Differentialgeometrie und Physik

Hendrik van Hees

7. April 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser FAQ werden die grundlegenden geometrischen Methoden der modernen Physik ausführlich dargestellt. Dabei beschränken wir uns (bis auf einen kurzen Ausflug in die Theorie klassischer Eichfelder) auf die grundlegenden Tatsachen, die der Beschreibung von Raum und Zeit in der klassischen relativistischen Physik zugrundeliegen. Dies bedeutet im wesentlichen, daß wir uns mit differenzierbaren Mannigfaltigkeiten endlicher Dimensionszahl zu beschäftigen haben.

Beim Leser wird die Kenntnis der linearen Algebra und der Analysis in mehreren reellen Veränderlichen vorausgesetzt, wie sie in einer Standardvorlesung im Grundstudium vermittelt wird.

Es sei noch kurz die Motivation dieser Betrachtungen beleuchtet.

Alle physikalischen Theorien beginnen mit der Beschreibung der Verhältnisse in Raum und Zeit. Es ist Einsteins größtes Verdienst, den Physikern diese eigentlich selbstverständliche Erkenntnis deutlich ins Bewußtsein zu rufen, und es ist diese Tatsache, daß heute die Physik mit mathematischen Konstrukten von größter ästhetischer Schönheit bevölkert ist. Man könnte sogar sagen, daß die theoretische Physik zu einem guten Teil angewandte Differentialgeometrie darstellt.

Wir gehen noch kurz auf die Unterschiede ein, die einer spezifisch für Physiker geschriebenen Darstellung des Gegenstandes und einer rein mathematisch motivierten zugrundeliegen. Die Mathematik stellt sich uns heute zum größten Teil als Strukturmathematik dar. Das bedeutet, daß der wesentliche mathematische Gehalt in dem Bestreben besteht, Strukturen mit minimalen Voraussetzungen also von größter Allgemeinheit zu studieren. Ein Mathematiker wird daher unser Gebiet mit einer dezidierten Analyse der lokalen Strukturen der allgemeinst möglichen topologischen Räume beginnen und erst nach Ausschöpfung der möglichst strukturarmen Voraussetzungen zu weiteren Annahmen übergehen.

Für den Physiker kommt es vielmehr darauf an, aus diesem Sammelbecken der allgemeinstmöglichen Strukturen genau diejenigen herauszufischen, die er für seine praktische Arbeit, nämlich die Beschreibung von experimentellen Vorgängen im Labor, benötigt. Ist erst einmal diese besondere Struktur gefunden, kann er sich der vom Mathematiker entwickelten Erkenntnisse bedienen um Schlußfolgerungen für die weitere Arbeit zu ziehen.

Nun ist aber auch bei Beschränkung der Mathematik auf die für die Physik notwendigen Teilbereiche, nämlich die oben genannten endlichdimensionalen C^∞-Mannigfaltigkeiten der Gegenstand keine ganz leichte Kost, zumal die meisten Lehrbücher der theoretischen Physik in ihren mathematischen Methoden, und das fängt allein schon bei der Notation an, sich auch zum Ausgang des 20. Jahrhunderts immer noch den Meistern des 19. Jh. verpflichtet fühlen. Eine rühmliche Ausnahme machen da nur die Gravitationsphysiker, die längst entdeckt haben, daß die moderne Betrachtungsweise das physikalische Denken durchaus erleichtert indem in einer eleganten Schreibweise bereits die wesentlichen Ideen, die der Beschreibung der Theorie zugrundeliegen, offen zutage tritt. Wichtig dabei ist nicht zuletzt, daß schon die Begriffsbildung der Mannigfaltigkeit darauf abzielt, von den lokalen Koordinaten abzulenken, die in der für Physiker üblichen Notation im Vordergrund stehen. Auf der anderen Seite gehört es aber gerade zu den Grundprinzipien der modernen Theoriebildung, die Symmetrien unter bestimmten Koordinatentransformationen als Grundlage voranzustellen.

Gleichwohl ist der an Indexpracht unübertreffliche Riccikalkül ein unverzichtbares Hilfsmittel, wenn man physikalische Texte überhaupt lesen können will. Außerdem wird auch deutlich, was in einer konkreten Situation, wenn also der theoretische Physiker sich tatsächlich einmal der Aufgabe gegenübergestellt sieht, tatsächlich Zahlen ausrechnen zu müssen, wirklich zu tun ist.

Es sei daher zur Motivation der vielleicht für manchen etwas spröde erscheinenden mathematischen Konstrukte eine kurze Zusammenfassung für die konkrete Bedeutung der Differentialgeometrie in einigen Teildisziplinen der Physik gegeben.

Dies beginnt schon bei der Begegnung mit der allereinfachsten Theorie, die wir in den Schulen und Universitäten zuerst beigebracht bekommen, nämlich der Newtonschen Mechanik. Da ist zuallererst von der Struktur des Raumes und der Zeit die Rede. Meist werden ohne Umschweife gleich Maßstäbe und Uhren eingeführt, so daß die uns anschaulich so vertraut erscheinenden Selbstverständlichkeiten sofort in einen vierdimensionalen reellen Raum abgebildet werden, und dann rechnen wir eben munter in diesem $\mathbb{R}^4$-Vektorraum ohne weiter Kontakt mit Raum und Zeit, wie wir sie täglich erleben, aufzunehmen. In der Sprache der Mannigfaltigkeiten kann uns das nicht passieren, weil da klar zum Ausdruck kommt, daß es sich hierbei um lokale Karten der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit handelt. Schon diese Sprachregelung trägt ungeheuer zur Präzision unserer Auffassung von Raum und Zeit bei, zeigt sie doch, daß der naive Gebrauch von reellen Zahlräumen bereits einiges an Struktur präjudiziert. Wir werden die allgemeinen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten im ersten Kapitel behandeln und bemerken, daß diese in der Tat viel zu allgemein sind als daß sie etwa Newtons Raum-Zeit beschreiben würden. Vielmehr brauchen wir noch einige Zusatzstrukturen um schließlich bei der bekannten euklidischen Form des Raumes und des davon vollends entkoppelten gerichteten Zeitstrahls zu gelangen.

Die weitere Betrachtung der Punktmechanik, die wir nach der Entwicklung der Newtonschen Raum-Zeit vollends im neuen Gewand präsentieren werden, zeigt, daß auch dies nicht unbedingt die vorteilhafteste Beschreibung darstellt, können wir doch von Newton sogleich ins 19. Jh. zu Hamilton springen und die Newtonsche Raum-Zeit scheinbar vollkommen verlassend zur Beschreibung im sog. "Phasenraum" übergehen. Auch dies ist wieder, wie könnte es anders sein, eine spezielle Mannigfaltigkeit, nämlich ein Kotangentialfaserbündel mit symplektischer Struktur. Diese Erkenntnis gestattet dann so wichtige Untersuchungen wie den Unterschied zwischen integrablen und nichtintegrablen dynamischen Systemen, und dies erregt seit einigen Jahren sogar schon wieder die interessierte Öffentlichkeit in Form der sog. "Chaostheorie", so daß die klassische Mechanik, dieses Urgestein aller physikalischen Forschung, wieder in den Interessenbereich moderner Grundlagenforschung gerückt ist.

Die Newtonsche Mechanik verlassend wenden wir uns sodann der relativistischen Physik zu, die uns jetzt nicht weiter erschrecken kann, haben wir doch jetzt einige Übung im Umgang mit Mannigfaltigkeiten und den verschiedensten Zusatzstrukturen, die wir je nach Bedarf modifizieren um der Natur ein Stück näherzurücken. Das klassische Anwendungsfeld ist die Maxwellsche Elektrodynamik, die wir in einiger Vollständigkeit auf zwei Seiten aufschreiben können, wenn wir uns erst einmal auf die differentialgeometrische Sprache einlassen. Die Elektrodynamik verliert viel von ihrem bei Studenten berüchtigten Schrecken, wenn sie in harmlos aussehenden Gleichungen daherkommt, und die Integralsätze erst einmal in allgemeinster Form zu dem einen Stokesschen Satz zusammengefaßt sind, der den Kopf für das wesentliche so schön frei hält. Auch das Poincarésche Lemma faßt all die Integrabilitätsbedingungen zusammen, was dann auch prompt aus dem Sammelsurium der Potentiale in klassischen Lehrbüchern zu einer wirklich einfachen Beschreibung durch ein einziges Potential führt.

Da wir nun schon einmal mitten bei Faraday und Maxwell gelandet sind, konnte ich mich nicht mehr zurückhalten, auch noch die allgemeinen Eichtheorien, die differentialgeometrisch Ergänzungen der Struktur der Tangentialbündel zum Faserbündel bedeuten. Das ist aber insofern eine Abschweifung als Liegruppen und -algebren benötigt werden, die wir hier lediglich in ihrer konkreten Form als Untergruppen der $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$[1] und nicht in ihrer vollen Abstraktheit verwenden wollen.

[1] $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ steht für "General Linear Group in $\mathbb{R}^n$ und bezeichnet die Gruppe, die von allen invertierbaren quadratischen $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen.

