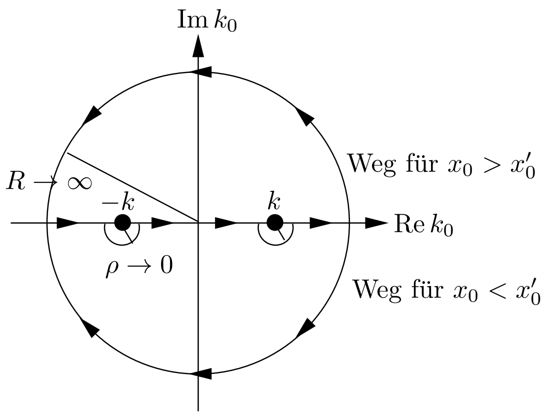

Abbildung 1: Zur Fourier-Rücktransformation der retardierten Greenfunktion der Wellengleichung.

Die kleinen Halbkreise, die die Pole ausschließen, wurden in die untere Halbebene gelegt um die obige Retardierungsbedingung zu erfüllen: Beim Durchlaufen des oberen Weges muß $X_0 > X_0'$ sein, damit das Integral über den großen Kreis im Limes für $R \to \infty$ verschwindet. Für $X_0 > X_0'$ muß der Weg in der unteren Halbebene geschlossen werden. Das Integral über diesen Weg verschwindet nach dem Residuensatz, weil innerhalb desselben keine Pole des Integranden liegen, wie wir es oben gefordert haben. Das Integral über den oberen Weg läßt sich ebenfalls vermittels des Residuensatzes ausrechnen:

$$\int_R \frac{\exp[ik_0(X_0 - X_{0'})]}{k_0^2 - k^2} dk_0 = 2\pi i \left[\frac{\exp[ik(X_0 - X_{0'})]}{2k} - \frac{\exp[-ik(X_0 - X_{0'})]}{2k}\right], \tag{81}$$

d.h. es gilt

$$g(\underline{X};\underline{X}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin[k(X_0 - X_0')]}{k} \exp[i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}_0)] d^3\vec{k}. \tag{82}$$

Zur Berechnung dieses Integrals führt man Kugelkoordinaten ein und erhält durch einfache Integration

$$G(\vec{X};\underline{X}') := G(\underline{X}-\underline{X}') \text{ mit } G(\underline{X}) = \frac{\Theta(X_0)\delta(x_0-|\vec{x}|)}{|\vec{x}|} = 2\Theta(X_0)\delta(X^aX_a) \tag{83}$$

Das elektromagnetische Feld bei vorgegebenem Strom ist also

$$A^a(\underline{X}) = \int_{R^4} \frac{1}{c}\frac{\Theta(X_0-X_{0'})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta(X_0-X_{0'}-|\vec{x}-\vec{x}'|)J^a(\underline{X}')d^4\underline{X}'. \tag{84}$$

Zum Nachweis, daß die Lorentzeichbedingung des Potentials erfüllt ist, schreiben wir

$$\partial_a A^a = \int_{R^4} \frac{4\pi}{c}[\partial_a G(\underline{X}-\underline{X}')]J^a(\underline{X}')d^4\underline{X}' = -\frac{4\pi}{c}\int_{R^4[} \partial_{a'}G(\underline{X}-\underline{X}')J^a(\underline{X}')d^4\underline{X}' = \tag{85}$$

$$= \frac{4\pi}{c}\int_{R^4} G(\underline{X}-\underline{X}')\partial_{a'}J^a(\underline{X}')d^4\underline{X}' = 0 \tag{86}$$

weil J^a divergenzfrei ist.

Zur physikalischen Interpretation rechnen wir das Ergebnis in den Dreierformalismus um:

$$\varphi = \int_{R^3} \frac{\rho(X_0-|\vec{x}-\vec{x}'|;\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3\vec{x}'; \vec{A} = \int_{R^3} \frac{\vec{A}(x_0-|\vec{x}-\vec{x}'|;\vec{x}')}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|d^3\vec{x}' \tag{87}$$

Erinnert man sich der Elektro- bzw. Magnetostatik, erkennt man, daß zum Feld zur Zeit t die Quellen zur Zeit $t_{\text{ret}} = t - r/c$, wobei r der Abstand zwischen Auf- und Quellpunkt ist, beitragen, d.h. die elektromagnetische Wirkung der Quellen breitet sich mit (der endlichen!) Lichtgeschwindigkeit c aus. Hätte man die Retardierungsforderung nicht gestellt, hätte man auch die avancierte Greenfunktion, wo die Quellen aus der Zukunft gewirkt hätten, oder eine Linearkombination aus beiden erhalten können, die aber nicht die Forderung der Kausalität erfüllen.

Wir wenden schließlich noch die Greenfunktion auf die Quellen (73) an:

$$A^a(\underline{X}) = \frac{4\pi}{c}\int_{R^4}\int_R q\delta^{(4)}[\underline{X}'-\underline{Y}(\tau)]\frac{dY^a}{d\tau}G(\underline{X}-\underline{X}')d\tau d^4\underline{X}' = \frac{4\pi}{c}\int_R q\frac{dY^a}{d\tau}G[\underline{X}-\underline{Y}(\tau)]d\tau \tag{88}$$

Das ist das sog. Lienard-Wiechertsche Potential.

3 Monopole in der klassischen Elektrodynamik

Die quellenfreien Maxwellgleichungen

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{c\partial t};\ \text{rot}\,\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{c\partial t};\ \text{div}\vec{B} = 0 \tag{89}$$

weisen neben der aus der Struktur von Raum und Zeit gegebenen Symmetrie gegenüber der Poincarégruppe und der Eichinvarianzsymmetrie noch eine dynamische Symmetrie auf. Diese läßt sich finden, wenn man die folgende Transformation

$$\vec{E} = \alpha\vec{E}' + \beta\vec{B}';\ \vec{B} = \gamma\vec{E}' + \delta\vec{B}' \tag{90}$$

mit Konstanten α, β, γ und δ bildet und zunächst Forminvarianz der freien Maxwellgleichungen gegenüber diesen Transformationen fordert. Dazu setzen wir (90) in (89) ein:

$$\mathrm{rot}\,(\alpha\vec{E}' + \beta\vec{B}') = -\frac{\partial}{c\partial t}(\gamma\vec{E}' + \delta\vec{B}') \Rightarrow \frac{\partial}{c\partial t}(-\alpha\vec{B}' + \beta\vec{E}') = -\frac{\partial}{c\partial t}(\gamma\vec{E}' + \delta\vec{B}') \Rightarrow \tag{91}$$

$$\alpha = \delta;\ \beta = -\gamma. \tag{92}$$

Damit auch die Energiedichte u und die Energieströmung (Poyntingvektor) $\vec{S}$

$$u = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2);\ \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B} \tag{93}$$

invariant bleiben, muß

$$\alpha = \cos\xi\ ; \beta = \sin\xi;\ \gamma = -\sin\xi;\ \delta = \cos\xi \tag{94}$$

gelten. Die gewonnene Transformation läßt sich in der folgenden Matrizenschreibweise übersichtlich darstellen:

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\xi & \sin\xi \\ -\sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\xi & -\sin\xi \\ \sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix}. \tag{95}$$

Diese Transformationen heißen *duale Transformationen.*

Die Maxwellgleichungen mit Quellen, also Strömen und Ladungen, sind nicht invariant unter dualen Transformationen. Das erkennt man sofort, wenn man annimmt, es gelten die Maxwellgleichungen (1) für die gestrichenen Feldgrößen, und die duale Transformation (95) anwendet. Die inhomogenen Gleichungen im ungestrichenen Feldsystem lauten dann nämlich

$$\rho = \mathrm{div}\vec{E} = \cos\xi\mathrm{div}\vec{E}' = 4\pi\cos\xi\rho';\ \mathrm{div}\vec{B} = -4\pi\sin\xi\rho' = -4\pi\tan\xi\rho, \tag{96}$$

d.h. wir haben eine i.A. nicht verschwindende Quelldichte magnetischer Ladungen im Widerspruch zu den Forderungen der Maxwellgleichungen erhalten. Analog folgt die Existenz eines Stromes bestehend aus magnetischen Ladungen wenn man die übrigen Maxwellgleichungen beachtet. Zusammen ergibt sich genau wie bei Ladungen eine Kontinuitätsgleichung für die magnetischen Ladungen und Ströme genauso wie für die elektrische Ladung.

Gehen wir nun umgekehrt vor und lassen die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes fallen, so gehen die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ völlig gleichberechtigt in die entstehenden Maxwellgleichungen ein:

$$-\mathrm{rot}\,\tilde{\mathrm{E}} - \frac{\partial\tilde{\mathrm{B}}}{\mathrm{c}\partial\mathrm{t}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\tilde{\mathrm{k}};\ \mathrm{rot}\,\tilde{\mathrm{B}} - \frac{\partial\tilde{\mathrm{E}}}{\mathrm{c}\partial\mathrm{t}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\tilde{\mathrm{j}};\ \mathrm{div}\tilde{\mathrm{B}} = 4\pi\rho_{\mathrm{m}};\ \mathrm{div}\tilde{\mathrm{E}} = 4\pi\rho_{\mathrm{e}}. \tag{97}$$

Man erkennt auch sofort, daß die Felder und Quellen einem Dualitätsprinzip gehorchen. Ersetzt man nämlich in der ersten und dritten der Gleichungen (97) $\vec{E}$ durch $-\vec{B}$ und $\vec{B}$ durch $\vec{E}$ sowie $\vec{k}$ durch $\vec{j}$ und ρ_m durch ρ_e, erhält man die zweite und vierte Gleichung.

