Einfachste Strahlungsprobleme

Hendrik van Hees
mailto:hees@fias.uni-frankfurt.de
Frankfurt Institute for Advanced Studies
Ruth-Moufang-Str. 1
D-60438 Frankfurt

20. März 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In diesem FAQ-Artikel soll so einfach wie möglich („aber nicht einfacher") das Phänomen der Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen von Ladungsverteilungen im Vakuum besprochen werden. Wir gehen dabei von den Maxwellgleichungen aus, die wir in Heaviside-Lorentzschen (also rationalisierten Gaußeinheiten), wie sie in der modernen Teilchenphysik verwendet werden, notieren. Sie stellen die durchsichtigste Gestalt dieser fundamentalen Gleichungen dar.

Wir gehen der Anschauung halber in klassischer Dreierformulierung vor, wobei jedoch zu betonen ist, daß die wahre Struktur der Gleichungen erst in der vierdimensionalen Formulierung der speziellen Relativitätstheorie voll zutage tritt.

In Abschnitt 2 geben wir eine kurze Übersicht über die Maxwellgleichungen im Vakuum und erläutern deren physikalischen Gehalt. Dabei leiten wir auch die elektromagnetischen Potentiale her und stellen die Wellengleichungen in *Lorentzeichung* auf, die zu besonders einfachen Gleichungen führen.

Im Abschnitt 3 schreiten wir zur Lösung des sogenannten *Strahlungsproblems*, d.h. der Aufgabe, aus vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen die elektromagnetischen Felder zu bestimmen, was mit Hilfe der retardierten Greenschen Funktion der Wellengleichung, die wir hier in besonders einfacher Weise aus deren *Mills-Darstellung* herleiten, gelingt. Die gewonnene Lösung wird auf den einfachsten Fall der *Multipolentwicklung* niedrigster Ordnung, also bis zur Berücksichtigung des *elektrischen Dipolmoments*, angewandt, was zu dem exemplarischen Prototypen einer Antenne, dem *Hertzschen Dipol* führt. Wir gehen dabei so vor, daß wir diese Antenne durch die lineare harmonische Bewegung einer einzelnen Punktladung idealisieren. Das hat den Vorteil, daß keine komplizierten Randwertprobleme, wie sie für die Antennentheorie unvermeidlich sind, zu lösen sind, was dem physikalischen Gehalt der Strahlungsdynamik aber keinen Abbruch tut.

Wir schließen mit einem Abschnitt über das schwierige und bis heute noch nicht vollständig gelöste Problem der *Strahlungsrückwirkung*, d.h. die Frage, wie man die Rückwirkung des Strahlungsfeldes der Ladung auf deren eigene Bewegung konsistent berücksichtigen kann. Dies gelingt nur im Sinne der Störungstheorie, wo wieder unsere Greensche Funktion die besten Dienste leistet. Dieses Vorgehen ist übrigens analog zu der in der Quantenelektrodynamik voll zum Zuge kommenden Störungsrechnung, wobei jedoch der Feynmanpropagator auftritt. Wie in der Quantenfeldtheorie werden wir auch bei unserem klassischen Problem auf Divergenzen stoßen, die zu renormieren sein werden. Es zeigt sich nur, daß im klassischen Falle im Gegensatz zur Quantentheorie die Renormierung nur in niedrigster Ordnung gelingt, worauf wir aber nicht näher eingehen wollen. In diesem störungstheoretischen Sinne ist die QED vollständiger als die klassische Elektrodynamik: Während die erstere im Prinzip in jeder Ordnung Störungstheorie nach der Renormierung endlich ist, ist dies für die letztere Theorie nicht der Fall. Freilich ist auch im Falle der QED bislang genauso wie für die klassische Theorie noch keine exakte Lösung des selbstkonsistenten Problems einer Punktladung und ihres Feldes gefunden worden.

2 Die Maxwellgleichungen im Vakuum

Alle elektromagnetischen Phänomene im Vakuum lassen sich auf ein einfaches System partieller Differentialgleichungen zusammenfassen, die die elektromagnetischen Felder einerseits mit den sie erregenden elektrischen Ladungen und Stromdichten andererseits verknüpfen. Wir schreiben diese Gleichungen in der folgenden Reihenfolge auf:

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\vec{j}, \quad \operatorname{div}\vec{E} = \rho. \tag{2}$$

Auf den ersten Blick fällt die mathematische Struktur dieser Gleichungen auf: Die ersten beiden Gleichungen (1) sind Nebenbedingungen an das elektrische und magnetische Feld allein. Sie restringieren also die allgemeine Gestalt der Felder, während die Erregung des elektrischen und magnetischen Feldes aus der Stromdichteverteilung $\vec{j}$ und der Ladungsdichteverteilung ρ durch die Gleichungen (2) beschrieben wird. Die ersten nennt man die *homogenen*, die zweiten die *inhomogenen Maxwellgleichungen.*

Wir ziehen noch eine bemerkenswerte Folgerung aus den Maxwellgleichungen. Dazu bilden wir von der zweiten inhomogenen Gleichung die Zeitableitung und von der ersten inhomogenen Gleichung die Divergenz. Wegen div rot $\vec{B} = 0$ ergibt sich daraus sofort die *Kontinuitätsgleichung für den elektrischen Strom*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \tag{3}$$

Um diese Gleichung zu interpretieren, müssen wir über ein (zeitlich unveränderliches) Volumen integrieren und den Gaußschen Satz anwenden. Dann folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho(t, \vec{x}) = -\int_{\partial V} \mathrm{d}^2 \vec{A}\, \vec{j}(t, \vec{x}). \tag{4}$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht einfach die zeitliche Änderung der gesamten Ladung im Inneren des Volumens V. Diese Änderung ist aber durch den Stromfluß durch die Fläche gegeben. Das Vorzeichen auf der rechten Seite ist der üblichen Orientierung, des Flächenelementvektors nach außen, also vom „Inneren" des Volumens V weg zuzuschreiben. Demgemäß muß bei einer positiven zeitlichen Änderung der Gesamtladung im Inneren des Volumens ein entsprechender Strom positiver Ladungen ins Innere hinein erfolgen, woraus das Vorzeichen resultiert. Freilich ist das konsistent mit der hier verwendeten üblichen Definition des Vektordifferentialoperators div[1]. Das bedeutet, daß (3) die differentielle Form der *Erhaltung der elektrischen Ladung* ist, denn (4) sagt ja nach der eben gegebenen Erklärung, daß alle Änderung der Ladung im Inneren des Volumens V allein durch Strömung von Ladungen ins Innere bzw. aus dem Inneren heraus verursacht sein kann. Die Ladung fließt also stets irgendwo hin und bleibt insgesamt erhalten und wird nicht „aus dem Nichts" erzeugt.

Es ist hieran bemerkenswert, daß wir die Folgerung des Erhaltenseins der Ladung aus den Maxwellgleichungen allein ziehen konnten, denn strikt genommen sind ja die Maxwellgleichungen nicht vollständig, denn wir müßten auch noch „Materialgleichungen", in dem hier allein in Betracht gezogenen Falle einzelner Punktladungen also die Bewegungsgleichungen derselben, berücksichtigen, um das Gleichungssystem abzuschließen. Wie wir weiter unten noch ausführlich besprechen werden, wäre dies, wollte man die Beschreibung selbstkonsistent machen, die (relativistische) Bewegungsgleichung einer Punktladung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{\sqrt{1-[\mathrm{d}_t \vec{y}(t)]^2/c^2}} \frac{\vec{y}(t)}{\mathrm{d}t}\right) = q\left[\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{y}(t)}{\mathrm{d}t} \times \vec{B}(t, \vec{y}(t))\right]. \tag{5}$$

Ladung und Strom sind offenbar durch

$$\rho(t, \vec{x}) = q\delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{y}(t)], \quad \vec{j}(t, \vec{x}) = q\frac{\mathrm{d}\vec{y}(t)}{\mathrm{d}t}\delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{y}(t)] \tag{6}$$

gegeben. Nunmehr sind die Gleichungen in sich geschlossen. Wie wir im letzten Abschnitt aber noch sehen werden, ist dieses selbstkonsistente System aus Bewegungsgleichungen für Ladungen und Feldern mit großen, im Rahmen der klassischen Elektrodynamik noch ungelösten Problemen der sogenannten Strahlungsrückwirkung verbunden. Wir bescheiden uns daher zunächst mit dem einfacheren *Strahlungsproblem*.