Es ist klar, daß in einer Darstellung des zur Diskussion stehenden Themenbereichs als krönender Abschluß auch die Theorie nicht fehlen darf, die uns Physiker mit all diesen Schönheiten konfrontiert hat, nämlich Einsteins allgemeine Relativitätstheorie.

Aus Platzgründen konnte ich leider nicht auf alle in der Physik auftretenden Strukturen eingehen. So fehlen leider (fast) vollständig Liegruppen und -algebren, die eine Klassifikation der betrachteten Strukturen nach ihrer Symmetrie ermöglichen. Dieses von Felix Klein in seinem Erlanger Programm aufgestellte "Forschungsprogramm", nämlich die Konstruktion geometrischer Theorien aus Symmetrieforderungen, ist Standardverfahren der die Bändigung des Zoos der Elementarteilchen ermöglichenden Quantenfeldtheorie, und deren Nachfolgern, deren physikalischen Gehalt wir aber noch lange nicht vollständig überblicken.

Zum Schluß sei betont, daß, obschon dieser Text für einen FAQ-Artikel schon ziemlich lang ist, die Darstellung doch relativ knapp ist. Andererseits habe ich aber auch versucht, durch kleine Einschübe das Verständnis zu erleichtern. Wer nur wissen will, was Sache ist, braucht nur die Definitionen und Sätze zu lesen. Allerdings sollte er auch die eingestreuten Aufforderungen zur aktiven Teilnahme an den Ergüssen des Autors Folge leisten. Es handelt sich zwar stets um Trivialitäten, die lediglich kurz niedergeschrieben zu werden brauchen, jedoch regen solche Trivialitäten zum Denken an ohne das Gehirn unnötig zu überfordern, und das wiederum trainiert den aktiven lockeren Umgang mit den mathematischen Konstrukten, was dem Physiker stets nützlich ist!

2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

2.1 Grundlegende Definitionen

In diesem Abschnitt entwickeln wir den allgemeinen Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Zunächst rekapitulieren wir die allernötigsten Grundbegriffe der **mengentheoretischen Topologie**.

Definition 1 (Topologie). *Sei M eine beliebige Menge, deren Elemente wir als Punkte bezeichnen. Erfülle nun $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}M$ die folgenden Eigenschaften*

(T1) $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $M \in \mathcal{O}$.

(T2) Ist I eine beliebige Indexmenge und $O_k \in \mathcal{O}$ für alle $k \in I$, so ist auch $\bigcup_{k\in I} O_k \in \mathcal{O}$.

(T3) Ist I eine endliche Indexmenge und $O_k \in \mathcal{O}$, so ist auch $\bigcap_{k\in I} O_k \in \mathcal{O}$.

*Dann heißt $\mathcal{O}$ eine **Topologie** von M.*

*Eine Teilmenge von M heißt genau dann **offen**, wenn sie in $\mathcal{O}$ enthalten ist. Jede Teilmenge A von M, die als Komplement einer offenen Menge O von M geschrieben werden kann (also $A = M \setminus O$), heißt **abgeschlossen**.*

*Ist $p \in M$. Eine Teilmenge U heißt **Umgebung** von p, wenn $p \in U$ und eine offene Teilmenge O von U ebenfalls p enthält. Die Menge aller Umgebungen von p bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(p)$.*

*Ein topologischer Raum heißt **Hausdorffraum**, wenn sich zwei Punkte stets durch Umgebungen trennen lassen, d.h.*

(H) Zu zwei Punkten $p_1 \neq p_2 \in M$, existieren stets Umgebungen $U_1 \in \mathcal{U}(p_1)$ und $U_2 \in \mathcal{U}(p_2)$, so daß $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Die geometrische Sprache der obigen Definitionen legt es nahe, daß ihr als heuristisches Modell der Anschauungsraum zugrundeliegt. In der Tat ist es eine einfache Übung für den Leser zu prüfen, daß der euklidische Punktraum eine Topologie erhält, indem man eine Menge O als offen definiert, wenn es zu jedem Punkt $P \in O$ eine Kugel um O gibt, die ganz in O enthalten ist. Es ist klar, daß auf diese Weise auch einem beliebigen metrischen Vektorraum eine Hausdorfftopologie aufgeprägt werden kann.

Topologien spielen deshalb eine so große Rolle in der höheren Analysis, weil sie den Begriff der Stetigkeit von Funktionen aus der reellen oder komplexen Analysis auf wesentlich allgemeinere Mengen zu verallgemeinern gestatten. Dies wird durch den soeben definierten Umgebungsbegriff wie folgt ermöglicht:

Wir bemerken sogleich, daß für eine Untermenge $M' \subseteq M$ dadurch eine Topologie $\mathcal{O}'$ definiert werden kann, daß man O' als offen definiert, wenn es eine offene Menge O in der ursprünglichen Topologie $\mathcal{O}$ gibt, so daß $O' = O \cap M'$. Diese Topologie bezeichnen wir als die von $\mathcal{O}$ auf der Untermenge M' **induzierte Topologie**.

Definition 2 (Stetigkeit von Abbildungen topologischer Räume). *Seien M_1 und M_2 topologische Räume mit den Topologien $\mathcal{O}_1$ bzw. $\mathcal{O}_2$. Dann heißt $f : M_1 \rightarrow M_2$ **stetig** in $p_1 \in M_1$, wenn es zu jedem $U_2 \in \mathcal{U}[f(p_1)]$ eine Umgebung $U_1 \in \mathcal{U}(p_1)$ gibt, so daß $f(U_1) \subseteq U_2$ ist.*

Es ist klar, daß diese Definition für reelle oder komplexe Funktionen mit dem gewöhnlichen Stetigkeitsbegriff übereinstimmt, wenn die übliche durch den Betrag bzw. eine Metrik induzierte Topologie benutzt wird.

Nun ist es nicht schwer zu zeigen, daß sich zwei topologische Räume zumindest lokal identifizieren lassen, wenn man eine stetige umkehrbare Abbildung zwischen offenen Mengen derselben angeben kann:

Definition 3. *Homöomorphismus Seien M_1 und M_2 zwei topologische Räume, $p_1 \in M$. Existiert nun eine Umgebung $U_1 \in \mathcal{U}(p_1)$ und eine stetige Abbildung $f : U_1 \rightarrow M_2$ und ist die Koeinschränkung $\tilde{f} : U_1 \rightarrow f(U_1)$; $p_1 \mapsto f(p_1)$ bijektiv und die Umkehrabbildung $\tilde{f}^{-1} : f(U_1) \rightarrow U_1$ ebenfalls stetig. Dann heißt f ein in p_1 **lokaler Homöomorphismus**.*

*Zwei topologische Räume heißen **homöomorph**, wenn es einen globalen Homöomorphismus $f : M_1 \rightarrow M_2$ gibt.*

Jetzt nutzen wir diese Begriffe aus, um Räume zu definieren, die lokal aussehen wie der $\mathbb{R}^n$, d.h. für die es um jeden Punkt einen lokalen Homöomorphismus auf eine offene Umgebung in $\mathbb{R}^n$ gibt. Es ist dann nämlich das Tor geöffnet um alle Begriffe der reellen Analysis auf diese topologischen Räume anzuwenden, insbesondere können wir alsbald differenzieren und auf diese Weise jede Menge Zusatzstrukturen etablieren.

Definition 4 (Karten und Atlanten). *Sei M ein topologischer Hausdorffraum. Gibt es nun um jeden Punkt p einen lokalen Homöomorphismus $\kappa : U_\kappa \rightarrow V_\kappa \subset \mathbb{R}^n$, wobei $U_\kappa \in \mathcal{U}(p)$, so heißt κ **Karte** um p und U_κ das dazugehörige Kartengebiet.*

Sind nun κ_1 und κ_2 Karten um p_1 und p_2, so heißen diese ***verträglich****, wenn entweder die Bilder der Kartengebiete V_1 und V_2 leeren Schnitt haben, oder wenn die Abbildung*

$$\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1} : V_1 \cap V_2 \to V_1 \cap V_2 \tag{1}$$

ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

Dabei heißt eine Abbildung $\delta : V \to V$ mit offenem $V \subseteq \mathbb{R}^n$ C^∞-Diffeomorphismus, wenn sie bijektiv, beliebig oft differenzierbar ist und die Umkehrfunktion auch genau diese Eigenschaften aufweist.

Eine Familie von Paaren $\{(\kappa_j, U_j)\}_{j\in I}$ (wobei j eine geeignete Indexmenge I durchläuft) aus Karten und Kartengebieten heißt ***Atlas****, wenn alle Karten untereinander verträglich sind und die U_j den ganzen topologischen Raum überdecken: $\bigcup_j U_j = M$ ist.*

Zwei Atlanten heißen ***verträglich****, wenn ihre Vereinigung wieder einen Atlas ergibt.*

Wir bemerken sofort, daß die Verträglichkeit von Atlanten eine Äquivalenzrelation ist, d.h. bezeichnen wir mit $\sim$ die Verträglichkeit von Atlanten, so gilt: $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \mathcal{A}_2 \sim \mathcal{A}_1$ und aus $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_2 \sim \mathcal{A}_3$ folgt stets auch $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_3$.