Ein Blick auf (96) zeigt, daß die neuen Maxwellgleichungen (97) immer dann auf die alten Maxwellgleichungen dual transformiert werden können, wenn die magnetische und elektrische Ladung immer in einem materialunabhängigen Verhältnis in der Natur vorkommt. Dann wären die alten Maxwellgleichung lediglich Konvention und die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gemäß den dualen Transformationen völlig gleichberechtigt.

Wir ziehen nun zunächst einige einfache Konsequenzen aus der Annahme der Existenz magnetischer Monopole bzw. Ladungsverteilungen. Wir haben oben gesehen, daß die Maxwellgleichungen gegenüber der vollen Lorentzgruppe O(1,3) invariant sind, d.h. die Elektrodynamik manifest kovariant (also im Sinne des Tensorkalküls) im Raum mit der Signatur (1,3) formulierbar ist (Minkowskiraum). Die Gruppe O(1,3) kann in folgende vier Bestandteile zerlegt werden:

Die SO(1,3) ist die Untergruppe der O(1,3) mit der Determinante $+1$. Diese enthält die Untergruppe SO(1;3)$\uparrow$, die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe, die die Zusammenhangskomponente mit der Identität darstellt. Sie bedeutet physikalisch den Wechsel des Bezugssystems von einem Inertialsystem in ein anderes und wird durch die räumlichen Drehungen und die „Lorentzboosts“ erzeugt (6-parametrige Gruppe). Sie läßt dabei die Zeitrichtung invariant (d.h. der Zeitbasisvektor bleibt im Vorwärtslichtkegel). Die zu dieser Zusammenhangskomponente mit der Identität gehörige Nebenklasse, die SO(1;3)$\downarrow$ enthält die eigentlich antichronen Lorentztransformationen und ist die Zusammenhangskomponente mit der totalen Inversion, d.h. der gleichzeitigen Zeitumkehr und Rauminversion.

Auch die Nebenklasse zur vollen SO(1,3), also die Menge O(1;3)/SO(1,3) zerfällt ihrerseits wieder in zwei Teile, nämlich die uneigentlich orthochronen (enthält die reine Rauminversion) und die uneigentlich antichronen Lorentztransformationen.

Die diskreten Symmetrien sind für die klassische Theorie relativ uninteressant, werden aber in der Quantentheorie äußerst wichtig (Parität, PCT-Theorem). Wie wir eben gesehen haben, genügt die Untersuchung der Zeitumkehrtransformation T und der Rauminversion P (für Paritätsoperator). Alle anderen nicht mit der Identität zusammenhängenden Transformationen lassen sich nach der obigen Betrachtung aus der SO(1;3) und T und P zusammensetzen. Für das Transformationsverhalten einiger Größen kann man die folgende Tabelle erstellen:

Größe	Zeitumkehr	Rauminv.	Begründung
t	-1	$+1$	Definition
$\vec{x}$	$+1$	-1	Definition
$\vec{v}$	-1	-1	$\vec{v} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t$
$\vec{F}$	$+1$	-1	$\vec{F} = m(d^2\vec{x}/dt^2)$; m: Skalar
$\vec{E}$	$+1$	-1	Lorentzkraft:
$\vec{B}$	-1	$+1$	$\vec{F} = e\vec{E} + e/c\vec{v} \times \vec{B}$
ρ_e	$+1$	$+1$	div$\vec{E}$ ist skalar
ρ_m	-1	$+1$	div$\vec{B}$ ist pseudoskalar
$\vec{j}$	-1	-1	Maxwellgleichungen (97)
$\vec{k}$	$+1$	$+1$	und obige Beziehungen

Das bedeutet aber, daß bei der Annahme der Existenz von Materie, die elektrische und magnetische Ladungsverteilung enthält, die Symmetrie unter Zeitumkehr und Rauminversion nicht mehr gegeben ist, d.h. diese Symmetriebrechungen treten bereits in der klassischen Theorie auf.

Es sollen nun die Möglichkeiten der Entwicklung einer klassischen dynamischen Theorie punktförmiger Monopole untersucht werden. Dazu kehren wir zum manifest kovarianten Viererformalismus zurück. Betrachtet man die eben postulierten modifizierten Maxwellgleichungen (97), so sieht man, daß die Monopole die Integrabilitätsbedingungen (25) verletzen. Die modifizier-

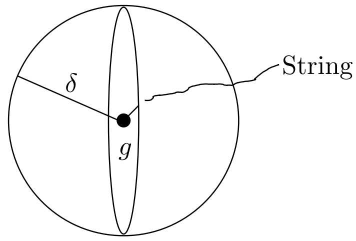

Abbildung 2: Zur Beschreibung des singulären Vektorpotentials des magnetischen Monopols mittels eines „Strings“.

ten Maxwellgleichungen müssen nämlich im Viererformalismus offenbar wie folgt geschrieben werden:

$$\partial_b F^{ba} = \frac{4\pi}{c} J^a;\ \partial_b (F\dagger)^{ba} = \frac{4\pi}{c} K^a \text{ mit } K^0 = c\rho_m;\ K^\alpha = k_\alpha. \tag{98}$$

Wir nehmen dabei an, daß die Viererströme $\underline{J}$ und $\underline{K}$ durch Punktquellen erzeugt werden, d.h. gemäß (73):

$$J^a(\underline{x}) = e \int_R \frac{dy^a}{d\tau} \delta^{(4)}[\underline{x} - \underline{y}(\tau)] d\tau;\ K^a(\underline{x}) = g \int_R \frac{dz^a}{d\tau} \delta^{(4)}[\underline{x} - \underline{z}(\tau)] d\tau. \tag{99}$$

Das bedeutet nun aber, daß die Integrabilitätsbedingungen nur auf den Weltlinien der magnetischen Monopole verletzt sind, d.h. man kann vermuten, daß es möglich ist, ein singuläres Vektorpotential $\underline{A}$ zu konstruieren, das den Pol beschreibt. Wir denken uns dazu zunächst einen im Ursprung eines Koordinatensystems ruhenden magnetischen Monopol, d.h. es gilt (wir kehren kurz zum Dreierformalismus zurück):

$$\mathrm{div} \vec{B} = 4\pi g \delta^{(3)}(\vec{x}). \tag{100}$$

Wendet man darauf den Gaußschen Satz an, so folgt wie in der Elektrostatik

$$\forall \delta > 0 : \oint_{\partial K_\delta} \vec{B} d\vec{S} = 4\pi g \tag{101}$$

Dabei soll mit K_δ die Kugel mit dem Radius δ um den Ursprung bezeichnet werden. Andererseits gilt aber außer im Ursprung $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$. $\vec{A}$ kann nun aber nicht regulär sein, d.h. es muß auf jeder Kugelfläche, die den Pol in ihrem Inneren enthält, eine Singularität vorliegen, durch deren Existenz (101) gesichert ist, d.h. ausgehend vom Pol muß es eine sich ins Unendliche erstreckende Linie geben, längs der $\vec{A}$ singulär wird. Diese Linie ist der sog. String.

Denken wir uns nun den Monopol längs irgendeiner Weltlinie im Minkowskiraum bewegt, erkennen wir, daß zu jedem Zeitpunkt ein solcher sich halbseitig ins Unendliche erstreckender String gegeben sein muß, der die Flußbedingung (101) sichert. Insgesamt entsteht ein sich halbseitig ins Unendliche erstreckendes zweidimensionales Blatt (sheet) im Minkowskiraum. Dieses Blatt wird nun wie folgt parametrisiert:

$$S : \underline{y} = \underline{y}(\tau_0; \tau_1) \tag{102}$$

wobei τ_0 und τ_1 die Flächenparameter sind, die wie folgt gewählt seien: $\tau_1 = 0$ soll gerade die Weltlinie des Pols und damit der einzige im Endlichen gelegene Rand des Blattes sein. τ_0 ist

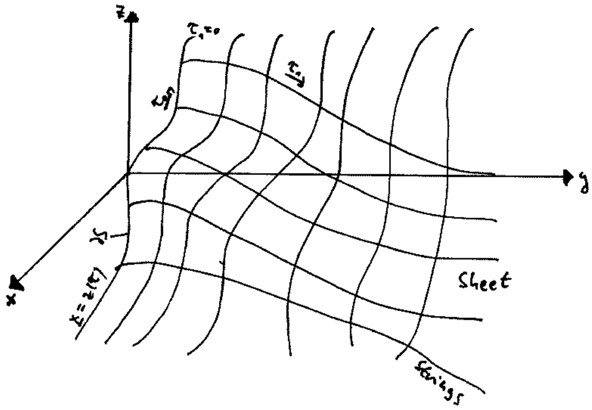

Abbildung 3: Beschreibung eines magnetischen Monopols durch ein Blatt im dreidimensionalen Minkowskiraum. Die zeitartige Weltlinie des Strings ist durch $z(\tau)$ gegeben. Aus jedem Punkt der Weltlinie entspringt ein raumartiger String. Diese Strings bilden das Blatt. In der physikalischen Raumzeit ist das Blatt eine dreidimensionale Hyperfläche. Die Erklärung der Parametrisierung des Blattes findet sich im Text.

ein skalarer Zeitparameter mit Wertebereich $\mathbb{R}$, für $\tau_1 = 0$ gerade die Eigenzeit τ des Pols. $\tau_1 \in [0; \infty[$ parametrisiert für festgehaltenes τ_0 den zu diesem Zeitpunkt gehörigen String.

