Die Liénard-Wiechert-Potentiale

Hendrik van Hees

26. Februar 2018

1 Alternative Herleitung der retardierten Green-Funktion

Für die elektromagnetischen Potentiale in **Lorenz-Eichung**,[1]

$$\frac{1}{c}\partial_t \Phi(\vec{r},t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = 0, \tag{1}$$

genügen die Poentiale den Wellengleichungen[2]

$$\Box \Phi(\vec{r},t) = -4\pi \rho(\vec{r},t), \tag{2}$$
$$\Box \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r},t) \tag{3}$$

genügen, wobei der **d'Alembert-Operator** durch

$$\Box = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 = \Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \tag{4}$$

definiert ist[3].

Es ist klar, dass wir eine Lösung dieser Wellengleichungen angeben können, sobald wir eine Green-Funktion des d'Alembert-Operators gefunden haben, die der Gleichung

$$\Box G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') = -4\pi \delta(t-t')\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{5}$$

genügt. Denn dann ist offenbar wegen (2) bzw. (3)

$$\Phi(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{r}\,' G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')\rho(\vec{r}\,',t') \tag{6}$$
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{r}\,' G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')\frac{1}{c}\vec{j}(\vec{r}\,',t'). \tag{7}$$

Physikalisch gesehen bedeuten die Integrale auf der rechten Seite die Propagation des elektromagnetischen Feldes von den Quellen (also Ladungs- und Stromverteilungen) zu allen Zeiten t' und Orten $\vec{r}\,'$ zur Zeit t zum Ort $\vec{r}$.

[1] Man sollte zur Wahrung der Priorität diese Eichbedingung nach dem Dänen Ludwik Lorenz benennen, der diese Eichbedingung bereits um 1865, also um einiges früher als der Holländer Hendrik Antoon Lorentz[JO01].

[2] Wir verwenden das Gaußsche Maßsystem.

[3] Wir folgen in der Vorlesung den Konventionen in dem Lehrbuch [Gre02].

Wir fordern nun die **Kausalität** dieser Interpretation der Gleichungen (6) und (7): Zu den Feldern zur Zeit t sollten nur die Konfigurationen von Ladungen und Strömen zu Zeiten $t' \leq t$ beitragen, entsprechend einer Wirkung aus der Vergangenheit. Es sollte entsprechend des Kausalitätsprinzips keine „retrokausale" Wirkung aus der Zukunft geben. Wir verlangen also an die Green-Funktion die **Retardierungsbedingung**

$$G(\vec{r},t;\vec{r}',t')=0 \quad \text{für} \quad t'>t. \tag{8}$$

Betrachten wir nun die Gleichung (5) genauer, sehen wir, dass aufgrund der Translationsinvarianz

$$G(\vec{r},t;\vec{r}',t')=G(\vec{\rho},\tau) \quad \text{mit} \quad \tau=t-t', \quad \vec{\rho}=\vec{r}-\vec{r}' \tag{9}$$

gelten sollte. Dann lautet (5) in diesen neuen Relativkoordinaten

$$\Box G(\vec{\rho},\tau)=-4\pi\delta(\tau)\delta(\vec{\rho}). \tag{10}$$

Wir bemerken weiter, dass diese Gleichung auch rotationsinvariant ist (da die δ-Distribution nur bei $\vec{\rho}=0$ von Null verschieden ist). Die Retardierungsbedingung lautet

$$G(\vec{\rho},\tau)=0 \quad \text{für} \quad \tau<0. \tag{11}$$

Da die δ-Distributions-Singularität bei $\tau=0$ gemäß (10) erst in der zweiten Zeitableitung von G auftritt, muss $\partial_\tau G$ bei $\tau=0$ einen Sprung aufweisen und G selbst bei $t=0$ stetig sein, d.h. es gilt die Randbedingung

$$G(\vec{\rho},\tau=0^+)=0. \tag{12}$$

Um schließlich (10) zu lösen, drücken wir die Green-Funktion vermöge eines Fourier-Integrals bzgl. des Ortes aus, d.h. wir machen den Ansatz

$$G(\vec{\rho},\tau)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\tilde{G}(\vec{k},\tau)\exp(\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{\rho}). \tag{13}$$

Unter Verwendung von

$$\delta^{(3)}(\vec{\rho})=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\exp(\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{\rho}) \tag{14}$$

folgt (*nachrechnen!*)

$$\frac{1}{c^2}\partial_\tau^2\tilde{G}(\vec{k},\tau)+k^2\tilde{G}(\vec{k},\tau)=4\pi\delta(\tau). \tag{15}$$

Für $\tau>0$ verschwindet die δ-Distribution, und (15) die Gleichung für einen harmonischen Oszillator mit der Frequenz

$$\omega=\omega(\vec{k})=c|\vec{k}|=ck. \tag{16}$$

Mit der Retardierungsbedingung (11) und der Randbedingung (12) ist demnach

$$\tilde{G}(\vec{k},\tau)=A\Theta(\tau)\sin(\omega\tau)=A\Theta(\tau)\sin(kc\tau). \tag{17}$$

Dabei ist A eine Integrationskonstante. Diese bestimmen wir, indem wir (15) über das infinitesimale τ-Intervall $(-0^+,0^+)$ integrieren und die Stetigkeit von $\tilde{G}$ bei $\tau=0$ ausnutzen (*nachrechnen!*):

$$\dot{\tilde{G}}(\vec{k},0^+)=Akc=4\pi c^2 \Rightarrow A=\frac{4\pi c}{k}. \tag{18}$$