Definition 5 (Differenzierbare Mannigfaltigkeiten). *Ein topologischer Hausdorffraum, auf dem sich eine Äquivalenzklasse verträglicher Atlanten definieren läßt, heißt* ***differenzierbare Mannigfaltigkeit****.*

Wir werden der Kürze halber kurz von Mannigfaltigkeit sprechen, wenn wir differenzierbare Mannigfaltigkeit meinen.

Nach all diesen abstrakten Ausführungen schauen wir ein bißchen voraus und diskutieren die Implikationen, die sich aus diesen Betrachtungen für die Physik ergeben. Wie schon in der Einleitung ausführlich dargelegt, ist die erste Anwendung dieser mathematischen Konstruktionen die Aufstellung eines Modells zur Beschreibung der Raum-Zeit. In diesem Fall scheint es uns durch die Anschauung, also unser räumliches und zeitliches Empfinden, ziemlich klar zu sein, was wir darunter verstehen wollen. Ein Blick in die europäische Geistesgeschichte würde uns nun alsbald eines besseren belehren, ist doch das Problem der genauen Definition, was Raum und Zeit eigentlich ist, von der Antike an in der philosophischen Literatur immer wieder diskutiert worden. Wir wollen uns hier auf den Standpunkt des Physikers zurückziehen und die Raum-Zeit durch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit definiert ansehen, der geeignete Zusatzstrukturen aufzuprägen sind, damit wir Meßvorschriften für Raum und Zeit definieren können. Es wird hier übrigens deutlich, daß Physik keinesfalls eine im naiven Sinne empirische Wissenschaft ist, sondern Theorie und Experiment einander wechselseitig bedingen. Es ist nämlich schlichtweg unmöglich, überhaupt auch nur Meßvorschriften zu definieren, die eine quantitative Beschreibung ermöglichen, ohne ein mathematisches Modell in der Hand zu haben, das uns die Definition der zu messenden Größen ermöglicht. Es ist aber auch klar, daß die dabei verwendeten mathematischen Strukturen damit selbst dem physikalischen Test unterzogen werden müssen, d.h. die durch mathematische Sätze gegebenen Implikationen werden zu Sätzen über physikalische Beobachtungsgegenstände, so daß die Aussage, daß Raum und Zeit durch die eine oder andere Mannigfaltigkeitsstruktur beschrieben wird, sich als konsistent mit den Resultaten von Messungen zu erweisen hat, die selber durch sie definiert werden. Zu diesem Problemkomplex sei dem Leser die sorgfältige Lektüre des Anfangskapitels von [Ein90] empfohlen.

2.2 Abbildungen und Ableitungen

Nunmehr haben wir jedenfalls Mannigfaltigkeiten vollständig definiert. Haben nun Mathematiker eine Struktur erst einmal festgelegt, ist sie auch schon wieder recht langweilig geworden und um wieder ein bißchen mehr Spannung in die Sache zu bringen, schreiten sie alsbald zur Untersuchung der Abbildungen von Strukturen und unterwerfen diese besonderen Eigenschaften, die zu denen der definierten Struktur passen. Unsere Differenzierbarkeitsforderung an die Karten zwingt uns geradezu die Definition differenzierbarer Abbildungen auf:

Definition 6 (Differenzierbarkeit von Abbildungen). *Seien M_1 und M_2 differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $\kappa_1 : M_1 \to V_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ und $\kappa_2 : M_2 \to V_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ lokale Karten um $p_1 \in M_1$ bzw. $p_2 = f(p_1) \in M_2$. Dann heißt f **differenzierbar** in p_1 wenn die Abbildung*

$$\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} : V_1 \to V_2 : \ (q^1, q^2, \ldots, q^{n_1}) \mapsto (p^1, p^2, \ldots, p^{n_2}) \tag{2}$$

differenzierbar in $\kappa_1(p_1)$ ist.

Hierbei sei betont, daß die $(q^k)_{k=1,\ldots,n_1}$ das n_1-Tupel $\kappa_1(p_1)$ bezeichnen. Daß wir die Indizes oben hingeschrieben haben wird sogleich noch näher begründet werden und sich als äußerst nützlich erweisen. Wir bezeichnen die q^k auch als **lokale Koordinaten** von p_1 bzgl. der Karte κ_1.

Es ist übrigens sofort klar, daß die Wahl der Karten aus einem beliebigen Atlas dabei keine Rolle spielt, denn aufgrund der Verträglichkeit der Karten ist eine Funktion f genau dann bzgl. zwei Karten κ_1' und κ_2' differenzierbar, wenn dies für dazu verträgliche Karten κ_1 bzw. κ_2 der Fall ist.

2.3 Tangentialräume

Als nächstes wollen wir die Differenzierbarkeitsstruktur der Mannigfaltigkeit nutzen indem wir Tangentenvektoren definieren. Die hier gegebene Definition ist nur eine von vielen Möglichkeiten, die für Physiker allerdings besonders anschaulich ist und direkt der Definition der Geschwindigkeit eines Teilchens entlang einer Bahn im $\mathbb{R}^3$ abgeschaut ist. Jedoch hier wieder die allgemeine:

Definition 7 (Tangentialvektor an eine gegebene Kurve). *Wir setzen in der vorigen Definition $M_1 = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ und $M_2 = M$, wobei M eine beliebige n-dimensionale Mannigfaltigkeit bezeichnet. Sei dann $s : [t_1, t_2] \to M$ mit $s(\tau) = p$, wobei $\tau \in (t_1, t_2)$, und s stetig differenzierbar in τ. Dann heißt s **Kurve** um $p \in M$.*

*Weiter definieren wir zwei Kurven s_1 und s_2 als **tangentialäquivalent** in p, wenn für eine beliebige Karte κ um p gilt*

$$s_1 \sim_p s_2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\kappa \circ s_1(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\kappa \circ s_2(\tau') \ \mathit{mit} \ s_1(\tau) = s_2(\tau') = p. \tag{3}$$

*Die Äquivalenzklasse $[s]_p$ bzgl. dieser Äquivalenzrelation heißt **Tangentialvektor** in p an die Kurve s.*

*Die Menge aller Tangentialvektoren in p ist heißt **Tangentialraum** in p und wird mit T_pM bezeichnet.*

Die Menge

$$TM = \{\{p\} \times T_pM | p \in M\} \tag{4}$$

heißt Tangentialbündel im M.

Überhaupt bezeichnen wir an jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit realisierte zusätzliche Strukturen als Faserbündel. In diesem Falle haben wir gesehen, daß das Tangentialbündel an jedem Punkt des Raumes sozusagen den dazugehörigen Tangentialraum anheftet.

Vergegenwärtigen wir uns die Mannigfaltigkeit als Fläche im Anschauungsraum, was dem Leser ohnehin wärmstens empfohlen sei, ist uns sofort klar, daß wir T_pM mit Hilfe der Karten mit der Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^n$ versehen können. Dies formulieren wir ordentlich in der folgenden Form

Satz 1 (Vektorraumstruktur von T_pM). *Sei κ eine Karte um $p \in M$. Dann definieren wir die Abbildung*

$$\mathrm{d}\kappa : T_pM \to \mathbb{R}^n : \ \mathrm{d}\kappa([s]_p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\kappa \circ s(\tau), \tag{5}$$

wobei wir $s(\tau) = p$ angenommen haben. Diese Abbildung ist wohldefiniert auf T_pM, d.h. unabhängig von der Wahl des Repräsentanten s und bijektiv.

Beweis: Daß $\mathrm{d}\kappa$ wohldefiniert und injektiv auf T_p ist, d.h. unabhängig von der Wahl des Repräsentanten s von $[s]_p \in T_pM$ ist und $\mathrm{d}\kappa([s_1]_p) = \mathrm{d}\kappa([s_2]_p)$ allemal $[s_1]_p = [s_2]_p$ nach sich zieht, folgt unmittelbar aus der Definition der Äquivalenzklassen $[s]_p$.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß $\mathrm{d}\kappa$ surjektiv ist, d.h. wir müssen zu einem gegebenen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ einen Tangentialvektor $[s]_p$ aus T_pM angeben, so daß $\mathrm{d}\kappa([s]_p) = v$ ist. Da $\kappa(U_\kappa)$ offen ist und p enthält, existiert $\epsilon > 0$ derart, daß die Abbildung

$$s_v : [-\epsilon, \epsilon] \to M : \ s_v(t) = \kappa^{-1}(q + tv) \text{ mit } s_v(0) = p \tag{6}$$

wohldefiniert und differenzierbar ist. Nach Definition der Abbildung $\mathrm{d}\kappa$ gilt

$$\mathrm{d}\kappa([s_v]_p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\kappa \circ s_v(t)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q + tv)_{t=0} = v. \tag{7}$$

Also ist $\mathrm{d}\kappa$ surjektiv. Nach der obigen Bemerkung, daß diese Abbildung auch injektiv ist, ist sie folglich bijektiv.