Wir bemerken, daß die Strings und damit auch das Blatt ein Rechenhilfsmittel darstellen und physikalisch unbeobachtbar sind. Man darf sich den String als Kette von Dipolen vorstellen, die nicht real existieren. Das heißt aber, daß bei einer konsistenten Beschreibung keine Ladung diesen String durchlaufen darf, weil ja sonst die Wirkung desselben auf die Ladung beobachtbar wäre. Das führt in dieser Theorie zum sog. Dirac-Veto und wird weiter unten noch streng mathematisch zu fordern sein. Andererseits ist die Wahl des Strings frei (verschiedene Strings führen zu Vektorpotentialen, die sich höchstens durch Eichtransformationen voneinander unterscheiden).

Für den Feldsechservektor der durch die Pole modifizierten Theorie schreiben wir:

$$F^{ab} = \partial^a A^b - \partial^b A^a + \frac{4\pi}{c}(G\dagger)^{ab}. \tag{103}$$

Der Sechservektor $\underline{G}$ verschwindet überall außer auf dem Blatt. Setzt man diesen Ansatz in (98) ein, so findet man nach (99)

$$\partial_b G^{ab} = g \int_R \frac{dz^a}{d\tau} \delta^{(4)}[\underline{x} - z(\tau)] d\tau = g \int_{\partial S} \delta^{(4)}[\underline{x} - \underline{y}(\tau_0; \tau_1 = 0)] \frac{\partial y^a}{\partial \tau_0} d\tau_0. \tag{104}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt beachtet, daß die Weltlinie des Pols der Rand des Blattes ist. Wir können also (104) als Wegintegral schreiben:

$$\partial_b G^{ab} = g \int_{\partial S} \delta^{(4)}[\underline{x} - \underline{y}(\tau_1; \tau_2)] \left[\frac{\partial y^a}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \frac{\partial y^a}{\partial \tau_1} d\tau_1 \right]. \tag{105}$$

Nach dem Stokesschen Satz für die Ebene gilt:

$$\partial_b G^{ab} = -g \int_S \left[\frac{\partial y^a}{\partial \tau_0} \frac{\partial \delta^{(4)}(\underline{x} - \underline{y})}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y^a}{\partial \tau_1} \frac{\partial \delta^{(4)}(\underline{x} - \underline{y})}{\partial \tau_0} \right] d\tau_0 d\tau_1 = \tag{106}$$

$$= -g \int_S \left[\frac{\partial y^a}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y^a}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^a}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_0} \right] \delta^{(4)}(\underline{x} - \underline{y}) d\tau_0 d\tau_1 = \tag{107}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^b} g \int_S \left[\frac{\partial y^a}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y^a}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_0} \right] \delta^{(4)}(\underline{x} - \underline{y}) d\tau_0 d\tau_1 \tag{108}$$

Dabei haben wir die Kettenregel angewandt und statt nach y nach x differenziert, d.h. man erhält eine Lösung für $\underline{G}$ zu

$$G^{ab}(\underline{x}) = g \int_S \left[\frac{\partial y^a}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y^a}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_0} \right] \delta^{(4)}[\underline{x} - \underline{y}(\tau_0; \tau_1)] d\tau_0 d\tau_1. \tag{109}$$

Wir haben oben die retardierte Greenfunktion $G(\underline{x} - \underline{x}')$ (83) für die Wellengleichung hergeleitet. Wir wollen nun auch das oben angesetzte Feld $\underline{A}$ im Fall der Existenz von Polen berechnen. Gemäß (103) muß gelten:

$$(F\dagger)_{cd} = \epsilon_{abcd} \partial^a A^b - \frac{4\pi}{c} G_{cd}. \tag{110}$$

Falls nun keine elektrischen Ladungen vorhanden sind, gilt

$$\partial_a F^{ab} = 0. \tag{111}$$

Das ist eine Integrabilitätsbedingung für $\underline{F}\dagger$, d.h. es existiert, ein Vektorpotential $\underline{B}$ für $\underline{F}\dagger$. Analog zum Liénard-Wiechert-Potential (88) gilt:

$$(F\dagger)_{cd} = \partial_c B_d - \partial_d B_c; B_d(\underline{x}) = \frac{4\pi}{c} g \int_R G(\underline{x} - \underline{x}') \frac{dz_d}{d\tau} d\tau. \tag{112}$$

Setzen wir das in (110) ein, so erhalten wir unter Verwendung von (109)

$$\epsilon_{abcd} \partial^a A^b = \frac{4\pi g}{c} \int_R \left[\partial_c G(\underline{x} - \underline{z}) \frac{dz_d}{d\tau} - \partial_d G(\underline{x} - \underline{z}) \frac{dz_c}{d\tau} \right] d\tau + \tag{113}$$

$$+ \frac{4\pi g}{c} \int_S \left[\frac{\partial y_c}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_d}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y_c}{\partial \tau_1} \frac{\partial y_d}{\partial \tau_0} \right] \delta^{(4)}(\underline{x} - \underline{y}) d\tau_1 d\tau_0. \tag{114}$$

Benutzen wir wieder den Stokesschen Satz, ergibt sich

$$\epsilon_{abcd} \partial^a A^b = \frac{4\pi}{c} g \int_S \Big[\quad \partial_c \tfrac{\partial G(\underline{x} - \underline{y})}{\partial \tau_0} \tfrac{\partial y_d}{\partial \tau_1} - \partial_c \tfrac{\partial G(\underline{x} - \underline{y})}{\partial \tau_1} \tfrac{\partial y_d}{\partial \tau_0} +$$

$$+ \tfrac{\partial y_c}{\partial \tau_0} \tfrac{\partial y_d}{\partial \tau_1} \Box_x G(\underline{x} - \underline{y}) \Big] d\tau_1 d\tau_0 - (cd) \tag{115}$$

Dabei soll (cd) derselbe Ausdruck mit vertauschten Indizes c und d sein. Differenziert man nun statt nach x nach y und formt den Integranden um, findet man schließlich nach nochmaligem Vertauschen der Ableitungen

$$\epsilon_{abcd} \partial^a A^b = \frac{4\pi g}{c} \int_S \frac{\partial^2 G(\underline{x} - \underline{y})}{\partial y^k \partial y_l} \frac{\partial y_m}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_n}{\partial \tau_1} [\delta^k_d \delta^m_l \delta^n_c + \delta^k_c \delta^m_d \delta^n_l + \delta^k_l \delta^m_c \delta^n_d - (cd)] = \tag{116}$$

$$= \frac{4\pi g}{c} \epsilon_{abcd} \epsilon^{bkmn} \partial^a \int_S \frac{\partial G(\underline{x} - \underline{y})}{\partial x^k} \frac{\partial y_m}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_n}{\partial \tau_1} d\tau_0 d\tau_1. \tag{117}$$

Ein Vergleich mit dem obigen Ansatz ergibt die Darstellung

$$A^b = \frac{4\pi g}{c}\epsilon^{bkmn}\int_S \frac{\partial G(\underline{x}-\underline{y})}{\partial x^k}\frac{\partial y_m}{\partial \tau_0}\frac{\partial y_n}{\partial \tau_1}d\tau_0 d\tau_1. \tag{118}$$

Da die Feldgleichungen linear sind, gilt das Superpositionsprinzip, so daß man die Beiträge der elektrischen Ladungen (gegeben durch die Liénard-Wiechert-Potentiale) oder weiterer Pole addieren kann. Damit ist gezeigt, daß die Dynamik der Felder, Ladungen und Pole eine in sich konsistente Theorie bilden, die mit der Forderung nach Lorentzinvarianz verträglich ist.

Als nächsten Schritt haben wir den Lagrangeformalismus der Felder, Ladungen und Pole zu entwickeln. In Abschnitt 1 haben wir das Hamiltonsche Prinzip für Felder entwickelt. Die Ladungen lassen sich in diesen Formalismus einbringen, wenn man die durch sie erzeugten Ströme durch (73) ausdrückt und die Wirkung für das freie Teilchen addiert. Die Wirkung des freien Teilchens ist bekanntlich

$$I_1 = -mc^2\int d\tau. \tag{119}$$

Im folgenden müssen wir zunächst die Stringvariablen $\underline{y}$ in den Lagrangeformalismus einarbeiten. Analog zur Bewegungsgleichung (76) für Ladungen, muß sich gemäß dem obigen Dualitätsprinzip als Bewegungsgleichung für Pole ergeben:

$$m\frac{d^2 z^a}{d\tau^2} = \frac{g}{c}(F\dagger)^{ab}\frac{dz_b}{d\tau}. \tag{120}$$

Es ist klar, daß sich das allein dadurch erreichen lassen muß, daß man in (118) das entsprechende Glied für die Pole addiert und statt der klassischen Felder (103) einsetzt. Nach (34) haben wir

$$I_2 = -\frac{1}{16\pi}\int_{\mathbb{R}^4} F_{ab}(\underline{x})F^{ab}(\underline{x})d^4\underline{x} \tag{121}$$

als Wirkung des elektromagnetischen Feldes. Da $\underline{F}$ aber durch (19) definiert wird, beschreibt diese Wirkung nicht mehr das freie Maxwellfeld sondern, wie wir im folgenden zeigen müssen, zusätzlich die Wirkung der Pole. Weiter ist die Wechselwirkung des elektrischen Viererstroms zu berücksichtigen, die nach (34) wie folgt in die Gesamtwirkung eingeht.