[1] Eine hervorragende anschauliche Entwicklung dieser differentialgeometrischen Begriffsbildungen ist wieder bei Sommerfeld [Som92] zu finden.

Demzufolge stellen wir uns Ladungs- und Stromdichte (6) als durch starke äußere Kräfte vorgegeben vor und fragen nach dem elektromagnetischen Feld, das die solcherart bewegte Ladung erregt. Dabei sehen wir von der Rückwirkung dieses Feldes auf die Ladung selbst zunächst gänzlich ab. Wir haben also bei vorgegebenen Quellen ρ und $\vec{j}$ die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus den Maxwellgleichungen (1-2) zu ermitteln. Dabei muß freilich die Kontinuitätsgleichung (3) als Konsistenzbedingung stets strikt erfüllt sein, denn sonst werden die Maxwellgleichungen unlösbar. Daß dies für den jetzigen Näherungsansatz tatsächlich der Fall ist, kann man direkt aus (6) ersehen: Dazu leiten wir die erste Gleichung nach der Zeit ab und berücksichtigen, daß die Dirac-Distribution eine gerade Distribution ist:

$$\frac{\partial \rho(t,\vec{x})}{\partial t} = q \frac{\mathrm{d}\vec{y}(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \vec{y}} \delta^{(3)}[\vec{x}-\vec{y}(t)] = -q \frac{\mathrm{d}\vec{y}(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \delta^{(3)}[\vec{x}-\vec{y}(t)]. \tag{7}$$

Wie durch die Kontinuitätsgleichung (3) verlangt, ist die rechte Seite in der Tat gerade die Divergenz der in (6) angegebenen Stromdichte der Punktladung.

3 Die Lösung des Strahlungsproblems

3.1 Die retardierte Greensche Funktion

Unser Strahlungsproblem läßt sich nun recht einfach lösen. Dazu fassen wir zunächst die zweite der homogenen Maxwellgleichungen (1) ins Auge, dem zufolge die Divergenz des magnetischen Feldes verschwindet. Nach dem Helmholtzschen Satz muß es folglich eine pure Rotation sein, d.h. es existiert ein *Vektorpotential* $\vec{a}$, so daß

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \mathrm{rot}\ \vec{a}(t,\vec{x}). \tag{8}$$

Dies können wir nun in die erste homogene Maxwellgleichung einsetzen, wodurch wir

$$\mathrm{rot}\ \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{a}}{\partial t}\right) = 0 \tag{9}$$

erhalten. Das hat aber zur Folge, daß das Vektorfeld in den Klammern der Gradient eines Skalarfeldes sein muß. Nennen wir dieses Feld $-\mathrm{grad}\,\phi$, ergeben sich aus den homogenen Maxwellgleichungen die Beziehungen:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\ \vec{a}, \quad \vec{E} = -\mathrm{grad}\ \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{a}}{\partial t}. \tag{10}$$

Man nennt ϕ und $\vec{a}$ die *elektromagnetischen Potentiale.*

Ersetzen wir elektrisches und magnetisches Feld in den inhomogenen Maxwellgleichungen (2) durch die Ausdrücke (10) brauchen wir uns um die homogenen Gleichungen nicht mehr zu kümmern, und wir haben ein Gleichungssystem für vier statt für sechs Feldkomponenten. Die homogenen Maxwellgleichungen werden ja bereits durch die Gestalt (10) befriedigt.

Allerdings ist andererseits die Wahl von $\vec{a}$ und ϕ nicht eindeutig. Dazu stellen wir uns einen Moment vor, wir hätten die physikalisch relevanten Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bereits bestimmt und suchen nur dazugehörige Potentiale ϕ und $\vec{a}$. Angenommen, wir hätten solche Potentiale gefunden, die (10) erfüllen. Dann können wir zu $\vec{a}$ ein beliebiges Gradientenfeld addieren, ohne daß sich $\vec{B}$ dadurch ändert:

$$\vec{a}' = \vec{a} + \mathrm{grad}\,\chi, \tag{11}$$

wo χ ein beliebiges Skalarfeld ist. Setzen wir in die zweite Gleichung (10) statt $\vec{a}$ einfach $\vec{a}'$, läßt sich das sofort durch Umdefinition des Skalarpotentials gemäß

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{12}$$

kompensieren. Mit $\vec{a}$ und ϕ sind also auch $\vec{a}'$ und ϕ' genauso geeignete elektromagnetische Potentiale. Man nennt (11) und (12) zusammengenommen eine *Eichtransformation*, und die Unabhängigkeit der Maxwellgleichungen von solchen Eichtransformationen *Eichinvarianz der Maxwellgleichungen*. Die Elektrodynamik stellt die einfachste Version einer ganzen Klasse von Theorien, die man *Eichtheorien* nennt, dar.

Man kann zeigen, daß die Tatsache, daß die Kontinuitätsgleichung (3) bereits ohne die Verwendung der Bewegungsgleichung für die Ladung gelten *muß*, damit die Maxwellgleichungen mit den vorgegebenen Ladungsdichten und Stromdichten konsistent sind, eng mit dieser Eichinvarianz zusammenhängt. Heutzutage verstehen wir alle in der Natur vorkommenden Kräfte aus einem solchen *Prinzip der Eichinvarianz*, das allerdings seine volle Schönheit erst in der Quantenfeldtheorie entfaltet.

Für jetzt beschränken wir uns auf die Feststellung, daß in der klassischen Theorie die Potentiale reine Hilfsgrößen sind, die wegen der Eichinvarianz keine einfache physikalische Interpretation besitzen. Wir können ja völlig willkürliche Eichfunktionen χ gemäß (11) und (12) addieren, so daß die Potentiale noch nicht einmal dem Kausalitätsprinzip genügen müssen. Freilich muß dies für die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ selbst der Fall sein.

Wir werden nun zeigen, daß solche kausalen Lösungen unseres Strahlungsproblems tatsächlich existieren und auch eindeutig sind. Mit anderen Worten: Zusammen mit der Kausalitätsbedingung ist das Strahlungsproblem *eindeutig* lösbar.

Wir können uns das Leben freilich sehr viel einfacher machen, wenn wir die Eichfreiheit der Potentiale ausnutzen, und eine Nebenbedingung verlangen, die das Rechnen erleichtert. Es zeigt sich, daß es beim Einsetzen der Gleichungen (10) in die inhomogenen Gleichungen von großem Vorteil ist, wenn man die sogenannte *Lorentzeichbedingung*

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{a} = 0 \tag{13}$$

verlangt[2]. Man rechnet sogleich nach, daß die inhomogenen Maxwellgleichungen (2) nunmehr vollständig ersetzt werden durch

$$\Box\phi(t,\vec{x}) = \rho(t,\vec{x}), \quad \Box\vec{a}(t,\vec{x}) = \frac{1}{c}\vec{j}(t,\vec{x}). \tag{14}$$

Hierin ist $\Box$ der D'Alembertsche Operator

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \tag{15}$$

In Bereichen verschwindender Quellen sind die Maxwellgleichungen also zu ungekoppelten Wellengleichungen für die Potentiale äquivalent. Die Entkoppelung der Vektorpotentiale ist dabei

[2] Der historischen Gerechtigkeit halber sei bemerkt, daß nicht der Holländer Lorentz, sondern der Däne Lorenz der erste war, der diese Vereinfachung entdeckt hat. Es war allerdings Lorentz, der den Zusammenhang mit der allgemeinen Eichinvarianz, ja die Eichinvarianz selbst, entdeckt hat.

der Lorentzeichbedingung (13) zu verdanken. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen ist dabei durch den Parameter c gegeben, der in den Maxwellgleichungen zunächst nur als ein das Einheitensystem festlegender Parameter auftaucht [3].