Jetzt definieren wir die Vektorraumstruktur auf T_pM einfach kurzerhand dadurch, daß wir $\mathrm{d}\kappa$ zum Vektorraumisomorphismus erklären:

$$\begin{aligned} &\forall [s_1]_p, [s_2]_p \in T_pM : \ [s_1]_p + [s_2]_p := \mathrm{d}\kappa^{-1}[\mathrm{d}\kappa([s_1]_p) + \mathrm{d}\kappa([s_2]_p)] \\ &\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ [s]_p \in T_pM : \ \alpha[s]_p := \mathrm{d}\kappa^{-1}[\alpha \mathrm{d}\kappa([s]_p)]. \end{aligned} \tag{8}$$

Daß diese Definition sinnvoll ist, zeigt sich unmittelbar daraus, daß die die Tangentialvektoren definierende Äquivalenzklassenbildung unabhängig von der Wahl der Karte um p ist. **Q.E.D.**

Definition 8 (Koordinatenbasis). *Sei $\kappa : M_1 \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte und $p \in \kappa^{-1}(V)$. Dann definieren wir die Kurven*

$$v_\mu : (x^\mu - \epsilon, x^\mu + \epsilon) \to M, \ v_\mu(t) = \kappa^{-1}(x^1, \ldots, x^{\mu-1}, t, x^\mu, \ldots, x^n) \ \textit{mit} \ (x^\nu) = \kappa(p), \tag{9}$$

wo ϵ hinreichend klein gewählt ist, so daß v_μ wohldefiniert ist. Dann bezeichnen wir die Tangentialvektoren

$$\partial_\mu = [v_\mu]_p \tag{10}$$

als die zu der Karte κ gehörige Koordinatenbasis.

Der Leser mache sich zur Übung klar, daß aufgrund der Karteneigenschaften $\{\partial_\mu\}_{\mu \in \{1,\ldots,n\}}$ eine Basis des Tangentialraums $T_p M$ bilden.

2.4 Kotangentialräume

Nun haben wir in p den Tangentialraum $T_p M$ konstruiert und mit dem $\mathbb{R}^n$-Vektorraum identifiziert. Jetzt können wir alle Kenntnisse aus der linearen Algebra auf $T_p M$ anwenden. Für die Physik erweisen sich nun die Linear- und Multilinearformen als besonders nützlich, weil sie es gestatten, invariante, d.h. vom Koordinatensystem unabhängige Größen zu definieren, und allein diese sind es, die objektive Realität in der Raum-Zeit beanspruchen dürfen.

Satz 2 (Dualraum). *Die Menge der Linearformen $T_p^* M$ auf $T_p M$, d.h. der linearen Abbildungen $T : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ bildet mit der punktweisen Addition und Multiplikation mit einer reellen Zahl in natürlicher Weise einen zum $\mathbb{R}^n$ isomorphen Vektorraum, den* ***Dualraum*** *von $T_p M$.*

Beweis: Zum Beweis der Vektorraumeigenschaften muß man nur die Definition von punktweiser Addition und Multiplikation mit einer reellen Zahl hinschreiben und die Vektorraumaxiome überprüfen. Diese einfache Arbeit sei dem Leser zur Übung empfohlen.

Daß der Dualraum isomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist, folgt nun indem wir zeigen, daß es eine Familie von n linear unabhängigen Bilinearformen in $T_p^* M$ gibt. Dazu bedienen wir uns der oben definierten Koordinatenbasis bzgl. einer beliebigen Karte κ um p, die wir mit $\{\partial_\mu\}_{\mu=1,\ldots,n}$ bezeichnet haben.

Es ist nun klar, daß es aufgrund der Linearität der Linearform genügt, sie auf einer beliebigen Basis von $T_p M$ zu definieren. Wir wählen dazu die Koordinatenbasis und definieren $\mathrm{d}q^\mu$ für $\mu = 1, \ldots, n$ als die Linearform, die folgendermaßen auf die Koordinatenbasisvektoren wirkt:

$$\mathrm{d}q^\mu \partial_\nu = \delta^\mu_\nu := \begin{cases} 0 & \text{falls } \nu \neq \mu \\ 1 & \text{falls } \nu = \mu \end{cases}. \tag{11}$$

Sei nun T eine beliebige Linearform auf $T_p M$. Dann definieren wir die Zahlen $T_\mu = T \partial_\mu$, und aus der Definition der $\mathrm{d}q^\mu$ folgt sofort, daß $T = dq^\mu T_\mu$ ist, d.h. jede Linearform läßt sich durch Linearkombination aus dem $\mathrm{d}q^\mu$ aufbauen. Nehmen wir nun an, daß T_μ so gewählt sei, daß $T = T_\mu \mathrm{d}q^\mu = 0$ ist, so folgt unmittelbar $T_\mu = T \partial_\mu = 0$ für alle $\mu = 1, \ldots, n$, daß die $\mathrm{d}q^\mu$ linear unabhängig sind. Folglich bilden die $\mathrm{d}q^\mu$ eine Basis des Dualraums $T_p^* M$ zu $T_p M$, und folglich ist jener genau wie dieser isomorph zum $\mathbb{R}^n$. **Q.E.D.**

Wir bemerken noch, daß wir in jedem Punkt p der Mannigfaltigkeit den Dualraum zum Tangentialraum auf diese Art konstruieren können und folglich auch sogleich das entsprechende **Kotangentialbündel** $T^* M$ mitkonstruiert haben.

Es gibt nun aber keine universelle Eigenschaft des Dualraums, der die Identifikation mit dem Tangentialraum ermöglichen könnte, d.h. wir finden keinen basisunabhängigen Isomorphismus zwischen $T_p M$ und $T_p^* M$.

Dem Leser fällt es nun bestimmt nicht schwer zu erraten, was sich der Mathematiker als nächstes ausdenkt. Als hätten wir nämlich noch nicht genug definiert, versuchen wir gleich noch einen neuen Begriff einzuführen indem wir dieselbe Konstruktion, die zur Bildung des zum Tangentialraum dualen Raumes geführt hat, einfach nochmals anwenden und den zum Dualraum dualen Raum, kurzerhand Bidual genannt, definieren.

Für den Physiker erweist sich aber diese Konstruktion zum Glück als nicht notwendig, weil wir das Bidual $T_p^{**}M$ koordinatenunabhängig mit dem Tangentialraum identifizieren können. Wir definieren dazu lediglich zu jedem $v \in T_pM$

$$T_p^{**}M \ni \Phi_v : T_p^* \to \mathbb{R} : \; \Phi_v T = Tv. \tag{12}$$

Wir zeigen nun, daß die Abbildung $U : T_pM \to T_p^{**}M$ mit $U(v) = \Phi_v$ ein Isomorphismus ist.

Zunächst folgt aus der Linearität der Linearformen sofort, daß U linear ist, d.h. es gilt für irgendwelche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $v, w \in T_pM$ die Gleichung $\Phi_{\alpha v+\beta w} = \alpha\Phi_v + \beta\Phi_w$.

Als nächstes zeigen wir, daß die Abbildung injektiv ist: In der Tat folgt aus $\Phi_v = \Phi_w$, daß für **jede** Linearform T gilt $Tv = Tw$. Folglich stimmen aber die Komponenten von v und w in einer beliebigen Koordinatenbasis überein: $v^\mu = \mathrm{d}q^\mu v = dq^\mu w = w^\mu$, womit dann aber gezeigt ist, daß $v = w$ und folglich U injektiv ist.

Da injektive lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen auch surjektiv sind, ist der Beweis damit schon fertig. Wir wollen aber zur Einübung der Begriffe die Surjektivität auch noch direkt nachweisen. Dazu sei $\Phi \in T_p^{**}M$. Wir definieren nun mit Hilfe der Koordinatenbasis von T_pM den Tangentialvektor $v = \Phi(dq^\mu)\partial_\mu$. Dann ist aber sofort klar, daß $\Phi = \Phi_v$ ist, denn für alle $T \in T_p^*M$ gilt $\Phi(T) = T_\mu\Phi(\mathrm{d}^\mu) = T_\mu v^\mu = Tv = \Phi_v(T)$, womit U also surjektiv ist.

Vermöge des Isomorphismus U ist aber $T_p^{**}M$ in **koordinatenunabhäniger Weise** mit T_pM identifiziert, und wir werden dies auch hinkünftig stillschweigend tun. Wir können dies dadurch klar machen, daß wir einfach den Isomorphismus U nicht hinschreiben, und $v \in T_pM$ direkt mit dem entsprechenden Element $\Phi_v \in T_p^{**}M$ identifizieren. Dies ergibt die suggestive Schreibweise:

$$Tv = vT. \tag{13}$$

2.5 Tensoren

Als nächstes führen wir Multilinearformen, die wir als **Tensoren** bezeichnen, ein. Nachdem wir den Bidualraum mit dem Tangentialraum selber identifiziert haben, genügt die folgende

Definition 9 (Tensoren). *Eine in jedem Argument lineare Abbildung*

$$T : \underbrace{T_p \times T_p \cdots T_p}_{r\ Faktoren} \times \underbrace{T_p^* \times T_p^* \cdots T_p^*}_{s Faktoren} \to \mathbb{R} \tag{14}$$

*heißt **Tensor** vom Rang* $\binom{s}{r}$ *in* $p \in M$.