$$I_3 = -\sum_e \frac{e}{c}\int_R A^a(\underline{z})\frac{dz_a}{d\tau}d\tau. \tag{122}$$

Wir haben nun zu zeigen, daß die Wirkung $I = I_1 + I_2 + I_3$ die Bewegung der Pole und Ladungen sowie die Dynamik der Felder richtig beschreibt. Dazu bilden wir die Variation der Wirkung im Sinne des Hamiltonschen Prinzips. Dabei werden die Koordinaten der Teilchen und Strings sowie die Felder variiert. Es gilt

$$\delta I_1 = -\delta c^2\int \sum_{e+g} m d\tau. \tag{123}$$

Da die Eigenzeit τ nicht unabhängig von den Koordinaten ist, führen wir einen unabhängigen Parameter λ für die Weltlinie ein, führen die Variation aus und kehren dann wieder zur Eigenzeit als Parameter der Weltlinie zurück:

$$I_1 = -c\int_{\mathbb{R}}\sum_{e+g} m\sqrt{\frac{dz^a}{d\lambda}\frac{dz_a}{d\lambda}}d\lambda \Rightarrow \delta I_1 = c\int_{\mathbb{R}}\sum_{e+g}\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{dx_a}{d\lambda}\sqrt{\frac{dx^b}{d\lambda}\frac{dz_b}{d\lambda}}^{-1}\right]\delta z^a d\lambda. \tag{124}$$

Dabei ist einmal partiell integriert worden. Geht man nun wieder zu τ als Parameter über, findet man

$$\delta I_1 = \sum_{e+g} m \int_R \frac{d^2 z_a}{d\tau^2} \delta z^a d\tau. \tag{125}$$

Auch der dritte Term ist aus der gewöhnlichen Elektrodynamik bekannt und seine Variation leicht ausführbar:

$$\begin{aligned} \delta I_3 &= -\sum_e \frac{e}{c} \int_{\mathbb{R}} \left[\delta A^a dz_a + A^{a,b} \delta z_b dz_a + A^a \frac{d\delta z_a}{d}\tau \right] d\tau \\ &= -\sum_e \frac{e}{c} \int_{\mathbb{R}} \left[(A^{a,b} - A^{b,a}) \delta z_b + \delta A^a \right] \frac{dz_a}{d\tau} d\tau. \end{aligned} \tag{126}$$

Jetzt ist noch I_2 zu variieren:

$$\delta I_2 = -\frac{1}{16\pi} \delta \int_{R^4} F_{ab} F^{ab} d^4 \underline{x} = -\frac{1}{8\pi} \int_{R^4} F_{ab} \delta F^{ab} d^4 \underline{x}. \tag{127}$$

Wir setzen nun für $\underline{F}$ den Ausdruck (103) ein:

$$\delta I_2 = -\int_R \frac{1}{8\pi} F_{ab} \left[\delta(\partial^a A^b - \partial^b A^a) + \frac{g}{2c} (\delta G\dagger)^{ab} \right] d^4 \underline{x} \tag{128}$$

Der zweite Term ist nach (109):

$$\delta I_{22} = -\frac{g}{2c} \int_{\mathbb{R}^4} (F\dagger)_{ab} \delta \int_S \left[\frac{\partial y^a}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y^a}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_0} \right] \delta^{(4)} [\underline{x} - \underline{y}(\tau_0; \tau_1)] d\tau_0 d\tau_1 d^4 \underline{x} = \tag{129}$$

$$= -\frac{g}{c} \int_{\mathbb{R}^4} (F\dagger)_{ab} \delta \int_S \frac{\partial y^a}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_1} \delta^{(4)} [\underline{x} - \underline{y}(\tau_0; \tau_1)] d\tau_0 d\tau_1 d^4 \underline{x}. \tag{130}$$

Die Ausführung der Variation des Integrals über das Blatt ergibt

$$\int_S \left\{ \left[\frac{\partial \delta y^a}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_1} + \frac{\partial y^a}{\partial \tau_0} \frac{\partial \delta y^b}{\partial \tau_1} \right] \delta^4 (\underline{x} - \underline{y}) + \frac{\partial y_a}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_1} \frac{\partial \delta^{(4)} (\underline{x} - \underline{y})}{\partial y_c} \delta y^c \right\} d\tau_0 d\tau_1. \tag{131}$$

Wir setzen dies wieder in den Ausdruck für δI_{22} ein, berechnen das Integral über die δ-Distribution und vertauschen im letzten Term die Differentiation nach y mit der nach x:

$$\delta I_2 = -\frac{g}{c} \int_S (F\dagger)_{ab}(\underline{y}) \left[\frac{\partial \delta y^a}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_1} + \frac{\partial y^a}{\partial \tau_0} \frac{\partial \delta y^b}{\partial \tau_1} \right] d\tau_0 d\tau_1 + \tag{132}$$

$$+ \frac{g}{c} \int_{\mathbb{R}^4} (F\dagger)_{ab} \int_S \frac{\partial y^a}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_1} \frac{\partial \delta^{(4)} (\underline{x} - \underline{y})}{\partial x^c} \delta y^c d\tau_0 d\tau_1 d^4 \underline{x}. \tag{133}$$

Nach partieller Integration des Terms in der zweiten Zeile erhalten wir

$$\delta I_{22} = -\frac{g}{c} \int_S (F\dagger)_{ab}(\underline{y}) \left[\frac{\partial \delta y^a}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_1} - \frac{\partial \delta y^a}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_0} \right] d\tau_0 d\tau_1 - \frac{g}{c} \int_S (F\dagger)_{ab,c}(\underline{y}) \frac{\partial y^a}{\partial \tau_0} \delta y^c d\tau_0 d\tau_1 \tag{134}$$

Der erste Term ist weiter umzuformen:

$$-\frac{g}{c} \int_S \left\{ \frac{\partial [(F\dagger)_{ab} \delta y^a]}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_1} - \frac{\partial [(F\dagger)_{ab} \delta y^a]}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_0} - \frac{\partial (F\dagger)_{ab}}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_1} \delta y^a + \frac{\partial (F\dagger)_{ab}}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^b}{\partial \tau_0} \delta y^a \right\} d\tau_0 d\tau_1. \tag{135}$$

Die ersten beiden Terme lassen sich wieder nach dem Stokesschen Satz umformen (wobei wieder beachtet wird, daß der Rand des Blattes S die Weltlinie des Pols ist):

$$-\frac{g}{c}\left\{\int_{\partial S}(F\dagger)_{ab}(\underline{z})\frac{dz^b}{d\tau}\delta z^a d\tau - \int_S (F\dagger)_{ab,c}\left[\frac{\partial y^b}{\partial\tau_1}\frac{\partial y^c}{\partial\tau_0} - \frac{\partial y^c}{\partial\tau_1}\frac{\partial y^b}{\partial\tau_0}\right]\delta y^a d\tau_0 d\tau_1\right\} \tag{136}$$

Setzen wir die gewonnenen Ergebnisse in die Variation von I_2 ein, erhalten wir:

$$\delta I_2 = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^4}\partial^b F_{ab}\delta A^a d^4\underline{x} - \frac{g}{c}\left\{\int_{\partial S}(F\dagger)_{ab}(\underline{z})\frac{dz^b}{d\tau}\delta z^a d\tau - \right. \tag{137}$$

$$\left. - \int_S \frac{\partial y^c}{\partial\tau_0}\frac{\partial y^b}{\partial\tau_1}\delta y^a\left[(F\dagger)_{ab,c} + (F\dagger)_{bc,a} + (F\dagger)_{ca,b}\right] d\tau_0 d\tau_1\right\}, \tag{138}$$

wobei wir im letzten Term lediglich einige Umbenennungen in den Summationsindizes vorgenommen haben.

Die Bewegungs- bzw. Feldgleichungen erhält man nun, indem man die Koeffizienten vor den unabhängig voneinander zu variierenden Variablen null setzt:

Für die Ladungskoordinaten folgt dann

$$m\frac{d^2 z^b}{d\tau^2} = \frac{e}{c}(\partial^b A^a - \partial^a A^b)\frac{dz_a}{d\tau}. \tag{139}$$

Das stimmt mit der in Abschnitt 1 gefundenen Bewegungsgleichung für Ladungen überein. Das ist aber offenbar nur dann die richtige Bewegungsgleichung, wenn $G_{ab} = 0$ ist, d.h. wenn die Ladung nie einen zu einem Pol gehörigen String schneidet. Das ist der oben versprochene Beweis für das Dirac-Veto.

Für die Polkoordinaten folgt

$$m\frac{d^2 z_a}{d\tau^2} = \frac{g}{c}(F\dagger)_{ab}\frac{dz^b}{d\tau}. \tag{140}$$

Bzgl. der Stringvariablen erhält man nur eine Bedingung an die Felder, keine Bewegungsgleichung. Das war zu erwarten, weil der String keine Observable sein soll. Die Bedingung an die Felder lautet:

$$(F\dagger)_{ab,c} + (F\dagger)_{bc,a} + (F\dagger)_{ca,b} = 0. \tag{141}$$

Das läßt sich durch Dualisieren umschreiben zu

$$F^{cd}{}_{,c} = 0 \tag{142}$$

Diese Gleichung gilt wiederum nur, wenn keine Ladung einen String schneidet.