Doch nun zurück zu unserem Problem, (14) zu lösen. Wir formen die erste Gleichung um, indem wir formal den D'Alembertoperator invertieren, was wir wegen der Linearität der Gleichungen mit Hilfe eines linearen Integraloperators zu bewerkstelligen streben:

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3\vec{x}' G_R(t-t', \vec{x}-\vec{x'})\rho(t', \vec{x}'). \tag{16}$$

Damit (16) für beliebige Ladungsverteilungen zu (14) führt, muß offensichtlich zwangsläufig gelten:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2}\right) G_R(t-t', \vec{x}-\vec{x'}) = \delta(t-t')\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'). \tag{17}$$

Man nennt solch eine formale Inversion eines linearen Differentialoperators auch *Greensche Funktion*. G ist also eine Greensche Funktion des D'Alembertoperators (15).

Damit unsere Lösung für ϕ *kausal* ist, muß

$$G_R(t-t', \vec{x}-\vec{x}') \propto \Theta(t-t') \tag{18}$$

sein, d.h. es darf nur die Ladungsverteilung in der Vergangenheit für die Felder jetzt relevant sein. Man hat also eine *retardierte Wirkung*, d.h. es wirken sich die Ursachen in der Zukunft aus und nicht etwa Vorgänge in der Zukunft auf das jetzige Geschehen, was dem *Kausalitätsprinzip*, auf dem alle Physik basiert, widerspräche.

Wir werden nun sehen, daß die Gleichung (17) und die Retardierungsbedingung (18) bereits hinreichen, um G_R eindeutig zu bestimmen. Zunächst ist klar, daß unser translationsinvarianter Ansatz in (16) sowohl mit der Bewegungsgleichung (17) als auch mit der Retardierungsbedingung (18) konsistent ist. Wir dürfen für unsere Bestimmung der Greenschen Funktion folglich $t' = 0$ setzen. Dann lautet unsere Aufgabe:

$$\Box G_R(t, \vec{x}) = \delta(t)\delta^{(3)}(\vec{x}), \quad G_R(t, \vec{x}) \propto \Theta(t). \tag{19}$$

Da wir eine rein zeitliche Randbedingung vorgegeben haben und ansonsten eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vor uns haben, ist es am geschicktesten, eine Fouriertransformation bzgl. der Ortskoordinaten vorzunehmen, jedoch die Zeit als vierte Variable beizubehalten. Wir setzen also

$$G_R(t, \vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{G}_R(t, \vec{k}) \exp(\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}). \tag{20}$$

Dies in die Wellengleichung (19) eingesetzt ergibt unter Verwendung der Formel

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}) \tag{21}$$

[3]Dazu ist zu bemerken, daß die Dimension einer Geschwindigkeit sich als besonders nützlich herausstellt, da dann $\vec{E}$ und $\vec{B}$ die gleiche Dimension besitzen, was die Maxwellgleichungen in dem hier verwendeten dem Gaußschen System nachgebildeten *Heaviside-Lorentzschen Einheitensystem* besonders übersichtlich macht. Gerade im SI wird die Sachlage unnötig kompliziert. Das SI ist zwar auch rational, womit ganz allgemein gemeint ist, daß keine irrationalen Koeffizienten 4π wie im Gaußschen Maßsystem in den Maxwellgleichungen auftauchen, aber die Einheiten von Strom und Ladung wurden eher dem technischen Gebrauch als der theoretischen Analyse angepaßt.

die Schwingungsgleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\vec{k}^2\right)\tilde{G}_R(t,\vec{k})=\delta(t). \tag{22}$$

Zusammen mit der Retardierungsbedingung (zweite Gleichung in (19) haben wir sogleich die Lösung

$$\tilde{G}_R(t,\vec{k})=\Theta(t)[A\exp(\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t)+B\exp(-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t)],\ \text{wobei } \omega_{\vec{k}}=c|\vec{k}|. \tag{23}$$

mit noch unbekannten Koeffizienten A und B. Wir wollen bei der Singularität $t=0$ jedoch die Stetigkeit der Greenschen Funktion erzwingen, denn ein Sprung würde eine δ-Distribution in der ersten Zeitableitung bedeuten, und wir wollen erst eine in der zweiten Zeitableitung, vgl. (22). Demnach muß also als erste Anfangsbedingung

$$\tilde{G}_R(0_+,\vec{k})=0\Rightarrow A+B=0 \tag{24}$$

verlangt werden. Jetzt müssen wir noch die zweite Anfangsbedingung finden. Eine naive Differentiation von (23) führt nicht zum Ziel, weil die Distributionen am Rande des Bereichs $t>0$ nicht eindeutig als Funktionen definiert sind. Wir müssen demnach (22) um ein kleines Intervall $t\in(-\epsilon,+\epsilon)$ integrieren. Wegen der soeben durch die Bedingung (24) hergestellten Stetigkeit der Greenschen Funktion bei $t=0$, fällt der von ihr herrührende Teil im Limes $\epsilon\to 0$ weg, so daß lediglich die erste Ableitung der Greenschen Funktionen einen Sprung aufweisen muß, der wegen der rechte Seite 1 sein muß. Wir haben also:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial_t}\tilde{G}_R(t,\vec{k})\bigg|_{t=0_-}^{t=0_+}=1\Rightarrow A-B=-\frac{\mathrm{i}c}{|\vec{k}|}. \tag{25}$$

Damit sind aber A und B eindeutig bestimmt, und die retardierte Greensche Funktion lautet in der sogenannten Mills-Darstellung:

$$\tilde{G}_R(t,\vec{k})=\frac{c}{2|\vec{k}|}\Theta(t)\sin(\omega_{\vec{k}}t). \tag{26}$$

Zur Auswertung des Integrals (20) rechnet man geeignetermaßen nach Kugelkoordinaten mit der Polarachse in Richtung von $\vec{x}$ um, erledigt die Winkelintegration zuerst und gelangt schließlich zu der Zeit-Ortsraumdarstellung der retardierten Greenfunktion:

$$G_R(t,\vec{x})=\frac{1}{4\pi|\vec{x}|}\delta\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right) \tag{27}$$

In (16) wird also die Zeitintegration trivial, und wir erhalten aus all diesen komplizierten Rechnungen das physikalisch unmittelbar einleuchtende Resultat:

$$\phi(t,\vec{x})=\int \mathrm{d}^3\vec{x}'\rho\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c},\vec{x}'\right)\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}. \tag{28}$$

In der Tat hätten wir dies unter Zuhilfenahme der Annahme, daß sich elektromagnetische Wirkungen mit der endlichen Geschwindigkeit c fortpflanzen, direkt anschreiben können. Gl. (28) besagt ja, daß das Skalarpotential durch Superposition von Punktladungen gemäß dem Coulombschen Gesetz gegeben ist, wobei aber die Retardierung durch die endliche Wirkungsausbreitung berücksichtigt werden muß: Die Ladung im infinitesimalen Volumenelement $\mathrm{d}^3\vec{x}'$ zur Zeit t wird am Ort $\vec{x}$ durch die zur *frühren Zeit* $t_R = t - |\vec{x} - \vec{x}'|$ in diesem Volumenelement befindliche Ladung und nicht etwa durch die momentan dort befindliche Ladung bestimmt.