Die punktweise definierten Tensoren vom Rang $\binom{s}{r}$ *bilden einen Vektorraum, den wir mit* Π_r^s *bezeichnen.*

Sind S und T Tensoren vom Rang $\binom{q}{p}$ bzw. $\binom{s}{r}$, so bezeichnen wir den Tensor $S \otimes T$ vom Rang $\binom{q+s}{p+r}$, der durch

$$\begin{aligned}(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots w_r, f^1, \ldots, f^q, g^1, \ldots, g^s) = \\ = S(v_1, \ldots, v_p, f^1, \ldots, f^q) T(w_1, \ldots, w_r, g^1, \ldots, g^s)\end{aligned} \tag{15}$$

*definiert ist als **Kroneckerprodukt** der Tensoren S und T. Dabei sind die v, w beliebige Tangentialvektoren aus T_p sowie die f, g beliebige Linearformen aus T_p^*.*

Der Leser sei darauf hingewiesen, daß in dieser Definition wieder einige Lemmata versteckt sind, die ihm kurz niederzuschreiben und zu beweisen (was hier wieder fast dasselbe ist) zur Übung empfohlen sei.

Wir bemerken sofort, daß sich für eine beliebige Koordinatenbasis von T_p und deren Dualbasis von T_p^* der Tensor $T \in \Pi_r^s$ vermöge der **Tensorkomponenten**

$$T_{m_1 \ldots m_r}^{n_1 \ldots n_s} = T(\partial_{m_1}, \ldots, \partial_{m_r}, \mathrm{d}q^{n_1}, \ldots, \mathrm{d}q^{n_s}) \tag{16}$$

durch

$$T = T_{m_1 \ldots m_r}^{n_1 \ldots n_s} \mathrm{d}q^{m_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}q^{m_r} \otimes \partial_{n_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{n_s} \tag{17}$$

schreiben läßt. Dabei haben wir uns wieder der **Einsteinschen Summationskonvention** bedient, wonach über gleiche Indexpaare zu summieren ist, sofern einer von beiden oben und der andere unten steht.

Wir beenden diesen Abschnitt mit der Herleitung der wesentlichen Eigenschaft von Tensoren, nämlich ihrem Verhalten unter Kartenwechsel, also der Transformation von einem Satz lokaler Koordinaten (q^m) zu einem anderen Satz (q'^m) $(m = 1, \ldots, d)$.

Hier und im folgenden vereinbaren wir die folgende abkürzende Konvention: Arbeiten wir in einer bestimmten lokalen Karte um $p \in M$ setzen wir stillschweigend voraus, daß die Tensorkomponenten des Tensors T Funktionen der dazugehörigen lokalen Koordinaten q bzgl. der dazugehörigen Koordinatenbasis bzw. deren Dualbasis sind. Die entsprechenden Komponenten bzgl. der lokalen Koordinaten q' bezeichnen wir mit dem entsprechenden Symbol mit einem Strich, wobei wir die beiden Karten jeweils auf den Schnitt der beiden Kartengebiete eingeschränkt zu denken haben, damit diese Schreibweise überhaupt wohldefiniert ist.

Aus der Definition der Koordinatenbasen bzgl. q bzw. q' und der dazugehörigen Dualbasis ersehen wir sofort, daß sich diese wie folgt transformieren:

$$\partial_l' = \frac{\partial q^m}{\partial q'^l} \partial_m, \ \mathrm{d}q'^k = \frac{\partial q'^k}{\partial q^l} \mathrm{d}q^l \tag{18}$$

Das bedeutet in formaler Matrixschreibweise, daß sich die Koordinatenbasen und die Dualbasen **kontragredient** zueinander mit der Jacobimatrix des durch die Karten induzierten lokalen Diffeomorphismus transformieren.

Im übrigen zeigt dies, daß die in Physikerkreisen übliche laxe Vorstellung von "Differentialen" dq hier einen wohldefinierten Sinn erhält und die naiven Rechenregeln weiterhin angewendet werden dürfen.

Sei nun $T \in \Pi_r^s$ ein beliebiger Tensor in p. Dieser läßt sich bzgl. der Koordinatenbasen und deren Dualbasen eindeutig als Linearkombination der Form (17) mit den durch (16) definierten Komponenten darstellen. Setzt man nun (18) in (17) ein, findet man sofort den

Satz 3 (Transformationsformel). *Die Komponenten eines Tensors vom Rang* $\binom{s}{r}$ *in* $p \in M$ *bzgl. lokaler Koordinaten* q*, die durch eine Karte* κ *gegeben sind, vermöge der* ***Transformationsformel***

$$T'^{l_1 \dots l_s}_{k_1 \dots k_r} = T^{n_1 \dots n_s}_{m_1 \dots m_r} \frac{\partial q^{m_1}}{\partial q'^{k_1}} \cdots \frac{\partial q^{m_r}}{\partial q'^{k_r}} \frac{\partial q'^{l_1}}{\partial q^{n_1}} \cdots \frac{\partial q'^{l_s}}{\partial q^{n_s}}. \tag{19}$$

in die Komponenten bzgl. lokaler Koordinaten q'*, die durch eine zur Karte* κ *verträgliche Karte* κ' *definiert sind.*

Dabei bezeichnen die q *zugleich den durch die Karten induzierten Diffeomorphismus. Der Vollständigkeit halber sei dieser hier noch kurz formal definiert: Seien dazu* U *bzw.* U' *die Kartengebiete der Karten* κ *und* κ'*. Bezeichne ferner* V *bzw.* V' *die entsprechenden Bilder von* U *und* U' *in* $\mathbb{R}^n$*. Dann ist der besagte Diffeomorphismus und seine Umkehrung vermöge*

$$q' : V \to V',\ q' = \kappa' \circ \kappa^{-1} \text{ bzw. } q : V' \to V\ q = \kappa \circ \kappa'^{-1} \tag{20}$$

eindeutig bestimmt.

Um das unterschiedliche Transformationsverhalten der Tensorkomponenten zu bezeichnen, die einfach aus der Tatsache resultieren, daß obere Indizes die den Tangentialvektorkomponenten und die unteren die den Linearformenkomponenten entsprechende Bedeutung besitzen, zu kennzeichnen, nennt man die **unteren Indizes ko- und die oberen kontravariante Tensorindizes**.

3 Alternierende Differentialformen

3.1 Tensorfelder

Bis jetzt haben wir nur Tangentialvektoren, dazu duale Vektoren und Tensoren an einem gegebenen Punkt p der Mannigfaltigkeit betrachtet. Es ist klar, daß wir jetzt auch die Differenzierbarkeitseigenschaften der Mannigfaltigkeiten ausnutzen wollen, sonst hätten wir uns ja der Mühe, eine Differenzierbarkeitsstruktur zu definieren, nicht zu unterziehen brauchen. Dazu müssen wir natürliche interessante Objekte definieren, die sich differenzieren lassen. Die Tensoren, die wir soeben definiert und in einigen ihrer wesentlichen Eigenschaften beschrieben haben, eignen sich dazu noch nicht ganz, denn sie sind nur an einem Punkt definiert. Andererseits sind sie aber an jedem Punkt der Mannigfaltigkeit definierbar, und wir haben vermöge der Karten und der durch sie induzierten Koordinatenbasen bzw. -dualbasen die lokalen Voraussetzungen, die allein ausreichen um differenzieren zu können. Dazu definieren wir nun Tensorfelder wie folgt

Definition 10 (Tensorfelder). *Ein Tensorfeld vom Rang* $\binom{s}{r}$ *ist eine Abbildung, die jedem* $p \in M$ *einen Tensor* $T(p) \in \Pi^s_r(p)$ *zuordnet, so daß die Tensorkomponenten bzgl. einer Karte um* p *beliebig oft stetig differenzierbar sind.*

Wir wollen diese Definition auch für den Fall $r = s = 0$ *ausweiten und unter einem Tensorfeld vom Rang* $\binom{0}{0}$ *eine differenzierbare Abbildung* $f : M \to \mathbb{R}$ *verstehen, wobei* $\mathbb{R}$ *als Mannigfaltigkeit definiert ist, die mit der kanonischen Differenzierbarkeitsstruktur von* $\mathbb{R}$ *ausgestattet ist. Ein Tensorfeld vom Rang* $\binom{0}{0}$ *wird auch als* ***Skalarfeld*** *bezeichnet.*

Wir bemerken dazu zunächst, daß diese Definition wieder kartenunabhängig ist, weil die Definition der Verträglichkeit der Karten untereinander sicherstellt, daß die geforderte Differenzierbarkeit der Tensorkomponenten bzgl. einer Karte um p dieselbe Bedingung auch bzgl. jeder anderen Karte um p sicherstellt. Das ergibt sich sofort aus der Transformationsformel für Tensorkomponenten und die Festlegung, daß die durch die Karten induzierten Transformationen C^∞-Diffeomorphismen sein sollten.

Nunmehr läge es nahe, wild drauflos zu differenzieren und einfach die partiellen Ableitungen der Komponenten zusammen mit den Koordinatenbasen zu benutzen. Das hat den Nachteil, daß diese Prozedur i.a. keine neuen Tensorfelder erzeugt. Das kann der Leser leicht durch direkte Verwendung der Transformationsformel nachvollziehen! Damit besitzt eine solche Operation auch keine sinnvolle Bedeutung für die Strukturen auf der Mannigfaltigkeit.