Damit ist schließlich

$$\tilde{G}(\vec{k},\tau) = \frac{4\pi c}{k}\Theta(\tau)\sin(ck\tau). \tag{19}$$

Jetzt müssen wir nur noch gemäß (13) vom $\vec{k}$-Raum in den $\vec{\rho}$-Raum zurücktransformieren. Wir können dabei aufgrund der Rotationsinvarianz von G, die impliziert, dass G nur eine Funktion von $\rho = |\vec{\rho}|$ sein kann, $\vec{\rho} = \rho\vec{e}_z$ setzen und $\vec{k}$ in Kugelkoordinaten (k, ϑ, φ) ausdrücken. Dann ist $\vec{k}\cdot\vec{\rho} = k\rho\cos\vartheta$ und folglich (*nachrechnen!*)

$$\begin{aligned}
G(\vec{\rho},\tau) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{4\pi c}{k}\Theta(\tau)\sin(kc\tau)\exp(\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{\rho}) \\
&= \frac{c\Theta(\tau)}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\, k^2\sin\vartheta\frac{\sin(kc\tau)}{k}\exp(\mathrm{i}k\rho\cos\vartheta) \\
&= \frac{c\Theta(\tau)}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}k\int_{-1}^1 \mathrm{d}u\, k\sin(kc\tau)\exp(\mathrm{i}k\rho u).
\end{aligned} \tag{20}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die triviale Integration über φ ausgeführt und $u = \cos\vartheta$ substituiert. Nun lässt sich auch die Integration über u leicht ausführen (*nachrechnen!*):

$$G(\vec{\rho},\tau) = \frac{c\Theta(\tau)}{\mathrm{i}\pi\rho}\int_0^k \mathrm{d}k\sin(ckt)[\exp(\mathrm{i}k\rho) - \exp(-\mathrm{i}k\rho)]. \tag{21}$$

Da der Integrand gerade in k ist, können wir über die ganze reelle k-Achse integrieren und durch 2 dividieren. Zugleich drücken wir den Sinus mit Hilfe der Exponentialfunktion aus und erhalten

$$G(\vec{\rho},\tau) = -\frac{c\Theta(\tau)}{4\pi\rho}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k[\exp(\mathrm{i}kc\tau) - \exp(-\mathrm{i}kc\tau)][\exp(\mathrm{i}k\rho) - \exp(-\mathrm{i}k\rho)]. \tag{22}$$

Multipliziert man die Exponentialausdrücke aus und verwendet wieder die Fourier-Darstellung für die δ-Distribution, erhält man (*nachrechnen!*)

$$G(\vec{\rho},\tau) = \frac{c}{\rho}\Theta(\tau)[\delta(c\tau - \rho) - \delta(c\tau + \rho)]. \tag{23}$$

Da wegen $\tau > 0$ der zweite Term nicht beiträgt, finden wir schließlich die **retardierte Green-Funktion**

$$G(\vec{\rho},\tau) = \frac{c}{\rho}\delta(c\tau - \rho) = \frac{1}{\rho}\delta(\tau - \rho/c). \tag{24}$$

Dabei konnten wir die Θ-Funktion weglassen, da die δ-Distribution ohnehin nur bei $\tau = \rho/c > 0$ von Null verschieden ist.

2 Beispiel: Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung

Wir betrachten nun eine Punktladung, die sich gemäß $\vec{r}_0(t) = \vec{v}t$ (mit $v = |\vec{v}| < c$) gleichförmig geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. Wir wollen zunächst die Potentiale und dann das elektromagnetische Feld

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\nabla\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}(\vec{r},t), \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t) \tag{25}$$

berechnen. Wir bemerken, dass dies in der Tat bereits ein zeitabhängiges Problem darstellt, denn Ladungs- und Stromdichte sind durch

$$\rho(\vec{r}',t') = q\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{v}t'), \quad \vec{j}(\vec{r}',t') = \rho(\vec{r}',t')\vec{v} = q\vec{v}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{v}t') \tag{26}$$

gegeben und folglich zeitabhängig. Setzen wir dies in (6) und (7) ein und verwenden (24) für die retardierte Green-Funktion, können wir sofort das Raum-Integral ausführen und erhalten (*nachrechnen!*)

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r},t) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{r}' \frac{q\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{v}t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{v}t'|}{c}\right) \frac{q}{|\vec{r}-\vec{v}t'|}, \\
\vec{A}(\vec{r},t) &= \vec{\beta}\Phi(\vec{r},t) \quad \text{mit} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Wie wir sehen, ist aufgrund der δ-Distribution die retardierte Zeit nur implizit bestimmt. Bei dem hier diskutierten Fall einer gleichförmig bewegten Punktladung können wir sie aber explizit bestimmen, was in allgemeineren Fällen meist nur näherungsweise möglich ist. Jedenfalls verlangt die δ-Distribution

$$c(t-t') = |\vec{r}-\vec{v}t'| = \sqrt{(\vec{r}-\vec{v}t')^2}. \tag{28}$$

Quadrieren wir diese Gleichung und formen den entstehenden Ausdruck ein wenig um, erhalten wir für t' die quadratische Gleichung

$$t'^2 - \frac{2}{c^2-v^2}(c^2 t - \vec{r}\cdot\vec{v})t' + \frac{c^2t^2-r^2}{c^2-v^2} = 0. \tag{29}$$

Deren Lösungen ergeben sich aus der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Nach einigen Umformungen ergibt sich

$$t' = \frac{1}{c^2-v^2}\left[c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v} \pm \sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2 - (c^2-v^2)(c^2t^2-r^2)}\right]. \tag{30}$$

Das Vorzeichen bestimmt sich daraus, dass wegen (28) $t' < t$ sein soll;. Für $v = 0$ ist $t' = t \pm r/c$, d.h. die physikalisch relevante retardierte Lösung ergibt sich für das untere Vorzeichen zu

$$t' = t_{\text{ret}} = \frac{1}{c^2-v^2}\left[c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v} - \sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2 - (c^2-v^2)(c^2t^2-r^2)}\right]. \tag{31}$$

Den Ausdruck unter der Wurzel können wir vereinfachen, indem wir zunächst das Quadrat ausmultiplizieren und zusammenfassen,

$$(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2 - (c^2-v^2)(c^2t^2-r^2) = (\vec{r}\cdot\vec{v})^2 - 2c^2t\vec{r}\cdot\vec{v} + (c^2-v^2)r^2 + v^2c^2t^2. \tag{32}$$

Um die folgenden Rechnungen etwas übersichtlicher schreiben zu können, führen wir die Relativkoordinaten zwischen Aufpunktvektor $\vec{r}$ und der *momentanen* Lage der Punktladung $\vec{v}t$

$$\vec{w} = \vec{r} - \vec{v}t \tag{33}$$

ein, und einige algebraische Umformungen zeigen dann, dass wir die retardierte Zeit (31) in der Form

$$t_{\text{ret}} = \frac{1}{c^2 - v^2}\left[c^2 t - \vec{r}\cdot\vec{v} - \sqrt{c^2\vec{w}^2 + (\vec{r}\cdot\vec{v})^2 - r^2 v^2}\right] \tag{34}$$

schreiben können.