Diese auf den ersten Blick bestechend anschauliche Argumentation hat allerdings den einen Haken, daß wir hier davon ausgegangen sind, daß das Skalarpotential der endlichen Wirkungsausbreitung unterworfen sein müsse. Wegen der Eichinvarianz ist das aber keinesfalls der Fall, denn wir können beliebige Eichtransformationen ausführen, die ein Eichfeld χ ins Spiel bringen, die gar nichts mit den physikalisch beobachtbaren elektromagnetischen Feldern zu tun haben und folglich auch nicht durch die Ladungsverteilungen und das Kausalitätsprinzip bestimmt sein müssen. So ist es doch sicherer, daß wir uns durch die strikte mathematische Rechnung von der Gestalt des retardierten Potentials (28) überzeugt haben.

Wir müssen nun aber auch noch sicher gehen, daß auch die Lorentzbedingung (13) tatsächlich erfüllt ist. Dazu bemerken wir, daß selbstverständlich auch die zweite Gleichung (14) mit Hilfe unserer retardierten Funktion gelöst wird, nur daß an die Stelle der Ladungsdichte hier der Fluß des elektrischen Stromes zu treten hat:

$$\vec{a}(t,\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3\vec{x}'\, \frac{1}{c}\, \vec{j}\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}, \vec{x}'\right) \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}. \tag{29}$$

wie schon oben erwähnt, haben wir uns nun zu überzeugen, daß die Lorentzbedingung (13) tatsächlich erfüllt ist. Dies geschieht unmittelbar durch direkte Anwendung der Differentialoperatoren auf unsere Lösungen (28) und (29). Hier erweist es sich aber als geschickter, zunächst die Greensche Funktion unintegriert stehen zu lassen. Wir haben es ja mit Lösungen der Gestalt

$$f(t,\vec{x}) = \int \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, G_R(t-t', \vec{x}-\vec{x}') g(t', \vec{x}') \tag{30}$$

zu tun. Folglich können wir die Ableitungen, die ja nach t bzw. nach $\vec{x}$ erfolgen, zunächst unter das Integral ziehen und dann unter Berücksichtigung des sich dabei umkehrenden Vorzeichens nach t' und $\vec{x}'$ umschreiben. Eine partielle Integration, wobei sich das Vorzeichen abermals umkehrt, in der jeweiligen Variablen liefert dann

$$\begin{aligned} \partial_t f(t,\vec{x}) &= +\int \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, G_R(t-t', \vec{x}-\vec{x}')\partial_{t'} g(t', \vec{x}'), \\ \partial_{\vec{x}} f(t,\vec{x}) &= +\int \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, G_R(t-t', \vec{x}-\vec{x}')\partial_{\vec{x}'} g(t', \vec{x}'). \end{aligned} \tag{31}$$

Wenden wir also auf unsere retardierten Lösungen (28) und (29) die Zeitableitung respektive die Divergenz an, ergibt sich aus (31) gerade die Faltung der Greenschen Funktion mit $\partial_{t'}\rho(t',\vec{x}') + \mathrm{div}\vec{j}(t',\vec{x}')$, was aber zufolge der Kontinuitätsgleichung der Ladung (3) ohnehin identisch zu verschwinden hat, wenn die Maxwellgleichungen überhaupt eine Lösung besitzen sollen. Damit ist die Konsistenz unserer Lösung bewiesen, und die retardierten Lösungen für die Potentiale liefern freilich auch retardierte Lösungen für die Felder, was in allgemeinen Eichungen nicht so leicht zu zeigen gewesen wäre. Es ist aber klar, daß die Lösungen von der Eichung unabhängig sind und folglich in allen Eichungen das gleiche Resultat für die physikalischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ herauskommt, also stets Übereinstimmung mit dem Kausalitätsprinzip und mit endlicher Signalausbreitungsgeschwindigkeit vorliegt.

3.2 Der Hertzsche Dipol

Wir betrachten den bereits oben angeführten Fall einer einzelnen sich bewegenden Ladung, gehen nun aber davon aus, daß diese sich in begrenzten Raumbereichen bewegt. Wir legen den

Ursprung unseres Koordinatensystems in diese Ladungsverteilung und betrachten die Felder aus einiger Entfernung zum Ursprung, d.h. aus Abständen, die zu allen Zeiten groß gegen die Ausdehnung der Ladungsverteilung ist. Dies ist der klassische Anwendungsfall der sogenannten *Multipolentwicklung.*

Wir gehen von (6) aus und betrachten $\vec{y}(t)$ als zu allen Zeiten kleine Größe, d.h. wir nehmen an, daß $|\vec{y}(t)| \ll |\vec{x}|$. Dann können wir die Ladungsdichte bis zur linearen Ordnung in $\vec{y}$ entwickeln:

$$\rho(t, \vec{x}) = q\delta^{(3)}(\vec{x}) - q\vec{d}(t)\vec{\nabla}\delta^{(3)}(\vec{x}) + O(|\vec{d}|^2). \tag{32}$$

Auch die Geschwindigkeit $\mathrm{d}\vec{y}/\mathrm{d}t$ sehen wir als klein an, so daß die Entwicklung der Stromdichte bis zur der selben Ordnung konsistenterweise

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = q\frac{\mathrm{d}\vec{y}(t)}{\mathrm{d}t}\delta^{(3)}(\vec{x}) + O(\vec{d}^2) \tag{33}$$

zu lauten hat.

Für uns ist es vor allem entscheidend, daß die Kontinuitätsgleichung (3) in jeder Ordnung der Multipolentwicklung exakt erfüllt ist. In der Tat ergibt sich unter Fortlassen der in $|\vec{y}|$ quadratischen Terme

$$\operatorname{div}\vec{j}(t, \vec{x}) = q\frac{\mathrm{d}\vec{y}(t)}{\mathrm{d}t}\vec{\nabla}\delta^{(3)}(\vec{x}) = -\frac{\partial\rho(t, \vec{x})}{\partial t}. \tag{34}$$

Die Ladungsdichte (32) enthält neben dem zeitabhängigen *elektrischen Dipolanteil* noch den zeitunabhängigen „Monopolanteil", der einfach einer im Ursprung ruhenden Punktladung entspricht. Diesen lassen wir im folgenden weg, weil wir uns nur für die zeitabhängigen Phänomene der Wellenausbreitung interessieren. Freilich liefert unsere retardierte Lösung auch für statische Ladungsverteilungen das korrekte Resultat, nämlich ein elektrostatisches Coulombfeld.

Es ist klar, daß wir uns dieses statische Coulombfeld einfach dadurch kompensiert denken können, daß wir von vornherein eine statische Punktladung der Größe$-q$ in den Ursprung gesetzt denken. Jetzt wird auch der Name "elektrischer Dipol" verständlich: Es ist die niedrigste nichtverschwindende Ordnung der Multipolentwicklung für ein insgesamt ladungsneutrales System, welches Anlaß zur Strahlung gibt, vorausgesetzt die Ladungen bewegen sich in einem eng umgrenzten Raumbereich. Wir bemerken sogleich, daß diese Näherung *nicht* für den Fall einer gleichförmig bewegten Ladung anwendbar ist. Wir werden dieses Problem weiter unten noch näher ins Auge fassen.

Jetzt wollen wir jedoch zunächst die Dipolstrahlung betrachten. Ohne großen Verlust an Allgemeinheit dürfen wir uns auf *harmonische Schwingungen* beschränken, denn wir können jede periodische Bewegung durch Fourierreihen und jede nichtperiodische Bewegung durch eine Fouriertransformation auf diesen Fall zurückführen, so daß wir wegen der Linearität der Maxwellgleichung auf diese Fourierreihen bzw. -integrale zurückgreifen können.