Betrachten wir jedoch das $\binom{0}{0}$-Tensorfeld $f : M \to \mathbb{R}$. Sei nun $p \in M$. Dann definieren wir mit Hilfe einer Karte κ um p[2]:

$$\mathrm{d}f(p) = \mathrm{d}q^\mu \partial_\mu f(q)|_{q=\kappa(p)}. \tag{21}$$

Wir müssen nun zeigen, daß dies tatsächlich eine von der benutzten Karte unabhängige Definition ist, also $\mathrm{d}f \in \Pi_1^0$ ist.

Bezeichnen wir jetzt $f' = f \circ \kappa'^{-1}$, wobei κ' eine zu κ verträgliche Karte um p ist, so finden wir

$$\mathrm{d}q'^\nu \partial'_\nu f'(q') = \mathrm{d}q^\mu \frac{\partial q'^\nu}{\partial q^\mu} \frac{\partial q^\rho}{\partial q'^\nu} \partial_\rho f(q) = \mathrm{d}q^\mu \partial_\mu f(q) = \mathrm{d}f(p), \tag{22}$$

und das bedeutet, daß tatsächlich $\mathrm{d}f(p)$ unabhängig von der benutzten Karte ist. Diese Betrachtungen gelten nun aber für jeden Punkt der Mannigfaltigkeit, und damit ist also $\mathrm{d}f$ ein Tensorfeld vom Rang $\binom{0}{1}$. Man nennt diese Linearform auch **Differentialform des Skalarfeldes** f. Wir bemerken insbesondere, daß sich vermöge dieser Definition die Schreibweise $\mathrm{d}q^\mu$ für die Koordinatenbasis von $T_p^* M$ unterordnet, denn für das Skalarfeld $f \circ \kappa^{-1}(q) = q^\mu$ gilt offenbar $\mathrm{d}f = \mathrm{d}q^\mu$. Wir ersehen aus diesen Betrachtungen ohne weitere Mühen auch das Transformationsverhalten von Skalarfeldern, nämlich

$$f'(q') = f \circ \kappa'^{-1}(q') = f(p) = f \circ \kappa^{-1}(q) = f(q), \tag{23}$$

d.h. $f'(q')$ besitzt den koordinatenunabhängigen Wert $f(p)$, der in der üblichen abkürzenden Schreibweise mit $f(q)$ bezeichnet wird. Dieses Beispiel zeigt, wie einfach die scheinbar so komplizierten Transformationen durch die koordinatenunabhängige Sichtweise werden.

Ein sehr anschauliches Beispiel eines Skalarfeldes aus der Physik ist das eines **Temperaturfeldes**. Jedem Punkt im Raum (der durch eine Mannigfaltigkeit M beschrieben wird) wird die dort herrschende Temperatur zugeordnet, und die Koordinaten, mit denen wir diesen Punkt bezeichnen, ändert an der dort herrschenden Temperatur gar nicht. Die Koordinaten dienen praktisch nur dazu, den Punkt in einer Karte (man vergegenwärtige sich nochmals die sehr anschauliche Sprechweise der Differentialgeometer) zu kennzeichnen.

3.2 Antisymmetrische Tensorfelder

Diese Rechnung liese sich nun für Tensorfelder beliebiger Stufe wiederholen, nur wird dann schnell klar, daß die Ableitung desselben kein Tensorfeld mehr ist, weil bei einer Koordinatentransformation auch die Jacobimatrizen abgeleitet werden. Andererseits sind die zweiten

[2] wir schreiben wieder kurz $f(q)$ für $f \circ \kappa^{-1}(q)$

partiellen Ableitungen der Diffeomorphismen bei der stets vorausgesetzen stetigen Differenzierbarkeit vertauschbar. Das bedeutet aber, daß für den Fall, daß die Komponenten eines rein kovarianten Tensorfeldes bei Vertauschen zweier beliebiger Indizes das Vorzeichen wechseln, die partiellen Ableitungen wieder ein Tensorfeld bilden.

Diese Idee setzen wir nun folgendermaßen um:

Definition 11 (Antisymmetrische Tensorfelder). *Sei $\omega \in \Pi^0_q$, so daß für jeden Punkt $p \in M$ für beliebige Vektoren $V_1, \ldots V_q \in TM_p$ und alle $j, k \in \{1, \ldots, q\}$ gilt:*

$$\omega(p)(V_1, \ldots, V_j, \ldots, V_k, \ldots, V_q) = -\omega(p)(V_1, \ldots, V_k, \ldots, V_j, \ldots, V_q). \tag{24}$$

Nach (16) ist klar, daß diese sog. **total antisymmetrischen Tensorfelder** oder **q-Formen** Komponenten besitzen, bei denen das Vertauschen zweier beliebiger Indizes stets einen Vorzeichenwechsel bewirkt.

Die total antisymmetrischen Tensorfelder bilden offensichtlich einen Untervektorraum von Π^0_q, den wir mit Ω_q bezeichnen wollen.

Definition 12 (Keilprodukt). *Seien $A \in \Omega_p$ und $B \in \Omega_q$. Dann definieren wir in einer lokalen Koordinatenbasis um $p \in M$ vermöge*

$$(A \wedge B)_{m_1 \ldots m_{p+q}}(p) = A_{[m_1 \ldots m_p} B_{m_{p+1} \ldots m_{p+q}]} \tag{25}$$

Komponenten einer $p + q$-Form.

Die eckigen Klammern um die Komponenten haben dabei folgende Bedeutung. Ist $T_{m_1 \ldots m_q}$ eine beliebige Menge reeller Zahlen, definieren wir die antisymmetrisierten Ausdrücke durch

$$T_{[m_1 \ldots m_q]} = \frac{1}{q!} \sum_{P \in S(q)} \sigma(P) T_{P(m_1) \ldots P(m_q)}. \tag{26}$$

Dabei bezeichnet $S(q)$ die Permutationsgruppe der Menge $\{1, \ldots, q\}$ und $\sigma(P)$ das Vorzeichen der Permutation, welches -1 $(+1)$ ist, wenn man eine ungerade (gerade) Zahl von Vertauschungen zweier Zahlen benötigt um die durch die Permutation P gegebene Anordnung der Zahlen $\{1, \ldots, q\}$ zu erreichen.

Offenbar bilden dann die Keilprodukte

$$\mathrm{d}q^{m_1} \wedge \mathrm{d}q^{m_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{n_q} \tag{27}$$

eine Basis von Ω_q, wobei natürlich nur alle geordneten Mengen von q Indizes aus $\{1, \ldots, q\}$ linear unabhängig sind. Die Dimension des Vektorraums Ω_q ist also $\binom{n}{q}$, und es ist klar, daß q-Formen mit $q > n$ identisch verschwinden. Die Skalarfelder bezeichnen wir in diesem Zusammenhang übrigens als 0-Formen. Die Entwicklung der q-Form Ω nach dieser Basis schreibt sich

$$\omega = \frac{1}{q!} \omega_{m_1 \ldots m_q} \mathrm{d}q^{m_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{m_q}. \tag{28}$$

Zur koordinatenunabhängigen Definition der Ableitung einer Form zeigen wir

Satz 4. *Sei $\omega \in \Omega_q$, $p \in M$ beliebig und q_k ein Satz von lokalen Koordinaten bzgl. einer beliebigen Karte um p. Dann wird die Abbildung $\mathrm{d} : \Omega_q \to \Omega_{q+1}$ durch die folgenden Forderungen* *(a) Ist* $\omega \in \Omega_0$*, so gilt* $\mathrm{d}f = \mathrm{d}q^\mu \partial_\mu f$

(b) $\mathrm{d}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{d}f + \beta \mathrm{d}g$ *für alle* $f, g \in \Omega_q$*,* $q = 1, \ldots, n$ *und* $\alpha, \beta \in R$*.*

(c) Sind $\omega \in \Omega_p$ *und* $\eta \in \Omega_q$*, so gilt* $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\eta$*.*

(d) Für alle $\omega \in \Omega_q$ *ist* $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$*.*

eindeutig bestimmt.

Beweis: Da d wegen (b) eine lineare Abbildung ist, genügt es zu zeigen, daß diese Abbildung für q-Formen der speziellen Gestalt

$$\omega = f \mathrm{d}q^{m_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{m_q} \text{ mit } 1 \leq m_1 < m_2 \ldots < m_q \leq n \tag{29}$$

eindeutig bestimmt ist und eine $(q+1)$-Form bildet. Benutzen wir wieder die Parametrisierung durch lokale Koordinaten q^k einer beliebigen Karte, folgt wegen (c) und (d) für diese q-Formen unter Benutzung von (a) notwendig:

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}q^{m_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{m_q} = \partial_\mu \omega \, \mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}q^{m_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{m_q}. \tag{30}$$

Definieren wir nun auf der Karte um p den Operator d in dieser Weise, sehen wir auch, daß wegen der Antisymmetrie des Keilprodukts auch (c) und (d) erfüllt sind.