Nach dieser Vorarbeit wenden wir uns wieder dem Integral (27) für das Skalarpotential zu. Um die eben gefundene Nullstelle verwenden zu können, müssen wir die δ-Distribution umformen. Dazu verwenden wir die Formel [CH10]

$$\delta[u(t')] = \sum_{t'=t'_0} \frac{1}{|\dot{u}(t')|}\delta(t' - t'_0), \tag{35}$$

wobei die Summe über alle Nullstellen t'_0 der Funktion u läuft. Es ist klar, dass dieser Ausdruck nur sinnvoll ist, wenn für alle Nullstellen t'_0 stets $\dot{u}(t'_0) \neq 0$ gilt, d.h. wenn die Funktion $u(t')$ nur *einfache Nullstellen* besitzt. In unserem Fall

$$u(t') = t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{v}t'|}{c} \tag{36}$$

gibt es nur die eine Nullstelle $t'_0 = t_{\text{ret}}$, und mit der Kettenregel folgt (*nachrechnen!*)

$$|\dot{u}(t')| = \left|-1 + \frac{\vec{v}\cdot(\vec{r} - \vec{v}t')}{c|\vec{r} - \vec{v}t'|}\right| = 1 - \frac{\vec{v}\cdot(\vec{r} - \vec{v}t')}{c|\vec{r} - \vec{v}t'|}, \tag{37}$$

und dies unter Verwendung von (35) in (27) eingesetzt, liefert schließlich

$$\Phi(\vec{r}, t) = \left.\frac{qc}{c|\vec{r} - \vec{v}t'| - \vec{v}\cdot(\vec{r} - \vec{v}t')}\right|_{t'=t_{\text{ret}}}. \tag{38}$$

Den Nenner bringen wir nun in eine etwas einfacher zu interpretierende Form, indem wir ihn ein wenig umformen und mittels des durch (33) definierten Vektors $\vec{w}$ ausdrücken (*nachrechnen!*):

$$\begin{aligned} c|\vec{r} - \vec{v}t_{\text{ret}}| + \vec{v}\cdot(\vec{r} - \vec{v}t_{\text{ret}}) &\overset{(28)}{=} c^2(t - t_{\text{ret}}) - \vec{r}\cdot\vec{v} + v^2 t_{\text{ret}} \\ &= c^2 t - (c^2 - v^2)t_{\text{ret}} - \vec{r}\cdot\vec{v} \\ &\overset{(31)}{=} \sqrt{c^2 w^2 + (\vec{r}\cdot\vec{v})^2 - r^2 v^2}, \end{aligned} \tag{39}$$

womit wir schließlich

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{\sqrt{w^2 + (\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2 - \beta^2 r^2}} \quad \text{mit} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \tag{40}$$

erhalten.

Wir können dies noch in eine alternative Form bringen, indem wir $\vec{r} = \vec{w} + \vec{v}t$ substituieren. Nach einigen Umformungen liefert dies (*nachrechnen!*)

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{w\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\theta}}, \tag{41}$$

wobei θ der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist, d.h. $\vec{\beta}\cdot\vec{w}=\beta w\cos\theta$. Wir sehen, dass für $\beta\ll 1$ der naive „nichtretardierte" Ausdruck $\Phi=q/w=q/|\vec{r}-\vec{v}t|$ herauskommt. Die endliche Wirkungsausbreitung macht sich also, wie zu erwarten, vor allem für Bewegungen bemerkbar, bei denen die Geschwindigkeit des Teilchens der Lichtgeschwindigkeit, also $\beta\simeq 1$, nahekommt.

Das Vektorpotential ist sofort durch die zweite Gleichung in (27) gegeben:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{\beta}\Phi(\vec{r},t)=\frac{q\vec{\beta}}{\sqrt{w^2+(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2-\beta^2 r^2}}. \tag{42}$$

Wir finden das elektrische und magnetische Feld durch Bilden der entsprechenden Ableitungen der Potentiale

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{1}{c}\partial_t\vec{A}, \quad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=-\vec{\beta}\times\vec{\nabla}\Phi=\vec{\beta}\times\vec{E}, \tag{43}$$

wobei die letzte Gleichung daraus folgt, dass wegen $\vec{\beta}=\text{const}$ auch $\partial_t\vec{A}\propto\vec{\beta}$ ist und daher wegen $\vec{\beta}\times\vec{\beta}=0$ nichts beiträgt.

