Die Laplacetransformation und die Faltung

Michael Hartwig

11. April 2001

Zusammenfassung

Ein Problem der Mathematik und der Physik ist es, Differentialgleichungen zu lösen. Die Laplacetransformation bietet die Möglichkeit Differential- und Integralausdrücke auf algebraische Ausdrücke umzuformen

1 Die Laplacetransformation

Man steht z.B. vor folgendem Problem:

$$y'' - 2y' + 2y = \cos t + 2\sin t \qquad \text{mit } y(o) = 2, y'(0) = 4$$

Hier bietet sich die LT als Lösungsmethode an. Allgemein kann man diese Methode anwenden, wenn:

- es sich um eine lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten handelt
- die Anfangswerte bei 0 gegeben sind
- die rechte Seite der Gleichung eine bekannte LT hat

Definition: sei f eine komplexwertige Funktion, die über jedem endlichen Intervall integriebar ist. Konvergiert das Integral, heißt die Funktion

$$L[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

die Laplacetransformierte von f.

Ein Beispiel:

$$L(1) = \int_0^\infty dte^{-st} = \frac{1}{p}$$

Für viele bekannte Funktionen sind die LT tabelliert. Die Umkehrtransformation der LT ist durch das Browwich Integral gegeben:

$$f(t) = L^{-1}(F) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dzF(z)e^{zt} \qquad \text{mit } t > 0$$

Der Integrationsweg verläuft hier im komplexen, man muß also die Methoden der Funktionentheorie anwenden.

Einige Recherregeln:

- L[αf(t)+β g(t)](s)=αL[f(t)](s)+βL[g(t)](s)
- L[f(ct)](s)=$\frac{1}{c}$L[f(t)$\left(\frac{s}{c}\right)$
- L[e^{-ct}f(t)](s)=L[f(t)](s+c)
- L[$\int_0^t f(u)du](s) = \frac{1}{s}$L[f(t)](s)
- L$\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty$L[t](u)du
- L[$t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}$L[f(t)](s)
- L[f'(t)](s)=sL[f(t)](s)-f(0)
- L[f"(t)](s)=s^{2}L[f(t)](s)-sf(0)-f'(0)

2 Faltung

Seien die LT der Funktionen g und h bekannt, welche Funktion löst dann die Gleichung

$$L(g)L(h) = L(f)?$$

Dies führt zum Begriff der Faltung.

Definition: Seien h und g Funktionen auf $\Re$, dann ist das Faltungsprodukt $h * g$ durch

$$(h * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} h(x - x')g(x')dx'$$

definiert.

Die Laplace-Faltung ist definiert durch

$$(h * g)(t) := \int_0^t h(t - t')g(t')dt'$$

Sie ist kommutativ und assoziativ:

$$h * g = g * h$$
$$(h * g) * f = h * (g * f)$$

Kommen wir nun zu unserem ursprüglichen Problem zurück: Wir suchten eine Lösung der Gleichung

$$y'' - 2y' + 2y = \cos t + 2\sin t \qquad \text{mit } y(o) = 2, y'(0) = 4$$

Die Vorgehensweise:

a) Transformation der Gleichung

b) Auflösung der Gleichung nach L(y)

c) Partialbruchzerlegung von L(y)

d) Rücktransformation der einzelnen Teile

Nun konkret:

$$a) L[y''] = s^2L[y] - sy(0) - y'(0) = s^2L(y) - 2s - 4$$
$$L(y') = sL(y) - y(0) = sL(y) - 2$$
$$L[\cos t] = \frac{s}{s^2+1}, L[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

Also:

$$s^2L[y] - 2s - 4 - 2s[y] + 4 + 2L[y] = \frac{2}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}$$

$$b) L[y](s^2 - 2s + 2) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} + 2s = \frac{s + 2 + 2s(s^2+1)}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow L[y] = \frac{2s^3 + 3s + 2}{(s^2+1)(s^2 - 2s + 2)}$$

$$c) L[y] = \frac{s}{s^2+1} + \frac{s+2}{s^2 - 2s + 2}$$

$$d) \frac{s+2}{(s-1)^2+1} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{3}{(s-1)^2+1} = L[e^t\cos t] + 3L[e^t \sin t]$$

Man erhält:

$$y = \cos t + e^t \cos t + 3e^t \sin t$$