Daß diese Definition auf ganz M und nicht nur lokal in einem Kartengebiet um p gilt, erfordert nun nur noch den Nachweis, daß sich $\mathrm{d}\omega$ wie eine $q+1$-Form transformiert. Auch dies berechnet man sofort aus der allgemeinen Transformationsformel und der Antisymmetrie des Keilprodukts. **Q.E.D.**

Als nächstes wollen wir das für die Physik so wichtige Lemma von Poincaré beweisen.

Satz 5 (Lemma von Poincaré). *Sei* ω *eine* q*-Form auf einer Mannigfaltigkeit* M*, für die* $\mathrm{d}\omega = 0$ *ist. Dann existiert zu jedem* $p \in M$ *existiert eine Umgebung* $U \in \mathcal{U}(p)$ *und eine in dieser Umgebung definierte* $(q-1)$*-Form* α*, so daß* $\omega|_U = \mathrm{d}\alpha$*.*

Beweis: Sei $p \in M$ und κ eine Karte um p. Das Bild $V = \kappa(U_\kappa) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen und enthält folglich eine offene Kugel K_p um p. Sei $U = \kappa^{-1}(K_p)$. Dieses ist offenbar sternförmig bzgl. p, denn in K_p ist mit jedem Punkt auch die gerade Verbindungslinie dieses Punktes mit $\kappa(p)$ enthalten.

Wir brauchen folglich den Satz nur für sternförmige Gebiete im $\mathbb{R}^n$ zu beweisen. Sei also $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bzgl. des Ursprungs. Sei weiter ω eine in U definierte q-Form und $\mathrm{d}\omega = 0$. Dann müssen wir eine $(q-1)$-Form α in U finden, so daß $\mathrm{d}\alpha = \omega$ ist.

Dazu definieren wir die lineare Abbildung $H : \Omega_q \to \Omega_{q-1}$ durch

$$H\omega(q) = \frac{1}{q!} \sum_{\alpha=1}^{q} (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 \mathrm{d}t t^{q-1} q^{\mu_\alpha} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_q}(tq) \mathrm{d}q^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}q^{\mu_\alpha}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{m_q}, \tag{31}$$

wobei

$$\omega_{\mu_1 \ldots \mu_q} = \omega(\partial_{\mu_1}, \ldots, \partial_{\mu_q}) \tag{32}$$

die Komponenten der alternierenden Multilinearform ω bzgl. der lokalen Koordinaten q_μ ist.

Der Akzent über einem Tensor im Keilprodukt bedeutet, daß dieser aus diesem Keilprodukt zu streichen ist. Das bedeutet, daß auf der rechten Seite in der Tat eine $q-1$-Form steht. Wir bemerken, daß das Integral wohldefiniert ist, weil wir den Definitionsbereich U von ω als sternförmig bzgl. dem Ursprung konstruiert haben. Für jedes q handelt es sich um das Wegintegral entlang der geraden Verbindungslinie des Ursprungs mit q. Unter der Summe über α ist über alle μ_k gemäß der Einsteinkonvention von 1 bis d zu summieren.

Jetzt soll nach Voraussetzung $\mathrm{d}\omega = 0$ sein. Das bedeutet für die Komponenten

$$\partial_{[\mu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_q]} = 0. \tag{33}$$

Da $\omega_{\mu_1\ldots\mu_q}$ bereits total antisymmetrisch gegen Vertauschung ist, vereinfacht sich die Antisymmetrisierung zu

$$\partial_{[\mu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_q]} = \sum_{\alpha=1}^{q}(-1)^{\alpha-1}\partial_{\mu_\alpha}\omega_{\mu\mu_1\ldots\widehat{\mu_\alpha}\mu_q}. \tag{34}$$

Überschieben mit $\mathrm{d}q^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\mu_q}q^{\mu}$ ergibt nach Vertauschung der Summationsindizes μ_α und μ unter der Summe bzgl. α und Vertauschung des Indexbildes an ω bei entsprechender Korrektur der Vorzeichens

$$q^{\mu}\partial_{\mu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_q}\mathrm{d}q^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\mu_q} = \sum_{\alpha=1}^{q}(-1)^{\alpha-1}\partial_{\mu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_q}q^{\mu_\alpha}\mathrm{d}q^{\mu}\wedge\mathrm{d}q^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}q^{\mu_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\mu_q}. \tag{35}$$

Jetzt wenden wir den Operator d auf die Definition $H\omega$ in (31) an und verwenden (35):

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H\omega(q) &= \frac{1}{q!}\int_0^1 \mathrm{d}t\left[qt^{q-1}\omega_{\mu_1\ldots\mu_q}(tq) + q^{\mu}\partial_{\mu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_q}(tq)\right]\mathrm{d}q^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\mu_q} = \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t^q\omega_{\mu_1\ldots\mu_q}(tq)\right]\mathrm{d}q^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\mu_q}.\end{aligned} \tag{36}$$

Da nach Voraussetzung die Komponenten von ω beliebig oft stetig differenzierbar sind, ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf der rechten Seite dieser Gleichung anwendbar, und wir erhalten wegen $q \geq 1$ die Behauptung:

$$\omega = \mathrm{d}H\omega \Rightarrow \alpha = H\omega. \tag{37}$$

erfüllt die im Satz genannte Eigenschaft. **Q.E.D.**

Bemerkung:

Es ist klar, daß zu gegebenem $\omega \in \Omega^q$ mit $\mathrm{d}\omega = 0$ das α keineswegs eindeutig bestimmt ist, sondern z.B. auch $\alpha' = \alpha + \mathrm{d}\beta$, wobei β eine beliebige $q-2$-Form ist (für $q = 1$ ist unter β einfach eine Konstante zu verstehen). Dies ist aber lokal auch schon die größtmögliche Vieldeutigkeit für α, denn wir wegen der Linearität der äußeren Ableitung d können wir aus $\mathrm{d}\alpha' = \mathrm{d}\alpha = \omega$ schließen, daß $\mathrm{d}(\alpha' - \alpha) = 0$ und damit lokal auf $\alpha' - \alpha = \mathrm{d}\beta$ mit einer geeigneten $q-2$-Form β schließen. Es ist aber keineswegs gesichert, daß dies für dieselbe Umgebung $U(q)$ eine gegebenen Punktes zutreffen muß. Notfalls muß man die Umgebung entsprechend verkleinern!

3.3 Beispiele

In diesem Abschnitt gehen wir kurz auf einige charakteristische Beispiele für die Anwendung des Poincaréschen Lemmas in der Physik ein.

Betrachten wir zunächst die möglichen konkreten Ausprägungen des Poincaréschen Lemmas im $\mathbb{R}^3$. Es gibt hier natürlich nur drei Fälle:

(a) $q = 1$. Sei also ω eine 1-Form. In gegebenen lokalen Koordinaten q^μ um den Punkt $q^\mu = 0$ ist natürlich $\omega = \omega_\mu \mathrm{d}q^\mu$. Die Geschlossenheit der Differentialform $\mathrm{d}\omega = 0$ bedeutet in diesen Koordinaten

$$\partial_\nu \omega_\mu \mathrm{d}q^\nu \wedge \mathrm{d}q^\mu = 0 \Leftrightarrow \partial_\nu \omega_\mu - \partial_\nu \omega_\mu = 0. \tag{38}$$

Dann existiert nach dem Lemma von Poincaré lokal um jeden Punkt ein skalares Feld α (eine "0-Form"), so daß

$$\mathrm{d}\alpha = \omega \Leftrightarrow \omega_\mu = \partial_\mu \alpha. \tag{39}$$

Nach dem Beweis zum Lemma von Poincarè ist in jedem Punkt q^μ in einer hinreichend kleinen Umgebung um $q^\mu = 0$

$$\alpha(q) = \int_0^1 \mathrm{d}t q^\mu \omega_\mu(qt), \tag{40}$$

und nach der an den Beweis anschließenden Bemerkung ist α bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Das einfachste Beispiel ist das Gravitationsfeld eines Massepunktes. Nehmen wir für die lokalen Koordinaten kartesische x^μ und sei der Massepunkt in y^μ lokalisiert, wobei $y \neq 0$, dann können wir das Kraftfeld durch eine 1-Form charakterisieren[3]:

$$\omega = -m_1 m_2 \gamma \frac{x_\mu - y_\mu}{[\sum_{\nu=1}^3 (x^\nu - y^\nu)^2]^{3/2}} \mathrm{d}x^\mu. \tag{41}$$

Hier definieren wir kurzerhand $x_\mu = x^\mu$, was später noch in der euklidischen Struktur des $\mathbb{R}^3$ seine differentialgeometrische Begründung finden wird. Man rechnet sofort nach, daß $\mathrm{d}\omega = 0$ ist und die Auswertung des obigen Integrals ergibt

$$V(x^\mu) = -\alpha(x^\mu) = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{[\sum_{\nu=1}^3 (x^\nu - y^\nu)^2]^{1/2}} + \text{const.}, \tag{42}$$

also, wie nicht anders zu erwarten, das Coulombpotential.