Unser harmonisch erregter elektrischer Dipol liefert also die folgenden Quellen für das elektromagnetische Feld

$$\rho_1(t, \vec{x}) = -q\exp(-\mathrm{i}\omega t)\vec{d}\vec{\nabla}\delta^{(3)}(\vec{x}), \quad \vec{j}_1(t, \vec{x}) = -q\mathrm{i}\omega\exp(-\mathrm{i}\omega t)\delta(\vec{x}). \tag{35}$$

Hierbei konnten wir die komplexe Form der Bewegung wählen, weil die Maxwellgleichungen linear und reell sind. Auch unsere retardierte Greensche Funktion ist reell. Die eigentlichen physikalischen Größen sind der Realteil der jeweiligen komplexen Funktionen. Nur die Rechnung erleichtert sich geringfügig.

Jedenfalls sind gemäß (28) und (29) die retardierten Potentiale ebenfalls allein über den Faktor $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ von der Zeit abhängig. Wir werden im folgenden allerdings nur das Vektorpotential benötigen, für welches sich aus (29) unmittelbar

$$\vec{a}(t,\vec{x}) = \vec{a}'(\vec{x})\exp(-\mathrm{i}\omega t) \text{ mit } \vec{a}'(\vec{x}) = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c}q\vec{d}\frac{1}{4\pi r}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\omega r}{c}\right) \tag{36}$$

ergibt. Das Vektorpotential ist also eine *auslaufende Kugelwelle*, ganz so wie wir es von dem gestellten Problem erwarten. Daß die Welle auslaufend ist, haben wir natürlich der korrekten Wahl der Lösung als retardierte Funktion zu verdanken.

Das Magnetfeld ergibt sich sofort mit (10):

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}'(\vec{x})\exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad \vec{B}'(\vec{x}) = -\frac{\mathrm{i}k}{4\pi}q(\vec{x}\times\vec{d})\left(\frac{\mathrm{i}kr-1}{r^3}\right)\exp(\mathrm{i}kr) \quad \text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c}. \tag{37}$$

Hierin ist k die *Wellenzahl*[4].

Das elektrische Feld gewinnen wir einfacher direkt aus den Maxwellgleichungen und dem bereits berechneten Magnetfeld, denn für unsere harmonische Zeitabhängigkeit können wir überall in den Maxwellgleichungen ∂_t durch $-\mathrm{i}\omega$ ersetzen. Aus der ersten inhomogenen Maxwellgleichungen ergibt sich dann für $\vec{x}\neq 0$ (wo das Feld ohnehin singulär ist)

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}'(\vec{x})\exp(-\mathrm{i}\omega t) \text{ mit } \vec{E}'(\vec{x}) = \frac{\mathrm{i}}{k}\operatorname{rot}\vec{B}'(\vec{x}). \tag{38}$$

Dies in (37) eingesetzt und die Differentiationen ausgeführt, ergibt also

$$\vec{E}'(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi r^3}\left[\frac{3-3\mathrm{i}kr-k^2r^2}{r^2}\vec{x}(\vec{x}\cdot\vec{d}) - (1-\mathrm{i}kr-k^2r^2)\vec{d}\right]\exp(\mathrm{i}kr). \tag{39}$$

Wir können uns einen ersten Eindruck von der Gestalt des Feldes machen, indem wir Grenzfälle betrachten.

3.3 Die Nahfelder

Als Nahfelder bezeichnen wir die Felder in dem Gebiet, für welches $kr \ll 1$ ist. Mit der Wellenlänge geschrieben heißt das $r \ll \lambda/(2\pi)$. In führender Ordnung bzgl. der kleinen Größe kr ist folglich

$$\vec{B}'(\vec{x}) = \frac{\mathrm{i}kr}{4\pi r^3}q\hat{x}\times\vec{d}, \quad \vec{E}'(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi r^3}[3\hat{x}(\hat{x}\vec{d}) - \vec{d}]. \tag{40}$$

Hierin ist $\hat{x} = \vec{x}/r$ der Einheitsvektor in Richtung vom Dipolort (im Ursprung des Koordinatensystems) zum Aufpunkt. Jetzt erinnern wir uns, daß ja nur die Realteile physikalische Größen sind, so daß

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \frac{kr}{4\pi r^3}q\hat{x}\times\vec{d}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{q}{4\pi r^3}[3\hat{x}(\hat{x}\vec{d}) - \vec{d}]\cos(\omega t). \tag{41}$$

Es handelt sich also um „quasistationäre“ Felder, d.h. mit unserer Nahzonennäherung vernachlässigen wir die Retardierung. Das Magnetfeld ist dem Betrag nach um den Faktor kr kleiner

[4]Die Wellenlänge ergibt sich aus der 2π-Periodizität von $\exp(\mathrm{i}\alpha)$ zu $\lambda = 2\pi/k$

als das elektrische Feld, welches ein elektrostatisches Dipolfeld ist, das genau im Takt mit der oszillierenden Ladung schwingt. Das Magnetfeld ist der Schwingung hingegen um eine Phase $\pi/2$ voraus. Freilich wird die Näherung im statischen Fall, also $\omega = k = 0$ exakt. Es ergibt sich dann ein rein elektrostatisches Dipolfeld, und das Magnetfeld verschwindet, wie es sein muß: Ruhende Ladungen erregen kein Magnetfeld!

3.4 Die Fernfelder

Die Fernfelder ergeben sich gerade im entgegengesetzten Grenzfall $kr \gg 1$ bzw. $r \gg \lambda/(2\pi)$. Wir haben wieder unsere exakten Lösungen anzuschauen, um die entsprechenden Näherungsausdrücke zu gewinnen. Hier müssen wir freilich die Exponentialfunktionen stehen lassen, denn wir können sie in diesem Falle nicht irgendwie nähern, da sie einfach periodische Funktionen ihres Arguments sind. Aus (37) und (39) ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{B}(t,\vec{x}) &= \frac{k^2}{4\pi r} q\hat{x} \times \vec{d} \cos(kr - \omega t),\\ \vec{E}(t,\vec{x}) &= \frac{k^2}{4\pi r} q[\vec{d} - \hat{x}(\hat{x}\cdot\vec{d})] \cos(kr - \omega t) = \vec{B}(t,\vec{x}) \times \hat{x}.\end{aligned} \tag{42}$$

In der Fernzone sind also $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aufeinander senkrecht stehende in Phase schwingende Kugelwellenfelder, die beide senkrecht zur Richtung $\hat{x}$ polarisiert sind; $\hat{x}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem* aufeinander senkrechter Vektoren. Ihre Amplituden nehmen mit der reziproken Entfernung vom Erregungszentrum ab.

Phasenmäßig sind sie genau retardiert zur erregenden Dipolquelle, wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störungen gerade $\omega/k = c$ ist, wie es die Wellengleichung (14) für die Potentiale schon gezeigt hat.

4 Zum Problem der Strahlungsrückwirkung

Wir kommen nun zu dem wesentlich komplizierteren Problem der „*Strahlungsrückwirkung*". Schon Lorentz hat ja versucht, der *J. J. Thomsonschen* Entdeckung des *Elektrons* theoretisch Rechnung zu tragen, indem er diesen „Fremdling" in die klassische Elektrodynamik einzuarbeiten versuchte.

Schnelle kam er zu dem Schluß, daß das für ein Punktteilchen nicht so einfach möglich sei. Die Gründe dafür werden wir gleich sattsam zu spüren bekommen, denn in der Tat ist ein geladenes Punktteilchen ein „Fremdkörper" in der Elektrodynamik.