Zur Berechnung der Ableitungen verwenden wir am einfachsten die Form (40) bzw. (42) für die Potentiale. Mittels der Kettenregel finden wir nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned}
-\vec{\nabla}\Phi &= \frac{q}{[w^2+(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2-\beta^2 r^2]^{3/2}}[\vec{w}-\beta^2\vec{r}+(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\vec{\beta}],\\
-\frac{1}{c}\partial_t\vec{A} &= \frac{q}{[w^2+(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2-\beta^2 r^2]^{3/2}}[\beta^2\vec{v}t-(\vec{r}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}].
\end{aligned} \tag{44}$$

Addieren dieser Ausdrücke liefert gemäß (43) das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{q}{[w^2+(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2-\beta^2 r^2]^{3/2}}(\vec{r}-\vec{v}t)(1-\beta^2). \tag{45}$$

Schreiben wir wieder vermöge $\vec{r}=\vec{w}+\vec{v}t$ alles mit Hilfe von $\vec{w}$, ergibt sich die alternative Form

$$\vec{E}(t,\vec{r})=\frac{q\vec{w}}{w^3}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}. \tag{46}$$

Das Feld zeigt also wie bei ruhenden Ladungen stets vom momentanen Ort der Ladung zum Aufpunkt. Für kleine Geschwindigkeiten ($\beta\ll 1$) ergibt sich wieder das entsprechende „naive Coulomb-Feld" so als ob die Wirkungsausbreitung instantan wäre. Für $\beta\simeq 1$ ist das elektrische Feld hingegen stark in Richtungen senkrecht zur Geschwindigkeit (also $\theta=\pi/2$) überhöht, denn $\sin(\pi/2)=1$, und dann wird der verbleibende Faktor $1/\sqrt{1-\beta^2}\gg 1$, während das Feld in Richtung von $\vec{\beta}$, also $\theta=0$, um den Faktor $(1-\beta^2)$ unterdrückt ist.

Für das Magnetfeld ergibt sich schließlich gemäß (43)

$$\vec{B}(t,\vec{r})=\frac{q\vec{\beta}\times\vec{w}}{w^3}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}. \tag{47}$$

3 Felder einer beliebig bewegten Punktladung

Wir geben nun eine beliebige Trajektorie $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$ für ein geladenes Teilchen vor. Wir verlangen, gemäß der Speziellen Relativitätstheorie, dass $v(t) = |\vec{v}(t)| = |\dot{\vec{r}}_0(t)| < c$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Die Ladungs- und Stromverteilungen sind dann

$$\rho(\vec{r}', t') = q\delta^{(3)}[\vec{r}' - \vec{r}_0(t')], \quad \vec{j}(\vec{r}', t') = \rho(\vec{r}', t') = q\vec{v}(t')\delta^{(3)}[\vec{r}' - \vec{r}_0(t')]. \tag{48}$$

Man rechnet sofort nach, dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist (*nachrechnen!*):

$$\begin{aligned} &\partial_{t'}\rho(\vec{r}', t') = -q\vec{v}(t') \cdot \vec{\nabla}'\delta^{(3)}[\vec{r}' - \vec{r}_0(t')], \quad \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') = q\vec{v}(t') \cdot \vec{\nabla}'\delta^{(3)}[\vec{r}' - \vec{r}_0(t')] \\ &\Rightarrow \partial_{t'}\rho(\vec{r}', t') + \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') = 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Wie in (27) erhalten wir durch Ausintegrieren der räumlichen δ-Distribution

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right), \tag{50}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \frac{q\vec{\beta}(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right) \quad \text{mit} \quad \vec{\beta}(t') = \frac{1}{c}\vec{v}(t') = \frac{1}{c}\dot{\vec{r}}_0(t'). \tag{51}$$

Da stets $\delta(z) = \delta(-z)$ gilt, können wir diese Formeln auch zu

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right), \tag{52}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \frac{q\vec{\beta}(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right) \tag{53}$$

umschreiben, was einige der folgenden Rechnungen ein wenig vereinfacht. Wir verwenden nun wieder (35), um die t'-Integration auszuführen (*nachrechnen*):

$$\delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right) = \left(1 - \frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{\beta}\right)^{-1} \delta(t' - t_{\text{ret}}), \tag{54}$$

wobei wir die Abkürzung

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t') \tag{55}$$

eingeführt haben. Die retardierte Zeit bezeichnet die Lösung der Gleichung, die bestimmt, für welches t' die δ-Funktion singulär ist, d.h. die Lösung der Gleichung

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_{\text{ret}})|}{c} = t - \frac{R(\vec{r}, t_{\text{ret}})}{c}. \tag{56}$$

Dabei ist diese retardierte Zeit als Funktion

$$t_{\text{ret}} = t_{\text{ret}}(\vec{r}, t) \tag{57}$$

zu lesen. Setzen wir nun (54) mit all diesen Definitionen in (52) und (53) ein, finden wir schließlich die Lösungen

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{q}{R(\vec{r},t_{\text{ret}}) - \vec{\beta}(t_{\text{ret}}) \cdot \vec{R}(\vec{r},t_{\text{ret}})} \tag{58}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\beta}(t_{\text{ret}})\Phi(\vec{r},t) = \frac{q\vec{\beta}(t_{\text{ret}})}{R(\vec{r},t_{\text{ret}}) - \vec{\beta}(t_{\text{ret}}) \cdot \vec{R}(\vec{r},t_{\text{ret}})} \tag{59}$$

für die retardierten Potentiale, die in diesem Fall **Liénard-Wiechert-Potentiale** genannt werden. Sie wurden unabhängig voneinander von Alfred-Marie Liénard (1898) und Emil Wiechert [Wie01] (1901) hergeleitet.

Nun wollen wir auch das elektromagnetische Feld $(\vec{E},\vec{B})$ berechnen, d.h.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}(\vec{r},t), \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t). \tag{60}$$

Das Problem besteht dabei darin, dass wir in (58) und (59) die retardierte Zeit t_{ret} nicht explizit als Funktion von $\vec{r}$ und t ausdrücken können (wie im Beispiel der gleichförmig bewegten Punktladung in Abschnitt 2). Um die in (60) benötigten Ableitungen nach den unabhängigen Variablen $\vec{r}$ und t berechnen zu können, benötigen wir zur Anwendung der Kettenregel die entsprechenden Ableitungen von t_{ret}.

Dazu leiten wir (56) zunächst nach t ab (*nachrechnen!*):

$$\partial_t t_{\text{ret}} = 1 + \vec{\beta}(t_{\text{ret}}) \cdot \vec{n}(\vec{r},t_{\text{ret}})\partial_t t_{\text{ret}} \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}. \tag{61}$$

Dies können wir nun nach der gewünschten Zeitableitung auflösen (*nachrechnen!*),

$$\partial_t t_{\text{ret}} = \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}}, \tag{62}$$

wobei wir hier und im folgenden zur besseren Übersichtlichkeit die Argumente der diversen Größen weglassen.