Damit ist gezeigt, daß es möglich ist, eine Elektrodynamik, in der magnetische Monopole mathematisch konsistent mit Hilfe der Strings zu formulieren.

4 Der kanonische Formalismus für Teilchen und Pole

Wir verzichten im folgenden auf die im Artikel Diracs gegebene vollständige Quantisierung der Teilchen und Felder. Wir beschränken uns vielmehr auf die Quantisierung der Teilchen und behalten das elektromagnetische Feld als klassisches Feld bei. Das ist möglich, weil wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, daß die Feldvariablen und die Teilchenvariablen unabhängige dynamische Observable sind. Das Hauptargument für die Einführung der Monopole, nämlich die Quantelung der elektrischen Ladung, läßt sich bereits von diesem Standpunkt aus gewinnen.

Zunächst soll der Übergang vom Lagrange- zum Hamiltonformalismus für Teilchen angegeben werden, der hier benutzt werden soll. Wir verlassen zunächst den manifest kovarianten Formalismus, wie es für die Hamiltonsche Theorie natürlich ist, da in ihr die Zeit ausgezeichnet wird. Die Wirkung schreibt sich dann als Zeitintegral über die Lagrangefunktion:

$$I(q(t);t) = \int_{t_0}^{t} L dt'. \tag{143}$$

Als dynamische Variablen werden zunächst die x und dx/dt zur Zeit t (obere Integrationsgrenze des Integrationsintervalls!) aufgefaßt. Wir bilden die totale Variation der x, die sich aus einer Variation der Bahn $x(t')$, die unabhängig von der oberen Integrationsvariablen t ist, und einer Variation der oberen Integrationsvariablen t zusammensetzt:

$$\Delta\vec{x} = \delta\vec{x} + \frac{d\vec{x}}{dt}\delta t. \tag{144}$$

Daraus berechnet sich die totale Variation der Wirkung zu

$$\begin{aligned}\Delta I &= \frac{\partial I}{\partial \vec{x}}\delta\vec{x} + \frac{\partial I}{\partial \frac{d\vec{x}}{dt}}\frac{d}{dt}\delta\vec{x} + \frac{\partial I}{\partial t}\delta t = \int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial L}{\partial \vec{x}}\delta\vec{x} + \frac{\partial L}{\partial \frac{d\vec{x}}{dt}}\frac{d}{dt}\delta\vec{x}\right] dt' + L\delta t \\ &= \frac{\partial L}{\partial \frac{d\vec{x}}{dt}}\Delta\vec{x} - \left[\frac{\partial L}{\partial \frac{d\vec{x}}{dt}} - L\right]\delta t\end{aligned} \tag{145}$$

Nun werden die kanonisch konjugierten Impulse eingeführt als die Koeffizienten von $\Delta\vec{x}$ und die negative „Energie“ $-W$ als Koeffizient von δt:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \frac{d\vec{x}}{dt}} = \frac{\partial I}{\partial \vec{x}};\ W = \frac{\partial L}{\partial \frac{d\vec{x}}{dt}}\frac{d\vec{x}}{dt} - L = \vec{p}\frac{d\vec{x}}{dt} - L = -\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{146}$$

Nun betrachten wir als einen Satz dynamischer Variabler $\vec{x}$, $\vec{p}$ und W. Das sind bei einem System von f Freiheitsgraden im Konfigurationsraum $2f + 1$ Variable. Da bei einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung nur f erste Integrale existieren, kann der Phasenraum aber nur $2f$ Variable umfassen, d.h. es muß eine Beziehung der Form

$$H(\vec{x};\vec{p};t) - W = 0 \tag{147}$$

geben. H ist die Hamiltonfunktion. Betrachtet man (146) und (147) genauer, sieht man, daß es sich um eine Legendretransformation von $d\vec{x}/dt$ und L zugunsten von $\vec{p}$ und H handelt, daß also der Hamiltonformalismus mit dem Lagrangeformalismus äquivalent ist. Setzt man die Beziehungen aus (146) in (147) ein, erkennt man, daß die Wirkungsfunktion I eine Lösung der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (HJDGL)

$$H\left(\vec{x};\frac{\partial S}{\partial \vec{x}};t\right) + \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = 0 \tag{148}$$

ist. Als partielle Differentialgleichung in den f Variablen $\vec{x}$ hängt jede Lösung S von f willkürlichen Parametern (Integrationskonstanten α_k, $k = 1 \ldots f$) ab. In diesem Sinne kann S als Erzeugende einer kanonischen Transformation aufgefaßt werden. Führt man die Transformation durch, gelangt man zu einer verschwindenden Hamiltonfunktion in den neuen kanonischen Variablen. Infolgedessen sind diese neuen Variablen allesamt vermöge der Bewegung konstant.

Die Hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen leiten sich wie üblich aus der Bildung des totalen Differentials von H ab:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} d\vec{p} + \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} d\vec{x} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \equiv \frac{d\vec{x}}{dt} \vec{dp} - \frac{d\vec{p}}{dt} \vec{dx} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \Rightarrow \tag{149}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}; \; \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}; \; \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{150}$$

Die Zeitableitung einer beliebigen Observable $f(\vec{x}; \vec{p}; t)$ ergibt sich zu

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}; \vec{p}; t) = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f; H\}_{\mathrm{PB}} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{151}$$

Dabei ist die Poissonklammer (Poisson-Bracket) zwischen zwei Observablen f und g definiert zu

$$\{f; g\}_{\mathrm{PB}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \frac{\partial g}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \frac{\partial g}{\partial \vec{x}}. \tag{152}$$

Die Bedeutung der Poissonklammern besteht darin, daß sie auf dem Raum der Phasenraumfelder eine Liealgebra bilden. Der Fluß des durch die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen gegebenen Gleichungssystems wird nach Gl. (151) von der Hamiltonfunktion erzeugt. Man kann die Liealgebra als Liealgebra der die kanonischen Transformationen (d.h. lokal symplektischen Transformationen) umfassenden Transformationsgruppe ansehen. Diese Gruppe enthält insbesondere die (stetig differenzierbaren) Symmetrietransformationen des dynamischen Systems. Auf diese Weise hat man die Geometrie des Systems in invarianter Weise charakterisiert. Die Poissonklammern zwischen $\vec{x}$ und $\vec{p}$ lauten, wie eine direkte Anwendung der Definition (152) unmittelbar zeigt:

$$\{x_a; p_b\}_{\mathrm{PB}} = \delta_{ab}; \; \{x_a; x_b\}_{\mathrm{PB}} = \{p_a; p_b\}_{\mathrm{PB}} = 0. \tag{153}$$

Diese Poissonklammern zeigen, daß $\vec{p}\delta\vec{a}$ die infinitesimale Translation $\vec{x} \to \vec{x} + \delta\vec{a}$ erzeugt. Dies ist dieselbe Aussage, die auch bereits beim Noethertheorem erörtert wurde.

Die kanonische Quantisierung wird erfolgt nun dadurch, daß man die so formulierten Observablen als Erzeugende der ihnen zugeordneten Transformationsgruppe ansieht und die Darstellungen der zu derselben gehörigen Liealgebra im Hilbertraum der quantenmechanischen Zustände betrachtet. Die reellen Observablen werden dabei durch hermitesche Operatoren repräsentiert. Die mit i multiplizierten Observablen erzeugen dann unitäre Darstellungen der Transformationsgruppe. Die Poissonklammerbeziehungen sind als Strukturrelationen der zur Gruppe gehörigen Liealgebra zu lesen, d.h. in der Hilbertraumdarstellung durch Kommutatorrelationen der Observablen gegeben. Damit ist der kanonische Formalismus dadurch gerechtfertigt, daß die die Geometrie charakterisierenden Transformationsgruppen homomorph in der als Hilbertraumtheorie formulierten Quantentheorie auftreten und das quantenmechanische Verhalten bestimmen. Insbesondere die Zeitentwicklung der Zustände ist durch den Hamiltonoperator gegeben (Propagatortheorie).

Um diese Überlegungen zur kanonischen Quantisierung auf die Teilchen und Pole anwenden zu können, haben wir zunächst in der oben allgemein besprochenen Weise vom Lagrange- zum Hamiltonformalismus überzugehen. Für die Wirkung der freien Teilchen und Pole und den Wechselwirkungsterm der Ladungen mit dem Feld können wir unmittelbar Gl. (145) anwenden, wobei wir das Integral nach der gewöhnlichen Zeit t (die vom gewählten Bezugssystem abhängt) zu parametrisieren haben:

$$\Delta I_1 = \quad -\Delta\left[\sum_{e+g} mc^2 \int_{t_0}^{t} \sqrt{1-\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2}dt'\right] \Rightarrow \Delta I_1 = \sum_{e+b} m\frac{d\vec{x}}{d\tau}\Delta\vec{x} - \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{154}$$

$$\text{mit } \beta = \frac{1}{c}\left|\frac{d\vec{x}}{d\vec{t}}\right| \tag{155}$$

Mit dem obigen Verfahren zur Identifikation der kanonischen Impulse und dem Energieintegral finden wir:

$$\vec{p_1} = m\frac{d\vec{x}}{d\tau};\ W_1 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{156}$$

Für die Variation des Wechselwirkungspotentials einer Ladung mit dem elektromagnetischen Feld ergibt sich:

$$\Delta I_3 = \Delta\frac{e}{c}\int_{t_0}^{t} A^a\frac{dz_a}{d\tau}d\tau = \frac{e}{c}\vec{A}\Delta\vec{z} - e\varphi\delta t \Rightarrow \vec{p_3} = \frac{e}{c}\vec{A};\ W_3 = e\varphi. \tag{157}$$

Dabei haben wir uns wieder der allgemeinen Gleichung (145) bedient.