Wie immer, empfiehlt sich bei einer grundlegenden Betrachtung die Anwendung des Hamiltonschen Prinzips. Wir wollen auch eine relativistische Theorie der Punktteilchen betrachten, werden aber bei gegebener Zeit der Vereinfachung wegen doch wieder nichtrelativistisch rechnen.

4.1 Der Hamiltonformalismus für die Elektrodynamik

Wir werden zunächst die relativistische Formulierung der bisher behandelten klassischen Maxwellschen Feldtheorie darstellen, d.h. wir sehen zunächst wieder die Ladungs- und Stromdichten als extern vorgegeben an und versuchen, die Maxwellgleichungen durch ein Wirkungsprinzip zu formulieren.

Versuchen wir jedoch zunächst, die Maxwellgleichungen kovariant zu schreiben. Der Ausgangspunkt ist die Zusammenfassung der Zeit- mit den Raumvariablen zum kontravarianten Vierervektor

$$(y^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{y} \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Dies sind die Raum-Zeit-Koordinaten die bzgl. eines beliebigen Inertialsystems zu verstehen sind. Eine manifest kovariante Formulierung verlangt, daß die Gleichungen die Gestalt von Tensorgleichungen annehmen müssen, wobei Tensoren solche Objekte sind, deren Komponenten sich durch das Transformationsverhalten unter *Lorentztransformationen* Λ auszeichnen. Für unseren kovarianten Vektor liest sich das

$$y'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu y^\nu. \tag{44}$$

Dabei darf Λ eine beliebige Matrix, die die *Minkowskische Bilinearform*

$$(x^\mu), (y^\mu) \mapsto \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \text{ mit } (\eta^{\mu\nu}) = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{45}$$

ungeändert läßt. Dies verlangt von den Lorentztransformationsmatrizen lediglich, daß sie die Bedingung

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \tag{46}$$

erfüllen.

Weiter führen wir *Tensorfelder* ein. Betrachten wir zunächst ein Skalarfeld $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. Dieses transformiert sich unter Lorentztransformationen gemäß der Vorschrift

$$\phi'(x') = \phi(x). \tag{47}$$

Nehmen wir als Beispiel etwa ein Temperaturfeld, d.h. wir bestimmen zu jeder Zeit $t = x_0/c$ die Temperatur an jedem Punkt $\vec{x}$ im Raum. Ein gegen diesen Beobachter bewegter Beobachter muß gemäß dem Relativitätsprinzip die gleiche Temperatur finden[5]. Gemäß (47) ist also

$$\phi'(x') = \phi(x) = \phi(\Lambda^{-1} x'), \tag{48}$$

wobei wir uns hier der Matrix-Vektorschreibweise bedient haben, wobei stets kontravariante Vektorkomponenten involviert sein sollen, wobei die Transformationsvorschrift (44) gemeint ist.

Jetzt können wir auch untersuchen, wie sich der „Vierergradient" des Skalarfeldes transformiert. Aus (48) folgt sofort mit der Kettenregel

$$\frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^\mu} = \left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right|_{x=\Lambda^{-1}x'} \tag{49}$$

Es ist nun aber

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \Rightarrow \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^\mu} = \left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\nu} \right|_{x=\Lambda^{-1}x'} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu. \tag{50}$$

ein geordnetes Quadrupel von Zahlen a_μ heißen nun kovariante Komponenten eines Vektors, wenn sie sich kontragredient zu den kontravarianten Vektorkomponenten transformieren, also gemäß

$$a'_\mu = a_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu. \tag{51}$$

[5]Dazu muß man freilich die Temperatur korrekt definieren durch diejenige mittlere Temperatur eines Mediums, welches ein Thermometer anzeigt, das relativ zum Wärmebad in Ruhe ist. Wir gehen auf diese Problematik aber nicht näher ein.

Das bedeutet, daß der Gradient eines Skalarfeldes die *kovarianten Komponenten* eines Vektors bildet. Wir verwenden für den entsprechenden Differentialoperator daher die Abkürzung

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu. \tag{52}$$

Man zeigt sofort mit Hilfe von (51), daß man die Indizes „nach oben ziehen kann", indem man die kontravariante Minkowskibilinearform $(\eta^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu})^{-1} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ verwendet. Es bilden also

$$a^\mu = \eta^{\mu\nu} a_\nu \tag{53}$$

kontravariante Vektorkomponenten.

Die kontravarianten Komponenten eines Vektorfeldes transformieren sich gemäß

$$a'^\mu(x') = \Lambda^\mu a_\nu(x). \tag{54}$$

Durch Anwenden des vierdimensionalen Gradientenoperators ergibt sich ein gemischtes Tensorfeld zweiter Stufe:

$$t_\mu{}^\nu = \partial_\mu a^\nu, \tag{55}$$

dessen Komponenten sich definitionsgemäß nach der Vorschrift

$$t'_\mu{}^\nu(x') = (\Lambda^{-1})^{\rho\mu} \Lambda^\nu{}_\sigma t_\rho{}^\sigma(x) \tag{56}$$

transformiert. Es ist eine gute Übung zu überprüfen, daß sich die Ableitungen (55) tatsächlich so transformieren!

Es ist nun klar, daß die Gleichungen (15) kovariante Gleichungen zwischen Vierervektoren sind, wenn wir setzen

$$j^0(x) = c\rho(t, \vec{x}), \quad \vec{j}(x) = \vec{j}(t, \vec{x}), a^0(x) = \phi(t, \vec{x}), \quad \vec{a}(x) = \vec{a}(t, \vec{x}). \tag{57}$$

Hier und im folgenden bezeichnet x einen Vierervektor, $x^0 = ct$ seine Nullkomponente und $\vec{x}$ die letzten drei kontravarianten Vektorkomponenten. Die Lorentzeichbedingung (13) ist ebenfalls eine kovariante Gleichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{58}$$

und der D'Alembertoperator ist ein skalarer Differentialoperator, weil man ihn in der Form

$$\Box = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu \tag{59}$$

schreiben kann.

Die Maxwellgleichungen lauten in der kovarianten Schreibweise

$$\Box A^\mu = \frac{1}{c} j^\mu, \tag{60}$$

und die Feldstärkekomponenten werden im *Faradaytensor*

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{61}$$

zusammengefaßt. Damit ist auch klar, wie sich die Feldstärken unter Lorentztransformationen verhalten, nämlich gemäß ihrer Natur als Komponenten eines Vierertensors zweiter Stufe.

Die Maxwellgleichungen selbst müssen sich nun auch kovariant schreiben lassen, da unsere Formulierung mit Hilfe der Potentiale schon manifest kovariant ist. Das haben wir auch der Lorentzeichbedingung zu verdanken, die selbst ja manifest kovariant ist. Hätten wir eine andere Eichbedingung benutzt, wären die Gleichungen nicht manifest kovariant gewesen. Die Maxwellgleichungen, als Gleichungen für die Feldkomponenten geschrieben, selbst sind aber eichinvariant.

Zunächst kontrahieren wir (61) mit dem Gradientenoperator

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \Box A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = \Box A_\nu = \frac{1}{c} j_\nu. \tag{62}$$

Dies faßt offenbar die inhomogenen Maxwellgleichungen (2) zusammen. Um auch die homogenen Maxwellgleichungen zu erhalten, bilden wir $\partial_\rho F_{\mu\nu}$ und addieren die drei Gleichungen, die durch zyklische Vertauschung entstehen. Mit (61) ergibt sich 0. In der Tat folgte ja die Existenz der elektromagnetischen Potentiale aus den homogenen Maxwellgleichungen, so daß sich umgekehrt diese aus der Darstellbarkeit der Felder mittels Potentialen herleiten lassen müssen. Definiert man den *Levi-Civita*-Tensor durch

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \operatorname{sign}[(\mu, \nu, \rho, \sigma)], \tag{63}$$

wobei hier sign das Vorzeichen der Permutation der Zahlen μ, ν, ρ, σ bezeichnet, dann kann man zunächst die dualen Feldstärken bilden

$$(F^\dagger)^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (F^\dagger)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Mit diesem schreiben sich die homogenen Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu (F^\dagger)^{\mu\nu} = 0. \tag{65}$$

In der Tat stellt man fest, daß ein Ausschreiben in Komponenten mit Hilfe von (64) genau die homogenen Maxwellgleichungen (1) ergibt.