Um auch den Gradienten von t_{ret} zu bestimmen, bilden wir analog die Ableitungen nach den kartesischen Komponenten (*nachrechnen!*)

$$\partial_j t_{\text{ret}} = \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial r_j} = -\frac{1}{c}(n_j - \vec{v} \cdot \vec{n}\partial_j t_{\text{ret}}) \tag{63}$$

bzw. aufgelöst (*nachrechnen*)

$$\partial_j t_{\text{ret}} = -\frac{1}{c} \frac{n_j}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}}. \tag{64}$$

Für den Gradienten ergibt sich somit schließlich

$$\vec{\nabla} t_{\text{ret}} = -\frac{1}{c} \frac{\vec{n}}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}}. \tag{65}$$

Nach dieser Vorarbeit lassen sich sich mit einiger algebraischer Mühe die in (60) benötigten Ableitungen ausrechnen (*nachrechnen!*):

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\Phi &= \frac{q}{R^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\left[\vec{\beta}(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})-(1-\beta)^2\vec{n}\right]-\frac{q(\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{n})\vec{n}}{cR(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}, && (66)\\
\frac{1}{c}\partial_t\vec{A} &= \frac{q}{cR(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\left[(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})\dot{\vec{\beta}}+\vec{\beta}(\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{n})\right]. && (67)
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich aus (60) (*nachrechnen!*)

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{q}{cR(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\left[(\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{n})(\vec{n}-\vec{\beta})-(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})\dot{\vec{\beta}}\right]+\frac{q(1-\beta^2)}{R^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}(\vec{n}-\vec{\beta})\\
&= \frac{q}{cR(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\vec{n}\times[\dot{\vec{\beta}}\times(\vec{\beta}-\vec{n})]+\frac{q(1-\beta^2)}{R^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}(\vec{n}-\vec{\beta}).
\end{aligned} \tag{68}
$$

Dabei haben wir im letzten Schritt den ersten Term mit Hilfe der Formel

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) \tag{69}$$

umgeformt.

Zur Berechnung des Magnetfeldes bemerken wir, dass

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}\times(\vec{\beta}\Phi)=(\vec{\nabla}\times\vec{\beta})\Phi-\vec{\beta}\times\vec{\nabla}\Phi, \tag{70}$$

so dass wir für den zweiten Term wieder (66) verwenden können. Verbleibt die Rotation $\vec{\nabla}\times\vec{\beta}$ zu berechnen (*nachrechnen!*):

$$\vec{\nabla}\times\vec{\beta}=(\nabla t_{\text{ret}})\times\dot{\vec{\beta}}=-\frac{\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}}}{c(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})}. \tag{71}$$

Dabei haben wir wieder (65) verwendet. Mit Hilfe von (70), (66) und (71) folgt schließlich (*nachrechnen!*)

$$\vec{B}=\frac{q}{cR(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\left[-(\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{n})(\vec{n}\times\vec{\beta})-(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}})\right]-\frac{q(1-\beta^2)}{R^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\vec{n}\times\vec{\beta}. \tag{72}$$

Betrachtet man das elektrische Feld in Form der oberen Zeile von (68) sieht man sofort, dass dies auch in der Form

$$\vec{B}=\vec{n}\times\vec{E} \tag{73}$$

ausgedrückt werden kann. Es sei nochmals betont, dass in allen Formeln $R=R(\vec{r},t_{\text{ret}})$, $\vec{n}=\vec{n}(\vec{r},t_{\text{ret}})$, $\vec{\beta}=\vec{\beta}(t_{\text{ret}})$ und $\dot{\vec{\beta}}=\dot{\vec{\beta}}(t_{\text{ret}})$ zu lesen ist, d.h. alle mit der Bewegung des Teilchens zusammenhängenden Größen sind bei der *retardierten Zeit* zu nehmen, die ihrerseits vermöge (56) als implizit definierte Funktion der Aufpunktkoordinaten $(t,\vec{r})$ zu interpretieren ist!

Betrachten wir das durch (68) und (72) gegebene elektromagnetische Feld genauer, erkennen wir, dass es zwei Beiträge gibt: Die ersten Terme sind $\propto \dot{\vec{\beta}}$, also zur **Beschleunigung des Teilchens**. Sie fallen mit $1/R$ ab, während die zweiten Terme nur von der **Geschwindigkeit** abhängen und mit $1/R^2$ abfallen. Diese Geschwindigkeitsfelder sind im wesentlichen Coulomb-Felder, die mit der Bewegung der Punktladung „mitgeschleppt“ werden. Die Ausdrücke unterscheiden sich von den in Abschnitt 2 für eine gleichförmig bewegte Punktladung nur dadurch, dass wir hier alles in Form der „retardierten Relativkoordinaten“ $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t_{\text{ret}})$ statt durch die „instantanen Relativkoordinaten“ $\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}_0(t)$ ausdrücken. Zur *Übung* kann man dies verifizieren, indem man in (68) und (72) für den Falle $\dot{\vec{\beta}} = 0$ (also gleichförmige Bewegung) in den verbleibenden Termen die explizite Lösung (31) für t_{ret} einsetzt. Einfacher ist es freilich, dies für die Potentiale (58) und (59) durchzuführen, was natürlich sofort zu (38) führt, und die Umrechnung von den „retardierten Relativkoordinaten“ $\vec{R}$ zu den „instantanen Relativkkoordinaten“ haben wir ja in Gl. (39) ausgeführt.