Bei der Berechnung von ΔI_2 muß das Verfahren abgewandelt werden um die relativistische Kovarianz zu sichern (sie tritt nicht mehr als Tensorformalismus auf!). Der vierdimensionale Bereich, über den die Lagrangedichte integriert wird, wird mit einer raumartigen dreidimensionalen Fläche S_p begrenzt. Eine raumartige Fläche ist dadurch definiert, daß sie überall eine zeitartige Normale besitzt. Es werden nun die Stringvariablen variiert. Aus den Lagrangegleichungen, die aus der Variation der über den unbegrenzten Raum erstreckten Integrale folgen, ergibt sich, daß bei der Integration der Variation ΔI_2 alle Terme verschwinden außer denen, die sich bei der Anwendung des Stokesschen Satzes als Randintegral über die Schnittlinie des Blattes mit S_p ergeben. Wir können nun (außer entlang der Weltlinie des Teilchens, wo wir uns mit der Parametrisierung festgelegt haben) die Parametrisierung so wählen, daß die Schnittlinien durch τ_1 parametrisiert sind. Dann erhält man schließlich die besagte Variation zu

$$\Delta I_{2'} = -\frac{g}{c}\int_0^\infty (F\dagger)^*_{ab}\delta y^a\frac{\partial y^b}{\partial\tau_1}d\tau_1. \tag{158}$$

Die kanonischen Impulse für die Strings sind also durch Impulsdichten (Dichten bzgl. des Wegintegrals entlang des Strings, der als Schnitt mit der Fläche S_p definiert ist, hier parametrisiert mit τ_1) gegeben:

$$\beta_a = \frac{g}{c}(F\dagger)_{ba}\frac{\partial y^b}{\partial\tau_1}. \tag{159}$$

Die Poissonklammern für solche Variablen sind definiert durch

$$\{y_a(\tau_1); p_b(\tau_{1'})\} = g_{ab}\delta(\tau_1 - \tau_{1'}). \tag{160}$$

5 Die Quantisierung

Bevor wir uns mit der Quantisierung der oben entwickelten klassischen Theorie befassen, wollen wir uns kurz über die Grundlagen der relativistischen Quantentheorie klar werden, denn wie nicht anders zu erwarten, ergeben sich bei der Quantisierung der klassisch relativistischen Theorie eine relativistische Quantentheorie.

Wir betrachten zunächst noch einmal die Formulierung der nichtrelativistischen Quantentheorie, wobei wir die konkrete Darstellung der Zustände als L^2 Funktionen im Ortsraum (Ortsdarstellung) und der Operatoren als Differential- bzw. Multiplikationsoperatoren verwenden. Wir wiederholen kurz die Interpretation der nichtrelativistischen Quantentheorie:

(1) Die Wellenfunktion ist eine Wahrscheinlichkeitsamplitude, d.h. die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in einem Volumenelement $dxdydz$ um den Punkt $(x;y;z)$ zur Zeit t zu finden, ist $|\psi(x;y;z;t)|^2 dxdydz$.

(2) Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion wird durch den Hamiltonoperator erzeugt:

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \tag{161}$$

Die Wellenfunktion muß wegen der Wahrscheinlichkeitsinterpretation notwendig normierbar sein, und zwar in dem Sinne, daß diese Normierung mit der Zeitentwicklung, die durch die Schrödingergleichung gegeben ist, nicht zerstört wird. Das ist in der Tat der Fall. Aus der Hermitezität des Hamiltonoperators folgt nämlich sofort:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \psi^*\psi d^3\vec{x} &= \int_V \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} d^3\vec{x} = \\ &= \frac{\hbar}{2mi}\int_V (\psi\Delta\psi^* - \psi^*\Delta\psi)d^3\vec{x} = \frac{\hbar}{2mi}\int_V \vec{\nabla}(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi)d^3\vec{x}\end{aligned} \tag{162}$$

Definiert man nun einen Strom zu

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) + \mathrm{div}\vec{j} = 0, \tag{163}$$

haben wir eine Kontinuitätsgleichung gewonnen, die in der üblichen Weise interpretiert werden kann. Insbesondere ist das Raumintegral über die positiv semidefinite Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^*\psi$ mit der Zeit konstant, weil der Beitrag des Stromes nach dem Stokesschen Satz bei der Integration über die im Unendlichen gelegene Oberfläche verschwindet, d.h. die Wahrscheinlichkeitsnormierung ist konsistent mit der Zeitentwicklung. Die Kontinuitätsgleichung läßt sich physikalisch als Erhaltungssatz für die Masse bzw. die Teilchenzahl deuten.

Charakteristisch für die relativistische Quantentheorie ist aber gerade das Versagen der eben gegebenen Wahrscheinlichkeitsinterpretation. Betrachten wir etwa die einfachste relativistische Wellengleichung, die wir unten noch näher herleiten werden, die Klein-Gordon-Gleichung für das freie Teilchen

$$\hat{p}_i\hat{p}^i\psi = m^2c^2\psi;\ \hat{p}_i = i\hbar\partial_i. \tag{164}$$

Dabei ist die Form dieser Gleichung durch reine Invarianzüberlegungen zu rechtfertigen. Jede relativistische Wellenfunktion muß nämlich eine relativistisch kovariante Größe sein, d.h. sich nach einer Darstellung der Lorentzgruppe transformieren. Die einfachste Möglichkeit für die Wellenfunktion ist ein Skalar. Soll sie ein freies Teilchen beschreiben, muß die Wellenfunktion invariant gegenüber Translationen von Raum und Zeit sein (Erhaltung des Viererimpulses nach dem Noethertheorem), d.h. bei Durchführung einer solchen Transformation darf sich die Wellenfunktion nur mit einem Phasenfaktor multiplizieren. Das kann aber nur die ebene Welle leisten:

$$\psi = N \exp(-i\frac{p_i x^i}{\hbar}). \tag{165}$$

Dabei ist der Impulsoperator ein Differentialoperator bzgl. der Raumzeitkoordinaten, weil er infinitesimaler Erzeugendenoperator von Raum-Zeittranslationen ist (s.o.). Betrachtet man die Klein-Gordongleichung, zeigt sich in der Tat, daß die ebene Welle, die ein Teilchen mit konstantem Impuls und konstanter Energie (eben ein freies Teilchen) beschreibt, zur richtigen Energie-Impulsbeziehung dieses freien Teilchens führt.

Betrachten wir in Analogie zur Stromdichte der nichtrelativistischen Quantenmechanik die Größe

$$J_a = i[\psi^* \partial_a \psi - \psi \partial_a \psi^*], \tag{166}$$

so ergibt sich für diese Größe aus der Klein-Gordon-Gleichung eine Kontinuitätsgleichung der obigen Form. Die Nullkomponente ist jedoch nicht mit $|\psi|^2$ identisch, so daß aufgrund der Kontinuitätsgleichung der Stromdichte $|\psi|^2$ nicht zeitlich konstant und demzufolge nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte für die Lokalisierung eines Teilchens interpretierbar ist. Anders ausgedrückt ist die Erhaltung der Teilchenzahl in einer nichtrelativistischen Theorie nicht mehr gegeben, was damit zusammenhängt, daß in relativistischen Theorien nicht die Ruhemasse für sich sondern die Gesamtenergie des Systems, zu der auch die Ruheenergie zählt, eine Erhaltungsgröße ist. Eine relativistische Theorie ist demzufolge notwendig eine Vielteilchentheorie. Die mit der obigen Stromdichte formulierte Kontinuitätsgleichung muß als Erhaltungssatz einer Ladung (z.B. der elektrischen Ladung) interpretiert werden.

Behandelt man die Vielteilchentheorie, die durch Anwendung des Verfahrens der zweiten Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes ψ entsteht, so hat man eine weitere Schwierigkeit zu beheben:

Grundlösung der Gleichung für das freie Teilchen sind ebene Wellen der Form $\exp(ipx/\hbar)$. Die dem Teilchen zugeordnete Energie ϵ muß lediglich der Gleichung $\epsilon^2 = p_\alpha p_\alpha c^2 + (mc^2)^2$ genügen. Das folgt zwanglos aus der Klein-Gordon-Gleichung, wenn man nach dem Quadrat des Hamiltonoperators

$$\hat{H}^2 \psi = -\frac{\hbar^2 \partial^2}{\partial t^2} \psi = c^2 (m^2 c^2 - \hbar^2 \Delta) \psi \tag{167}$$

auflöst. Die Lösungen dieser Gleichung sind aber gegeben durch

$$\psi_p^{(+)} = A \exp\left(i \frac{\vec{p}\vec{x} - \epsilon t}{\hbar}\right); \psi_p^{(-)} = B \exp\left(i \frac{\vec{p}\vec{x} + \epsilon t}{\hbar}\right). \tag{168}$$

Die zweite Lösung bereitet in ihrer Interpretation insofern Probleme als ihr ein Teilchen mit negativer Energie entspricht (ϵ ist als die positive Wurzel der obigen Gleichung vorausgesetzt). Bei der Entwicklung des Operators der Wellenfunktion der zweiten Quantisierung kann man dieses Problem dadurch beheben, daß man den Erzeugungsoperator der Teilchen, die zu solchen Fourierkomponenten mit negativer Energie gehören, als Vernichtungsoperator von anderen Teilchen positiver Energie interpretiert (Feynman-Stückelberg-Formalismus). Diese andere Teilchensorte stellt das Antiteilchen zu den betrachteten Teilchen dar.