Als nächstes wollen wir die Maxwellgleichungen aus einem Wirkungsprinzip herleiten. Zunächst beschränken wir uns dazu auf extern vorgegebene Quellen j_μ, wie wir sie bereits in den vorigen Kapiteln behandelt haben. Wir sehen die Potentiale A_μ als die unabhängigen Freiheitsgrade an, wobei wir allerdings berücksichtigen müssen, daß wir aufgrund der Eichfreiheit Nebenbedingungen wie die Lorentzbedingung (58) stellen müssen, damit die Lösung für die Potentiale eindeutig bestimmt wird. Wir werden sehen, daß dies im Rahmen der *Lagrangeschen Formulierung* des Wirkungsprinzips keine größeren Probleme macht. Wollten wir die *Hamiltonsche Formulierung* benutzen, müßten wir uns mit der Theorie der Systeme mit Nebenbedingungen genauer auseinandersetzen. Dazu sei auf die Literatur, z.B. [Kug97] verwiesen, wo auch der klassische Fall ausführlich erläutert wird.

Da die Maxwellgleichungen für die Potentiale A^μ lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind, muß die Lagrangedichte bilinear in den Potentialen und deren Ableitungen sein. Weiter muß die Lagrangedichte ein Lorentzskalar sein, denn die Gleichungen selbst sind Tensorgleichungen, also Lorentz-kovariant. Außerdem muß die Wirkung eichinvariant sein. Damit bleibt für den reinen „Strahlungsanteil”, also das freie elektromagnetische Feld nur der Faradaytensor (62) und dessen Dualtensor (64) übrig.

Da die elektromagnetische Wechselwirkung unter Zeitumkehr und Raumspiegelungen invariant ist, bleibt nur die Bilinearform

$$\mathscr{L}_{\text{rad}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{66}$$

übrig.

Für die Wechselwirkung mit den externen Quellen finden wir

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = \frac{1}{c} j_\mu A^\mu. \tag{67}$$

In der Tat ergeben sich durch Variation der Wirkung nach A_μ die Maxwellgleichungen

$$\Box A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = \partial^\nu F_{\nu\mu} = \frac{1}{c} j_\mu. \tag{68}$$

Weiter ist die Wirkung tatsächlich invariant unter Eichtransformationen. Für $S_{\text{rad}} = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}_{\text{rad}}$ ist sogar die Lagrangedichte eichinvariant, denn (66) hängt nur vom eichinvarianten Faradaytensor $F_{\mu\nu}$ ab. Für Sint müssen wir eine partielle Integration vornehmen:

$$S_{\text{int}}[A_\mu + \partial_\mu \chi] = -\frac{1}{c} \int \mathrm{d}^4 x j_\mu (A^\mu + \partial_\mu \chi) = -\frac{1}{c} \int \mathrm{d}^4 x j_\mu A^\mu + \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^4 x (\partial_\mu j^\mu) \chi. \tag{69}$$

Offenbar ist die Wirkung also genau dann eichinvariant für beliebige χ, wenn gilt $\partial_\mu j^\mu = 0$, was mit der bereits oben hergeleiteten Kontinuitätsgleichung (3) übereinstimmt.

Diese Wirkung beschreibt nun die eine üblicherweise durch die Maxwelltheorie beantwortete Frage, nämlich welche Felder sich aus vorgegebenen Quellverteilungen ergeben. Diese Frage hatten wir ja oben bereits beantwortet: Wir können mit Hilfe der retardierten Greenschen Funktion die Potentiale bestimmen. Für die in diesem Artikel beständig verwendete Lorentzeichung ist diese Lösung in kovarianter Notation durch (28) und (29) gegeben:

$$A_\mu(t) = \frac{1}{c^2} \int \mathrm{d}^4 x G_R(x - x') j_\mu(x'). \tag{70}$$

In der Tat ist ja $\mathrm{d}t \mathrm{d}^3 \vec{x} = \mathrm{d}^4 x / c$. Daß (70) manifest kovariant unter solchen Lorentztransformationen ist, die die *Zeitrichtung* ungeändert lassen, also für die ${\Lambda^0}_0 \geq 1$ ist, ergibt sich sofort daraus, daß wir (27) in der Form

$$G_R(x) = \frac{c}{2\pi} \Theta(x^0) \delta(x^2) \tag{71}$$

schreiben können, welche manifest invariant ist, d.h. genauer gesagt: G_R ist eine Distribution, die sich wie ein Skalarfeld transformiert.

Wir wollen nun dieses dem Wesen nach „offene” Gleichungssystem dadurch schließen, daß wir die Wirkung mit einem dynamischen Term für die Ladungen und Ströme ergänzen. Der Einfachheit halber nehmen wir eine einzelne Punktladung an. Dann sind Ladungen und Ströme durch (6) zu ersetzen. Die Bahnkurve $\vec{y}(t)$ muß weiter aus einer Bewegungsgleichung folgen. Nehmen wir an, daß keine weiteren äußeren Kräfte auf das Teilchen einwirken, benötigen lediglich noch eine

Wirkung für ein freies relativistisches Punktteilchen. Für ein nichtrelativistisches Punktteilchen ist bekanntlich $L_0 = m/2v^2$. Wir können dies zu einer relativistisch kovarianten Wirkung machen, indem wir

$$L_0 = -mc^2\sqrt{1 - \left(\frac{1}{c}\frac{d\vec{y}(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{72}$$

Daß dies zu einer Lorentz-invarianten Wirkung führt können wir dadurch erweisen, daß wir (72) durch das *invariante* Eigenzeitelement $\mathrm{d}\tau = 1/c\sqrt{\mathrm{d}y_\mu \mathrm{d}y^\nu}$ ausdrücken:

$$L_0 = -mc^2\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}. \tag{73}$$

Dann wird also

$$S_0[\vec{y}] = -mc^2\int \mathrm{d}\tau = -mc^2\int \mathrm{d}tL_0. \tag{74}$$

Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen ist es einfacher, in der letzteren expliziten Form zu arbeiten.

Variation der Gesamtwirkung nach $\vec{y}$, wobei für j^μ die durch (6) gegebenen Ausdrücke zu setzen sind, ergibt dann die Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}\right) = q\vec{E}(t,\vec{y}) + \frac{q}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}(t,\vec{y}) \text{ mit } \beta = \frac{1}{c}\left|\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}\right|. \tag{75}$$

Das ist auf den ersten Blick die nicht manifest kovariant geschriebene relativistische Bewegungsgleichung für die Bewegung von geladenen Teilchen (75) in einem gegebenen elektromagnetischen Feld $\vec{E}, \vec{B}$. Auf der rechten Seite steht die bekannte *Lorentzkraft*.

Hier haben wir es aber mit einem weitaus komplizierteren Fall zu tun: Dadurch daß wir nämlich die Wirkung hingeschrieben haben, wollen wir nun eigentlich das *selbstkonsistente* Problem der simultanen Lösung der Gleichungen (68) und (75) behandeln, wobei ja die Ströme durch (6) gegeben waren. Wir haben also in der Tat ein geschlossenes Gleichungssystem vor uns, das sich im Prinzip lösen lassen sollte.