Jedenfalls wird durch diese Betrachtung deutlich, dass die Zerlegung in die „Beschleunigungsterme“, die $\propto 1/R$ abfallen und „Geschwindigkeitsterme“, die $\propto 1/R^2$ physikalisch qualitativ verschiedenen Feldanteilen entspricht:

Wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden, bedeuten die Beschleunigungsterme **Strahlungsfelder**, die elektromagnetische Feldenergie ins Unendliche übertragen, also **elektromagnetische Wellen**. Die Geschwindigkeitsterme entsprechen hingegen dem mit der Bewegung des Teilchens mitgeschleppten **elektrostatischen Coulomb-Feld** (für $\vec{E}$) bzw. dem **magnetostatischen Biot-Savart-Feld** (für $\vec{B}$).

In der relativistisch formulierten Elektrodynamik wird klar werden, dass man diesen Anteil des Magnetfeldes als relativistischen Effekt verstehen kann, der durch die Beobachtung eines rein elektrostatischen Coulombfeldes für eine ruhende Punktladung durch einen gegenüber dieser Ladung gleichförmig bewegten Beobachter zustande kommt. Dadurch wird auch deutlich, dass die elektrischen und magnetischen Komponenten eigentlich lediglich bezugssystemabhängige Komponenten eines sechsdimensionalen elektromagnetischen Feldes zu interpretieren sind.

4 Energieabstrahlung einer beschleunigt bewegten Punktladung

Die Energiestromdichte, also die pro Fläche und Zeit abgestrahlte Energie, ist durch den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \tag{74}$$

gegeben.

Wir interessieren uns nun für die gesamte Leistung, die durch eine Kugelschale mit sehr großem Radius um die momentane Position der Ladung abgestrahlt wird. Es ist klar, dass in diesem Fall für fixierte Beobachtungszeit t die retardierte Zeit t_{ret} für all diese Punkte auf der Kugelschale dieselbe ist, d.h. diese Kugelschale entspricht auch einer Kugelschale mit $R = |\vec{r} - \vec{r}_0(t_{\text{ret}})| = \text{const}$. Wir können also die Strahlungsleistung für konstantes $R \to \infty$ ausrechnen. Damit können wir die oben hergeleiteten Formeln (68) und (73) verwenden. Dann gilt für die durch die Kugelschale ∂K_R mit Radius R abgestrahlte Leistung

$$P = \int_{K_r} \mathrm{d}^2 \vec{f} \cdot \vec{S} = \int_0^{\vartheta} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi R^2 \sin\vartheta \, \vec{n} \cdot \vec{S} = \int_{S_1} \mathrm{d}^2\Omega \, \vec{n} \cdot \vec{S}, \tag{75}$$

wobei wir Kugelkoordinaten für die Kugelschale eingeführt haben, und wir schreiben wieder $\vec{n} = \vec{R}/R$; $\mathrm{d}^2\Omega = \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \, \sin\vartheta$ ist das Raumwinkelelement.

Nun ist gemäß (73)

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{c}{4\pi} [\vec{n}\vec{E}^2 - \vec{E}(\vec{n} \cdot \vec{E})]. \tag{76}$$

Wie oben besprochen, kann man $\vec{E}$ in einen mit $1/R$ abfallenden Beschleunigungsterm

$$\begin{aligned}\vec{E}_b &= \frac{q}{cR(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\left[(\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{n})(\vec{n}-\vec{\beta})-(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})\dot{\vec{\beta}}\right] \\ &= \frac{q}{cR(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\vec{n}\times[\dot{\vec{\beta}}\times(\vec{\beta}-\vec{n})]\end{aligned} \tag{77}$$

und einen mit $1/R^2$ abfallenden Coulomb-Term zerlegen. Aus (76) wird klar, dass wir bei der Berechnung für die Leistung gemäß (75) im Limes $R\to\infty$ nur die Terme $\propto \vec{E}_b^2 = \mathcal{O}(1/R^2)$ zu betrachten brauchen, da $\vec{n}\cdot\vec{S}$ für die übrigen Terme wie $1/R^3$ bzw. sogar wie $1/R^4$ abfallen, so dass für $R\to\infty$ nur die reinen Beschleunigungsterme übrig bleiben. Anders ausgedrückt transportieren nur die Beschleunigungsanteile des elektromagnetischen Feldes Energie ins Unendliche, und nur sie besitzen die physikalische Bedeutung **elektromagnetischer Wellen**.

Aus der zweiten Form von (77) folgt sofort, dass $\vec{n}\cdot\vec{E}_b=0$ ist, und sich folglich (76) für unsere Rechnung zu

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}_b^2\vec{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{R^3}\right) \tag{78}$$

vereinfacht, d.h.

$$P = \frac{cR^2}{4\pi}\int_0^{\vartheta}\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\sin\vartheta\,\vec{E}_B^2+\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \tag{79}$$

Die pro Raumwinkel abgestrahlte Leistung ist also

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{rad}}}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^6}\left\{\vec{n}\times[\dot{\vec{\beta}}\times(\vec{\beta}-\vec{n})]\right\}^2. \tag{80}$$

Wie wir sehen, strahlt eine bewegte Punktladung nur dann Leistung ab, d.h. es werden nur dann ins Unendliche propagierende elektromagnetische Wellen erzeugt, wenn die Ladung beschleunigt ist. Die Coulomb-Felder einer gleichförmig bewegten Ladung reichen zwar ins Unendliche, werden aber sozusagen lediglich mit der bewegten Ladung „mitgeschleppt“, und es erfolgt kein Energietransport durch Strahlung ins Unendliche. Die direkte Berechnung der totalen Leistung für den Ausdruck (80) ist sehr schwierig und soll hier nicht näher betrachtet werden.