Ein weiteres Ergebnis der relativistischen Quantentheorie sei hier nur qualitativ erörtert. Stellt man eine Lagrangetheorie der freien Klein-Gordon-Gleichung auf, so erhält man durch Berechnung des kanonischen Energie-Impulstensors für die Energie des Feldes eine positiv definite Größe, so wie es sein muß. Wendet man diese Definition der Energie beim quantisierten Feld an, so erkennt man, daß nur die zweite Quantisierung mit Kommutatorregeln zu einer positiv definiten Gesamtenergie der Teilchen und Antiteilchen führt. Die Teilchen vom Spin 0 sind also notwendig Bosonen. Eine Quantisierung nach Antikommutatoren führt zu einer nicht positiv definiten Gesamtenergie des Systems und ist somit nicht konsistent mit der physikalischen Interpretation der Vielteilchentheorie. Dies ist Ausdruck des Spin-Statistik-Theorems, das von Pauli 1940 erstmals bewiesen wurde. Demnach müssen Teilchen mit ganzzahligen Spins Bosonen, mit halbzahligen Spins Fermionen sein. Dieser Sachverhalt war lange vor dem Beweis des Theorems empirisch bekannt und muß in der nichtrelativistischen Quantentheorie als zusätzliche Annahme eingeführt werden, denn die zweite Quantisierung des Schrödingerfeldes kann sowohl mit Kommutator- als auch mit Antikommutatorregeln konsistent durchgeführt werden.

Nach diesem Ausflug in die relativistische Quantenmechanik kehren wir zu unserer Betrachtung der Teilchen und Pole zurück, wobei wir das elektromagnetische Feld, wie bereits oben erwähnt, nicht quantisieren, also als klassisches Feld in der Theorie weiterverwenden wollen. Dies ist der Standpunkt, den wir auch bisher in der nichtrelativistischen Quantentheorie benutzt haben. Wie oben bereits angedeutet, ergibt sich als Operator für p^a in der Ortsdarstellung des Hilbertraums:

$$\hat{p}^a = \frac{\hbar}{i}\partial^a = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_a}, \tag{169}$$

weil die Viererimpulse Translationen in Raum und Zeit erzeugen. Es ist leicht nachzurechnen, daß diese Operatoren die kanonischen Vertauschungsrelationen, die wir als die Poissonklammern (153) der klassischen Theorie formuliert haben, erfüllen. Für die Ladungen folgt, wenn wir hier die Teilchen als skalare Bosonen betrachten (also skalare Wellenfunktionen benutzen):

$$(\hat{p}^a - \frac{e}{c}A^a)(\hat{p}_a - \frac{e}{c}A_a)\psi = (mc)^2\psi \Rightarrow \left[\left(\frac{\hbar}{i}\partial^a - \frac{e}{c}A^a\right)\left(\frac{\hbar}{i}\partial_a\frac{e}{c}A^a\right) - m^2c^2\right]\psi = 0. \tag{170}$$

Man erhält also die bereits oben betrachtete Klein-Gordon-Gleichung, allerdings unter Berücksichtigung der Wirkung des klassischen Maxwellfeldes. Die Feldgleichung für die Pole sieht auf den ersten Blick wie für die des freien Teilchens aus:

$$\left[\left(\frac{\hbar}{i}\partial^a\right)\left(\frac{\hbar}{i}\partial_a\right) - m^2c^2\right]\psi = 0 \Rightarrow (\hbar^2\Box + m^2c^2)\psi = 0. \tag{171}$$

Dazu kommt aber noch die Gleichung für die Strings. Die Stringvariablen sind als kontinuierliche Zahl von Parametern (parametrisiert durch τ_1) anzusehen. Das haben wir schon beim oben bei der Herleitung Hamiltonformalismus' gesehen, wo sich die β_i als Impulsdichten ergaben. Man hat die Wirkung dieser Dichten also durch die sog. Funktionalableitung zu definieren. Ist also f die Dichte einer Größe F, so definiert man als Funktionalableitung von F

$$\frac{\delta F}{\delta y_a} = \frac{\partial f}{\partial y_a}. \tag{172}$$

Die Dichte der Wellenfunktion ist

$$\Psi\delta(\tau_1 - \tau_{1'}). \tag{173}$$

Man erhält damit als Gleichung für die Strings

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\delta\psi}{\delta y_a} = \frac{g}{c}(F\dagger)_{ba}\frac{\partial y^a}{\partial \tau_1}\psi, \tag{174}$$

wie man unmittelbar der Definition (159) für die Impulsdichten der Strings entnimmt.

Wir kommen nun zu der wesentlichen Folgerung aus der Annahme der Existenz der Pole. Dazu deformieren wir den String in der oben definierten raumartigen Fläche. Aus der klassischen Elektrodynamik ist klar, daß eine Deformation des Strings nur eine Eichtransformation der Felder bewirken kann. Wir deformieren den String in der beim Übergang zum Hamiltonformalismus eingeführten dreidimensionalen raumartigen Fläche, so daß er am Ende des Deformationsprozesses wieder auf den alten String zu liegen kommt. Der vorigen Gleichung entnimmt man unmittelbar, daß dann

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y_b}\psi|_{\tau_1=0} = \int \frac{g}{c}(F\dagger)_{ba}\frac{dy^a}{d\tau_1}d\tau_1\psi \Rightarrow \ln\left(\frac{\psi'}{\psi}\right) = -\frac{gi}{2\hbar c}\int_\sigma (F\dagger)_{ba}d\sigma^{ba} \tag{175}$$

sein muß. Dabei ist σ die von der Stringdeformation umschlossene Fläche und $d\sigma^{ab}$ ihr antisymmetrisches Flächenelement. Wählt man die raumartige Fläche senkrecht zur Zeitachse, erkennt man, daß es sich bei dem Integral um das Flußintegral des elektrischen Feldes handelt, also $4\pi e$ ergibt, falls die Fläche eine Ladung e enthält. In diesem Falle ändert sich ψ also um einen Phasenfaktor:

$$\psi' = \psi \exp\left(\frac{4\pi i e g}{\hbar c}\right). \tag{176}$$

Damit ψ eindeutig ist, muß also gelten

$$eg = \frac{n}{2}\hbar c \text{ mit } n \in \mathbb{Z}, \tag{177}$$

d.h. aus der Existenz eines Pols folgt die Quantelung der elektrischen Ladung. Das ist deshalb so bemerkenswert, weil man außer der Diracschen Hypothese der Existenz magnetischer Monopole (einer im Universum würde auch schon reichen!) keine andere theoretische Erklärung für dieses Phänomen gefunden hat.

6 Eichtheoretischer Zugang zur Quantisierung der Ladung

Im folgenden soll die Quantisierung der Ladung bei Existenz magnetischer Monopole unter Vermeidung des bisher benutzten Konzepts des Strings hergeleitet werden.

Dazu betrachten wir einen im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems (wir verwenden im folgenden den Dreierformalismus) ruhenden magnetischen Monopol mit der magnetischen Ladung g. Wie wir bereits in §2 im Anschluß an die diese Situation beschreibende Gleichung (100) bemerkt haben, gilt wegen des Gaußschen Satzes (wie bei der analogen Situation beim elektrischen Feld) für jedes Volumen V, das den Monopol enthält:

$$\int_{\partial V} \vec{B} d\vec{S} = 4\pi g. \tag{178}$$

Ein solches Feld kann nicht von einem in ganz $\mathbb{R}^3$ definierten, singularitätenfreien Vektorpotential als Rotation dargestellt werden, denn für ein solches Vektorpotential müßte gelten:

$$\int_{\partial V} \vec{B} d\vec{S} = \int_{\partial V} \mathrm{rot}\vec{A} d\vec{S} = \int_V \mathrm{divrot}\vec{A} d^3\vec{x} = 0 \tag{179}$$

im Widerspruch zu (178).

Um dieses Problem zu umgehen (und die Einführung von singulären Linien (Strings) zu vermeiden), nutzen wir die Eichfreiheit des Vektorpotentials aus und definieren in zwei überlappenden Gebieten G_1 und G_2, die gemeinsam den $\mathbb{R}^3$ überdecken, Vektorpotentiale $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$, die sich gemäß

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 - \tilde{\nabla}\chi \tag{180}$$

um den Gradienten eines Eichfeldes χ unterscheiden. Wir verlangen weiter, daß die Potentiale in ihrem Gebiet singularitätenfrei sind. Aus diesen Forderungen können wir nun $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ bestimmen.