4.2 Lösung für ein einzelnes freies geladenes Teilchens

Im jetzigen Falle eines einzelnen Teilchens ist uns die Lösung des Problems schon durch das Relativitätsprinzip allein vorgegeben. Wir können uns der Einfachheit halber auf die Lösung des Problems einer am Anfang (wir setzen $t = 0$) im Ursprung des Koordinatensystems ruhenden Punktladung beschränken, denn wir können jede andere Anfangsbedingung durch Lorentzboosten erhalten. Da die Gleichungen nämlich relativistisch kovariant sind, ergibt sich die Lösung dieser allgemeineren Aufgabe aus der entsprechenden Lorentztransformation der Lösung des Problems des anfangs ruhenden Teilchens.

Die Lösung dieses Problems ist aber auch schon durch das Trägheitsprinzip bekannt: Die einzelne Ladung sollte einfach für alle Zeiten ruhen, und das elektromagnetische Feld ist ein reines elektrostatisches Coulombfeld einer Punktladung. Hier wird aber nun die Schwäche unseres Ansatzes offenkundig, denn diese Lösung führt zu einer mathematischen Inkonsistenz: Das Coulombfeld ist ja im Ursprung singulär. Deshalb ist aber wegen der Annahme, $\vec{y}(t) = 0$ sei die Lösung der Bewegungsgleichung für das Teilchen, die Lorentzkraft in (75) indefinit. Wir haben es hier mit den charakteristischen Divergenzen zu tun, die mit der Annahme eines punktförmigen Teilchens zusammenhängt.

Wie wir nun zeigen wollen, können wir dies dadurch beheben, daß wir die δ-Distribution in der Definition der Quellen (6) „regularisieren”, d.h. wir ersetzen sie durch eine Funktion, deren schwacher Limes schließlich wieder zu einer scharfen δ-Distribution führt. Um die Rechnung einfach zu halten, entscheiden wir uns für die „Verschmierung” der Punktladung zu einer homogen geladenen Kugel vom Radius R, d.h. wir ersetzen:

$$\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{3}{4\pi R^3}\Theta(R-|\vec{x}-\vec{y}|). \tag{76}$$

Setzen wir nun $\vec{y}(t) \equiv 0$, können wir die Potentiale mit Hilfe des retardierten Propagators berechnen. Die Auswertung des Integrals erfolgt dabei sinnvollerweise in Kugelkoordinaten. Das Resultat ist

$$A^0 = \Theta(|\vec{x}|-R)\frac{q}{4\pi|\vec{x}|} + \frac{3q}{4\pi R^3}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{|\vec{x}|^2}{6}\right)\Theta(R-|\vec{x}|), \quad \vec{A}=0. \tag{77}$$

Das elektromagnetische Feld ist hier natürlich ein rein elektrostatisches:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} A^0 = \frac{1}{4\pi}\frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^2}\Theta(|\vec{x}|-R) + \frac{3q}{4\pi R^3}\vec{x}\Theta(R-|\vec{x}|), \quad \vec{B}=0. \tag{78}$$

Setzen wir nun unseren Lösungsansatz $\vec{y}=0$ mit den Feldern (78) in die Bewegungsgleichung (75) ein, sehen wir, daß wir tatsächlich die korrekte Antwort erhalten, nämlich verschwinden der Kraft auf unser Punktteilchen, so daß ein freies Punktteilchen keine Beschleunigung durch sein eigenes elektromagnetisches Feld erfährt. Wir können nun auch $R \to 0$ nehmen, was natürlich im jetzigen Falle trivial ist.

4.3 Beschleunigte Bewegung

Nachdem wir nun den scheinbar trivialen Fall einer freien Punktladung durch unser Regularisierungsverfahren gelöst haben, wenden wir uns der Frage zu, was bei beschleunigten Ladungen geschieht.

Um die Rechnung einfach zu halten, betrachten wir jetzt eine Punktladung in einem externen Oszillatorpotential und nehmen an, wir könnten in der nichtrelativistischen Näherung für die Bewegung des Teilchens arbeiten. Dann geht freilich die Lagrangefunktion in die übliche Lagrangefunktion für nichtrelativistische Teilchen über

$$L_0 = -mc^2(1-\beta^2) \approx -mc^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + O(\beta^4) = -mc^2 + L_0'. \tag{79}$$

Es ist klar, daß wir den konstanten „Ruheenergieanteil” $-mc^2$ weglassen können.

Wir fügen ein harmonisches Oszillatorpotential hinzu, wobei wir davon ausgehen, daß dieses nur in 3-Richtung wirkt:

$$L_{\text{ext}} = -\omega_0^2 y_3^2. \tag{80}$$

Wir betrachten weiter die Anfangsbedingung

$$\vec{y}(0) = y_{30}\vec{e}_3, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{y}(0)}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{81}$$

d.h. das Teilchen startet in Ruhe aus einer in 3-Richtung ausgelenkten Position.

Qualitativ wissen wir nun folgendes: Nehmen wir zunächst an, das Teilchen sei ungeladen. Dann oszilliert es harmonisch mit der Oszillatorfrequenz ω_0 und der Amplitude y_{30}. Nun ist es aber geladen, und das bewirkt die Existenz seines elektromagnetischen Eigenfeldes. In erster Näherung vernachlässigen wir nun die Wechselwirkung mit diesem Eigenfeld und nehmen weiterhin an, das Teilchen schwinge harmonisch in dem externen Oszillatorpotential. Diese Bewegung können wir nun in die Gleichung (70) für die retardierten Potentiale einsetzen und erhalten ein elektromagnetisches Strahlungsfeld, das wir uns qualitativ durch das Hertzsche Dipolfeld genähert vorstellen dürfen. Nun führen aber elektromagnetische Wellen Energie mit sich. Da unsere Lagrangedichte nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Gesamtenergie erhalten. Die Energiebilanz wird aber durch unsere Näherung verletzt, denn die Bewegungsenergie des Oszillators muß ja eigentlich von dem elektromagnetischen Strahlungsfeld „fortgetragen" werden, also dem Oszillator verloren gehen. Das bedeutet aber wiederum, daß in diesem Fall die Bewegung der Ladung in diesem Falle durch ihr eigenes Strahlungsfeld beeinflußt werden muß, was wiederum zu einer Änderung des elektromagnetischen Feldes führt etc.

Die klassische Idee ist es nun, die Energieerhaltung explizit wieder herzustellen, indem man der Leistungsabstrahlung Rechnung trägt. Dies findet man in dem Bereits erwähnten Lehrbuch von Sommerfeld [Som01] mustergültig vorgeführt. Eine etwas detailliertere Analyse mit Hilfe der Lorentzkraft findet sich in dem ansonsten nur noch historisch interessanten Lehrbuch zur Quantenelektrodynamik [Hei54]. Diese Gleichungen haben jedoch die unangenehme Eigenart, zu Gleichungen zu führen, die höchst unphysikalische Eigenschaften besitzen. Sie führen z.B. zu sog. „Run-away solutions", d.h. schon im Falle eines freien Teilchens neben der oben hergeleiteten korrekten Lösung zu solchen, die zu einer spontanen Beschleunigung des Teilchens führen. In der og. finden sich auch Lösungsansätze zu diesem Problem, die freilich im klassischen Rahmen an ihre Grenzen stoßen.

Danksagung

Für die Korrektur einer argen Fehlinterpretation der Maxwell-Gleichungen in einer früheren Fassung dieses Manuskripts möchte ich mich bei Michael Lenz von der TU Dresden bedanken.

Literatur

[Hei54] W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford at the Clarendon Press, 3rd edn. (1954).

[Kug97] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer-Verlag, Heidelberg (1997).

[Som92] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik II, Mechanik der deformierbaren Medien*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M. (1992).

[Som01] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik III, Elektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M. (2001).