Wir können aber stets ein Bezugssystem wählen, in dem zur betrachteten fixierte retardierten Zeit (und damit fixierten Beobachtungszeit) $\beta=0$ ist. Von diesem Bezugssystem aus betrachtet ist (*nachrechnen!*)

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{rad}}^{(\beta=0)}}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}[\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}})]^2 = \frac{q^2}{4\pi c}[\dot{\vec{\beta}}^2-(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2]. \tag{81}$$

Legen wir nun die Polarachse des Kugelkoordinatensystems in Richtung von $\dot{\vec{\beta}}$, ist

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{rad}}^{(\beta=0)}}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\dot{\vec{\beta}}^2\sin^2\vartheta. \tag{82}$$

Die totale Leistung ist somit

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{rad}}^{(\beta=0)} &= \frac{q^2}{4\pi c}\dot{\vec{\beta}}^2 \int_0^{\vartheta} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sin^3\vartheta \\
&= \frac{q^2 \dot{\vec{\beta}}^2}{2c} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u (1-u^2) \\
\Rightarrow P_{\mathrm{rad}}^{(\beta=0)} &= \frac{2q^2 \dot{\vec{\beta}}^2}{3c}.
\end{aligned}
\tag{83}
$$

Das ist die **Larmorsche Formel**. Sie gilt näherungsweise freilich auch wenn $\beta \ll 1$, also für nichtrelativistisch bewegte Teilchen [Lar97].

Bemerkung: Den allgemeinen Fall einer beliebig bewegten Ladung kann man mit Hilfe der Relativitätstheorie aus der Larmor-Formel erhalten, indem man (83) für das Ruhsystem mittels Vierervektoren in kovarianter Form schreibt. Dann gilt die Formel in allen Bezugssystemen, also auch für beliebige momentane Geschwindigkeiten. In nichtkovarianter Form mit unseren Bezeichnungen geschrieben, lautet das Resultat (s. z.B. [Jac98, Roh07])

$$
P_0 = \frac{2q^2}{3c(1-\beta^2)^3}\left[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2\right]. \tag{84}
$$

Es ist dabei zu beachten, dass (84) immer diejenige Leistung angibt, wie sie in dem Bezugssystem gemessen wird, in dem $\vec{\beta}(t_{\mathrm{ret}}) = 0$ ist, wo die Larmor-Formel (83) gilt. Will man diese Formel aus (80) erhalten, muss man beachten, dass (80) die pro Beobachtungszeit abgestrahlte Energie angibt, denn der Poynting-Vektor wurde für die Felder zur Zeit t angegeben. Demnach ist P_0

$$
\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{rad}}\mathrm{d}^2\Omega}{\mathrm{d}t_{\mathrm{ret}}} = \frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{rad}}^{(\beta=0)}}{\mathrm{d}^2\Omega}(\partial_t t_{\mathrm{ret}})^{-1} \overset{(62)}{=} \frac{P_{\mathrm{rad}}^{(\beta=0)}}{\mathrm{d}^2\Omega}(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}). \tag{85}
$$

Damit wird gemäß (80)

$$
\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^5}\left\{\vec{n} \times [\dot{\vec{\beta}} \times (\vec{\beta} - \vec{n})]\right\}^2. \tag{86}
$$

Die aufwendige Integration über den Raumwinkel wurde mit Hilfe von `Mathematica 10.0` ausgeführt und bestätigt in der Tat (84), wie das im folgenden angehängte Mathematica-Notebook zeigt.

Integration von (86) über Raumwinkel

```
In[1]:= nvec = {Sin[th] Cos[ph], Sin[th] Sin[ph], Cos[th]};
```

Lege Geschwindigkeit zur retardierten Zeit in z - Richtung:

```
In[2]:= bevec = {0, 0, be};

In[3]:= avec = {a1, a2, a3};

In[4]:= n1vec = Cross[nvec - bevec, avec]

Out[4]= {a2 be - a2 Cos[th] + a3 Sin[ph] Sin[th],
   -a1 be + a1 Cos[th] - a3 Cos[ph] Sin[th], a2 Cos[ph] Sin[th] - a1 Sin[ph] Sin[th]}

In[5]:= n2vec = FullSimplify [Cross[nvec, n1vec]]

Out[5]= {a1 (be - Cos[th]) Cos[th] + a3 Cos[ph] Cos[th] Sin[th] +
      Sin[ph] (a2 Cos[ph] - a1 Sin[ph]) Sin[th]^2, a2 (be - Cos[th]) Cos[th] +
      a3 Cos[th] Sin[ph] Sin[th] + Cos[ph] (-a2 Cos[ph] + a1 Sin[ph]) Sin[th]^2,
   Sin[th] ((-be + Cos[th]) (a1 Cos[ph] + a2 Sin[ph]) - a3 Sin[th])}

In[6]:= nenner = FullSimplify [n2vec.n2vec]

Out[6]= Sin[th]^2 ((-be + Cos[th]) (a1 Cos[ph] + a2 Sin[ph]) - a3 Sin[th])^2 +
    (a1 (be - Cos[th]) Cos[th] + a3 Cos[ph] Cos[th] Sin[th] +
          Sin[ph] (a2 Cos[ph] - a1 Sin[ph]) Sin[th]^2)^2 +
    (a2 (be - Cos[th]) Cos[th] + a3 Cos[th] Sin[ph] Sin[th] +
          Cos[ph] (-a2 Cos[ph] + a1 Sin[ph]) Sin[th]^2)^2
```

Integration über ph bezieht sich nur auf nenner. Daher führen wir diese Integration zunächst aus :

```
In[7]:= intnenner= Integrate[nenner, {ph, 0, 2 Pi}]
```

Out[7]= $$\frac{1}{2}\pi\left(2\,a3^2+3\,a1^2\left(1+be^2\right)+3\,a2^2\left(1+be^2\right)-8\left(a1^2+a2^2\right)be\,Cos[th]+\left(a1^2+a2^2-2\,a3^2+\left(a1^2+a2^2\right)be^2\right)Cos[2\,th]\right)$$

Für die verbleibende th - Integration ist es wichtig, daß be < 1 ist :

```
In[8]:= $Assumptions  = {0 < be < 1}

Out[8]= {0 < be < 1}

In[9]:= P0 = q^2/(4 Pic)
      FullSimplify [Integrate[intnennerSin[th]/(1 - be Cos[th])^5, {th, 0, Pi}]]
```