Entsprechend dem elektrostatischen Fall folgt aus Gl. (100), daß das vom Monopol erzeugte Magnetfeld die Form

$$\vec{B} = \frac{g}{r^2}\hat{r} \text{ mit } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \tag{181}$$

besitzt. Die Rotation schreibt sich in Kugelkoordinaten $\{r; \vartheta; \varphi\}$

$$\begin{aligned} \frac{g}{r^2} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\varphi \sin\vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right], \\ 0 &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi), \\ 0 &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right]. \end{aligned} \tag{182}$$

Wir können nun wegen der Eichfreiheit des Potentials $\vec{B} \perp \vec{A}$ verlangen, also $A_r = 0$ setzen. Damit folgt aus den beiden letzten Gleichungen, daß $A_\varphi, A_\vartheta \propto 1/r$ oder 0 sind. Wir versuchen nun den Ansatz $A_\vartheta = 0$. Wir werden sehen, daß dieser Ansatz eine einfache Kartierung des $\mathbb{R}^3$, d.h. die Wahl der Gebiete G_1 und G_2, erlaubt. Aus der ersten Gleichung von (182) ergibt sich mit diesem Ansatz die Bestimmungsgleichung für A_φ:

$$\frac{g}{r}\sin\vartheta = \frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\varphi \sin\vartheta). \tag{183}$$

Als Lösung ergibt sich das Vektorpotential

$$\vec{A} = g\left[\frac{k - \cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\right]\hat{\varphi} \tag{184}$$

mit einer Integrationskonstanten k, deren Wahl einer speziellen Eichung entspricht. Die Wahl von $k = \pm 1$ erlaubt es uns, je ein Vektorpotential zu erhalten, das für $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$ singulär ist. Entsprechend wählen wir die Gebiete G_1 und G_2 so, daß $G_1 :\ 0 \le \vartheta < \pi/2 + \delta$ und $G_2 :\ \pi/2 - \delta < \vartheta \le \pi$ sowie die dazugehörigen Vektorpotentiale wie folgt:

$$\vec{A}_1 = g\left[\frac{1 - \cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\right]\hat{\varphi}; \vec{A}_2 = -g\left[\frac{1 + \cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\right]\hat{\varphi} \tag{185}$$

Diese Gebiete besitzen die in Abb. 4 gezeigte Gestalt.

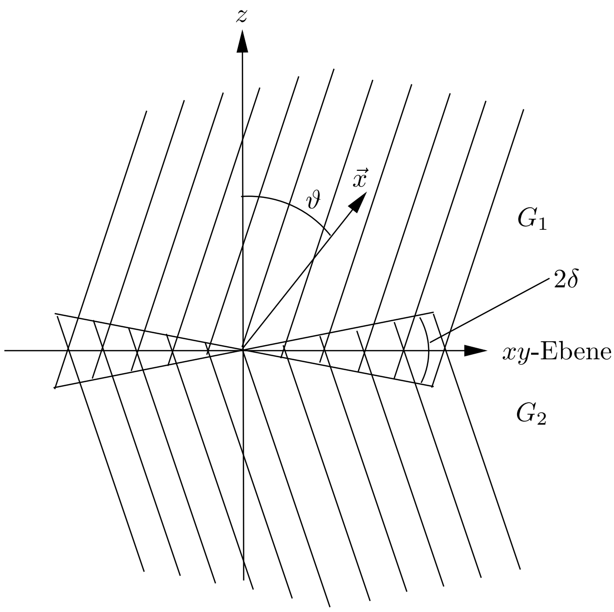

Abbildung 4: Zur Wahl der Karten G_1 und G_2 zur Überdeckung des $\mathbb{R}^3$ und der entsprechenden zu einem im Ursprung des Koordinatensystems ruhenden magnetischen Monopol gehörigen Vektorpotentiale $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$.

Das Eichfeld, das die beiden Vektorpotentiale im Überlappungsbereich der beiden Regionen verbindet, ist damit zu wählen als:

$$\tilde{\nabla}\chi = \frac{-2g}{r\sin\vartheta}\hat{\varphi} \Rightarrow \chi = -2g\varphi. \tag{186}$$

Um nun zu unserem Ziel, der Quantisierung der elektrischen Ladung, zu gelangen, betrachten wir das Verhalten der quantenmechanischen Größen unter Eichtransformationen.

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen der Ladung e im Feld des Monopols lautet:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2. \tag{187}$$

Eine Eichtransformation $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ darf die Physik nicht ändern, d.h. zwischen den Zuständen $|\psi\rangle$ des nichttransformierten und $|\psi'\rangle$ des transformierten Systems muß es eine unitäre Transformation $\hat{\epsilon}$ geben mit

$$|\psi'\rangle = \hat{\epsilon}|\psi\rangle. \tag{188}$$

Demgemäß transformiert sich der Hamiltonoperator unitär:

$$\hat{\epsilon}^\dagger \hat{H}'\hat{\epsilon} = \frac{1}{2m}\hat{\epsilon}^\dagger(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}')^2\hat{\epsilon} = \frac{1}{2m}[\hat{\epsilon}^\dagger(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}')\hat{\epsilon}]^2 = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 = \hat{H}. \tag{189}$$

Setzen wir nun $\epsilon = \exp[if(x)]$, so folgt:

$$\hat{\epsilon}^\dagger(p - \frac{e}{c}\vec{A} - \frac{e}{c}\tilde{\nabla}\chi)\hat{\epsilon} = \frac{\hbar}{i}\tilde{\nabla}f + \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} + \frac{e}{c}\tilde{\nabla}\chi \stackrel{!}{=} \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \Rightarrow f = -\frac{e}{\hbar c}\chi. \tag{190}$$

Dabei wurde die Vertauschungsregel für Operatorfunktion von $\vec{x}$ mit dem Impulsoperator $\vec{p}$ verwandt. Die unitäre Transformation ist also durch die folgende (lokale) Phasentransformation gegeben:

$$\hat{\epsilon} = \exp\left[-\frac{ie}{\hbar c}\chi(\vec{x})\right]. \tag{191}$$

Im Überlappungsbereich der beiden Karten des $\mathbb{R}^3$ transformieren sich also die Zustandskets unter Anwendung von (186) gemäß (191):

$$\hat{\epsilon} = \exp\left[-\frac{ie}{\hbar c}\varphi(\vec{x})\right];\ |\psi_2\rangle = \hat{\epsilon}|\psi_1\rangle. \tag{192}$$

Durchläuft man nun im Überlappungsbereich eine geschlossene Kurve um die z-Achse (z.B. einen Kreis in der Ebene $\vartheta = \pi/2$) n-mal ($n \in \mathbb{N}$), so ändert sich φ um $2\pi n$. Wegen der Eindeutigkeit des Zustandskets im Überlappungsbereich muß aber für diesen Fall $\hat{\epsilon} = 1$ werden, d.h. die Phase muß ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein:

$$\exp\left[\frac{2ige}{\hbar c}2\pi n\right] = 1 \Rightarrow \frac{2eg}{\hbar c} \in \mathbb{Z} \tag{193}$$

Damit haben wir wieder die bereits in Abschnitt 4 hergeleitete Quantisierung der elektrischen Ladung e bei gegebener Monopolstärke g gefunden.

Es soll hier nur bemerkt werden, daß das Konzept der Eichfelder ein wichtiges Werkzeug in der Quantenfeldtheorie und der Theorie der Elementarteilchen darstellt. Dabei werden allgemeine kompakte i.a. nichtkommutative Eichgruppen und deren Algebren betrachtet. Die Elektrodynamik stellt in diesem Sinne die spezielle Eichfeldtheorie dar, die aus der Verwendung der U[1] (die isomorph zur mit der Menge aller komplexen Zahlen vom Betrag 1 und der Multiplikation gebildeten Kreisgruppe ist) als (abelsche=kommutative) Eichgruppe resultiert. Die entsprechende quantisierte Theorie führt zur Quantenelektrodynamik. Kompliziertere Gruppen führen zu anderen wichtigen Theorien, z.B. die Gruppe U[1] $\times$ SU[2] zum Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung und die SU[3] zur Quantenchromodynamik.

Literatur

[BLP86] W. B. Berestetzki, E. M. Lifschitz and L. P. Pitajewski, *Quantenelektrodynamik*, Akademie-Verlag, Berlin (1986).

[Dir31] P. A. M. Dirac, Quantised Singularities in the Electromagnetic Field, Proc. Roy. Soc. A **133**, 60 (1931), `http://www.jstor.org/stable/95639`.

[Dir48] P. A. M. Dirac, Theory of Magnetic Poles, Phys. Rev. **74**, 817 (1948), `http://link.aps.org/abstract/PR/v74/i7/p817`.

[F+69] R. L. Fleischer et al., Search for Magnetic Monopoles in Deep Ocean Deposits, Phys. Rev. **184**, 3845 (1969), `http://link.aps.org/abstract/PR/v184/i5/p1393`.

[Fic79] E. Fick, *Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie*, Aula-Verlag, Wiesbaden, 4 edn. (1979).

[IZ80] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York (1980).

[Jac83] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, Walter de Gruyter, 2 edn. (1983).

[Mat91] T. Matsui (ed.), *e+ e- collision physics. Proceedings, 2nd KEK Topical Conference, Tsukuba, Japan, November 26-29, 1991*, Tsukuba, Japan (1991).

[Sch89] E. Schmutzer, *Grundlagen der Theoretischen Physik*, BI-Verlag (1989).

[T$^+$92] J. Thron et al., Search for Magnetic Monopoles with the Soudan 2 Detector, Phys. Rev. D **46**, 4846 (1992), `http://link.aps.org/abstract/PRD/v46/p4846`.

[WY75] T. T. Wu and C. N. Yang, Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields, Phys. Rev. D **12**, 3845 (1975), `http://link.aps.org/abstract/PRD/v12/i12/p3845`.