Out[9]= $$\frac{2\left(-a3^2+a1^2\left(-1+be^2\right)+a2^2\left(-1+be^2\right)\right)q^2}{3\left(-1+be^2\right)^3 c}$$

```
In[10]:= Pjackson = 2 q^2/(3 c (1 - be^2)^3) (avec.avec - Cross[bevec, avec].Cross[bevec, avec])
```

Out[10]= $$\frac{2\left(a1^2+a2^2+a3^2-a1^2 be^2-a2^2 be^2\right)q^2}{3\left(1-be^2\right)^3 c}$$

```
In[11]:= FullSimplify [P0 - Pjackson]

Out[11]= 0
```

A Alternative Herleitung der Felder

Die etwas mühsame Berechnung der Felder aus den retardierten Potentialen (52) und (53) kann auf alternative Weise erfolgen, indem man die Integration zunächst nicht ausführt und die entsprechenden Ableitungen nach $\vec{r}$ und t unter dem Integral vornimmt. Wir schreiben dazu (52) und (53) zunächst in der etwas kompakteren Form

$$\Phi(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \frac{q}{R} \delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right), \tag{87}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \frac{q\vec{\beta}}{R} \delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right), \tag{88}$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{r},t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t'), \quad \vec{\beta} = \vec{\beta}(t') = \frac{1}{c}\dot{\vec{r}}_0(t') \tag{89}$$

eingeführt haben. Im folgenden verwenden wir noch

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}. \tag{90}$$

Beginnen wir mit der Berechnung des Gradienten von Φ. Wir können dazu (87) unter dem Integral ableiten und erhalten

$$\vec{\nabla}\Phi = q \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \left[\delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right)\vec{\nabla}\frac{1}{R} + \frac{1}{cR}(\vec{\nabla}R)\delta'\left(t' - t + \frac{R}{c}\right)\right]. \tag{91}$$

Dabei ist δ' die Ableitung der δ-Distribution nach ihrem Argument. Setzen wir $u(t') = t' - t + R/c$ müssen wir also Ausdrücke der Art

$$I = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' f(t')\delta'[u(t')] \tag{92}$$

berechnen. Dazu bemerken wir, daß nach der Kettenregel

$$\partial_{t'}\delta[u(t')] = \dot{u}(t')\delta'[u(t')] \Rightarrow \delta'[u(t')] = \frac{1}{\dot{u}(t')}\partial_{t'}\delta[u(t')] \tag{93}$$

ist. Setzen wir dies in (92) ein, können wir partiell integrieren und dann (35) anwenden. In unserem Fall ist (*nachrechnen!*)

$$\dot{u}(t') = 1 - \vec{\beta}\cdot\vec{n} > 0, \tag{94}$$

denn es ist stets $|\vec{\beta}\cdot\vec{n}| = \beta|\cos\phi| \leq \beta < 1$, denn gemäß der Relativitätstheorie muß die Geschwindigkeit des Teilchens stets kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein. Daraus ergibt sich

$$I = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \frac{f(t')}{\dot{u}(t')}\partial_t \delta[u(t')] = -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \partial_{t'}\left(\frac{f(t')}{\dot{u}(t')}\right)\delta[u(t')] = -\left[\frac{1}{\dot{u}(t')}\partial_{t'}\left(\frac{f(t')}{\dot{u}(t')}\right)\right]_{t'=t_{\mathrm{ret}}}, \tag{95}$$

wobei t_{ret} wieder die Lösung der Gleichung $u(t') = t' - t + R/c = 0$ ist. Wegen (94) ist u überall streng monoton wachsend, d.h. es gibt (höchstens) eine Lösung, d.h. für jedes Argument $(t,\vec{r})$ der Felder eine eindeutig bestimmte retardierte Zeit t_{ret}.

Mit

$$\vec{\nabla} R = \frac{\vec{R}}{R} = \vec{n}, \quad \vec{\nabla}\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}\vec{\nabla} R = -\frac{\vec{n}}{R^2}, \tag{96}$$

liefert (95) für (91)

$$\vec{\nabla}\Phi = -\frac{q\vec{n}}{R^2}(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}) - \frac{q}{c(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})}\partial_{t'}\left[\frac{\vec{n}}{R(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})}\right], \tag{97}$$

wobei überall stets $t' = t_{\text{ret}}$ eingesetzt zu denken ist. Wir werden dies im folgenden der Übersicht halber nicht explizit notieren. Die Auswertung der verbleibenden Ableitung nach t' liefert nach einigen Umformungen (*nachrechnen!*) schließlich wieder (66).
Ebenso folgt durch Ableiten von (88) nach der Zeit

$$\partial_t \vec{A} = -q\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \frac{\vec{\beta}}{R}\delta'\left(t'-t+\frac{R}{c}\right) \stackrel{(95)}{=} \frac{q}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}}\partial_{t'}\left[\frac{\vec{\beta}}{R(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})}\right]. \tag{98}$$

Führt man die wieder etwas aufwendige Ableitung nach t' aus, ergibt sich nach einiger Rechnung (67).

Literatur

[CH10] W. Cassing, H. v. Hees, Mathematische Methoden für Physiker, Universität Gießen (2010).
`http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hees/publ/maphy.pdf`

[Gre02] W. Greiner, Klassische Elektrodynamik, Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 6 ed. (2002).

[Jac98] J. D. Jackson, Classical electrodynamics, John Wiley&Sons, Hoboken, NJ, 3rd ed. (1998).

[JO01] J. D. Jackson, L. B. Okun, Historical roots of gauge invariance, Rev. Mod. Phys. **73** (2001) 663.
`http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.663`

[Lar97] J. Larmor, A Dynamical Theory of the Electric and Luminiferous Medium. Part III. Relations with Material Media., Proceedings of the Royal Society of London **61** (1897) 272.
`http://doi.org/10.1080%2F14786449708621095`

[Roh07] F. Rohrlich, Classical Charged Particles, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai (2007).

[Wie01] E. Wiechert, Elektrodynamische Elementargesetze, Annalen der Physik **309** (1901) 667.
`http://dx.doi.org/10.1002/andp.19013090403`