In der klassischen Vektoranalysis faßt man diesen Sachverhalt kurz dadurch zusammen, daß ein wirbelfreies Vektorfeld zumindest lokal der Gradient eines Skalarfeldes ist. Es ist in unserem Beispiel klar, daß dies außer in $x^\mu = y^\mu$, also der punktförmigen Quelle des Gravitationsfeldes überall gilt.

[3] Wir werden weiter unten darauf eingehen, daß dies eigentlich nicht die natürliche Auffassung eines Kraftfeldes ist, jedoch für den hier zu exemplifizierenden Sachverhalt der Existenz eines Potentials ist dies ohne Belang.

(b) $q = 2$. In diesem Falle ist

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{d}q^{\mu} \wedge \mathrm{d}q^{\nu}. \tag{43}$$

In drei Dimensionen besitzt ein antisymmetrisches Tensorfeld 2. Stufe aber gerade drei linear unabhängige Komponenten, und es ist bequem zu schreiben

$$\omega_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho}\tilde{\omega}^{\rho}, \tag{44}$$

wobei das Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} = \begin{cases} \sigma(\mu,\nu,\rho) & \text{falls } \{\mu,\nu,\rho\} = \{1,2,3\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{45}$$

ist. Dabei ist σ das Vorzeichen der Permutation $(1,2,3) \to (\mu\nu\rho)$. Man rechnet schnell nach, daß

$$\mathrm{d}\omega = 0 \Leftrightarrow \partial_{\rho}\tilde{\omega}^{\rho} = 0 \tag{46}$$

gilt. Dadurch vereinfacht sich die Bedingung für Geschlossenheit der Differentialform für den Fall $n = 3$ erheblich. Hier entspricht also dem Lemma von Poincaré die klassische Aussage, daß ein quellenfreies Vektorfeld lokal durch die Rotation eines Vektorfeldes dargestellt werden kann.

4 Das Stokessche Theorem

Wir kommen nun zu dem Hauptsatz der Theorie der Mannigfaltigkeiten, die ohne Zusatzstrukturen auskommen, dem Stokesschen Theorem, welches die für den $\mathbb{R}^3$ bekannten Integralsätze von Gauß und Stokes beinhaltet und verallgemeinert. Wir müssen aber vorher unseren Begriff der Mannigfaltigkeiten zu dem der berandeten Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

4.1 Berandete Mannigfaltigkeiten

Das Musterbeispiel einer berandeten Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ ist der Halbraum

$$\mathbb{R}^n_- := \{x \in \mathbb{R}^n | x^1 \leq 0\}. \tag{47}$$

Als den Rand dieser Mannigfaltigkeit definieren wir naturgemäß die Punkte, die bzgl. der Topologie des $\mathbb{R}^n$ keine Umgebungen besitzen. Das sind offenbar genau die Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x^1 = 0$. Genauso wie wir den $\mathbb{R}^n$ über die Karten und Atlanten benutzt haben, um die Mannigfaltigkeit mit einer Differenzierbarkeitsstruktur zu versehen, verfahren wir nun mit $\mathbb{R}^n_-$. Dazu versehen wir $\mathbb{R}^n_-$ mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}^n$, d.h. wir bezeichnen eine Menge M als in $\mathbb{R}^n_-$ offen, wenn es eine in $\mathbb{R}^n$ offene Menge Menge M' gibt, so daß $M = M' \cap \mathbb{R}^n_-$ gilt. Darauf gründen wir nun die folgende Definition:

Definition 13. *Berandete Mannigfaltigkeit Sei M ein topologischer Hausdorffraum. Dann heißt ein Homöomorphismus $\kappa : U \to \mathbb{R}^n$ oder $\kappa : U \to \mathbb{R}^n_-$, wobei $U \subseteq M$ offenen Teilmenge von M ist,* ***berandete n-dimensionale Karte*** *für M.*

Die Definitionen von **berandeten Atlanten** und **berandeten Mannigfaltigkeiten** ergibt sich nun exakt wie im Fall allgemeiner Mannigfaltigkeiten, so daß wir nicht all diese Begriffe hier wiederholen müssen. Wir müssen nur einige Hilfssätze über Diffeomorphismen bzgl. der Randpunkte beweisen:

Lemma 1. *Randverhalten von Diffeomorphismen Seien U und V in $\mathbb{R}^n_-$ offene Mengen und $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt $f(\partial U) = \partial V$, und die Einschränkung $f|_{\partial U} : \partial U \to \partial V$ ist Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^{n-1}$.*

Sei $p \in U$ Randpunkt. Dann bildet das Differential $\mathrm{d}f_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ den Unterverktorraum $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ Sowie die Halbräume $\mathbb{R}^n_\pm$ jeweils in sich ab, d.h. die Jacobimatrix in p ist von der Gestalt

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1 & 0 \\ \partial_1 f^2 & \\ \vdots & J_{f|\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}(p) \\ \partial_1 f^n & \end{pmatrix} \quad \text{mit } \partial_1 f^1 > 0. \tag{48}$$

Beweis: Zu $p \in \partial U$ sei $g : U'_p \to \mathbb{R}^n$ eine lokale differenzierbare Fortsetzung von f. Wäre nun $f(p)$ kein Randpunkt von V, dann gäbe es eine in $\mathbb{R}^n$ offene Umgebung V_p von $f(p)$. Da f^{-1} stetig ist, ist $f^{-1}(V_p)$ offen in $\mathbb{R}^n$. Da $f^{-1}(V_p) \subset U_p$ und $g \circ (f^{-1}|V_p) = \mathrm{id}|_{V_p}$, besitzt f^{-1} bei $f(p)$ vollen Rang und ist folglich lokaler Diffeomorphismus. Folglich ist $f^{-1}(V_p)$ Umgebung von p in $\mathbb{R}^n$, was aber nicht sein kann, da ja p Randpunkt gewesen sein sollte. Also ist $f(\partial U) \subset \partial V$. Exakt die gleiche Überlegung ist aber auch auf f^{-1} anwendbar und folglich $f^{-1}(\partial V) \subset \partial U$, woraus schließlich $f(\partial U) = \partial V$ resultiert.

Da $f(\partial U) = \partial V$ ist $f^1|_{\partial U} \equiv 0$. Es ist also $\partial_k f^1|_{\partial U} = 0$ für $k \in \{2, \ldots, n\}$. Da $V \in \mathbb{R}^n_-$ ist $f^1 < 0$ in ganz U und folglich die Richtungsableitung entlang der 1-Richtung positiv, denn die Jacobimatrix muß ja vollen Rang besitzen, weil f voraussetzungsgemäß Diffeomorphismus ist. Folglich ist (48) bewiesen. Daraus folgen unmittelbar die Behauptungen des Satzes. **Q.E.D.**

Daraus ergibt sich sofort die folgende

Definition 14. *Randpunkte von M Sei M berandete Mannigfaltigkeit. Ein Punkt $p \in M$ heißt Randpunkt, wenn er von einer Karte $\kappa : U \to \mathbb{R}^n_-$ (und damit nach Lemma 1 durch jede Karte) auf einen Randpunkt von $\kappa(U) \subseteq \mathbb{R}^n_-$ abgebildet wird.*

Aus dem zweiten Teil von Lemma 1 wird unmittelbar klar, daß der Rand ∂M durch Einschränkung der Karten von M zu einer unberandeten $n-1$-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit wird. Unter ∂M verstehen wir hinkünftig die so definierte differenzierbare randlose Mannigfaltigkeit. Die Tangentialräume von M an Randpunkten sind die vollen Tangentialräume. Allerdings sind die beiden Halbräume gemäß Lemma 1 durch $T_p^\pm M = (d\kappa_p)^{-1}(\mathbb{R}^N_\pm)$ wohldefiniert, d.h. koordinatenunabhängig definiert.

Es ist weiter $T_p\partial M \subset T_p M$ und $T_p^+ M \cap T_p^- M = T_p \partial M$.

Die Tangentialvektoren in $T_p^- M \setminus T_p\partial M$ heißen **nach innen weisende**, die in $T_p^+ M \setminus T_p \partial M$ **nach außen weisende** Tangentialvektoren in p. Es ist klar, daß die Komponente eines nach innen (außen) weisenden Vektors bzgl. jeder Karte eine negative (positive) 1-Komponente besitzt.

4.2 Orientierte Mannigfaltigkeiten

Den $\mathbb{R}^n$ kann man wie folgt orientieren.

Definition 15. *Orientierung in Vektorräumen Basen $\{v_i\}$ und $\{v'_i\}$ eines Vektorraums V heißen* ***gleichorientiert****, wenn der basiswechselnde Isomorphismus eine positive Determinante besitzt. Gleichorientiertheit ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen des Vektorraums, die zwei Äquivalenzklassen definiert. Ein orientierter Vektorraum ist ein Paar (V, or), wobei eine der Orientierungen ausgezeichnet wurde.*

Definition 16. *Orientierung von Mannigfaltigkeiten Sei $\{or_p\}_{p\in M}$ eine Familie von Orientierungen der Tangentialräume T_pM. Eine Karte $\kappa : U \to \mathbb{R}^n$ einer n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit um $p \in U$ heißt* ***orientierungserhaltende Karte*** *bzgl. dieser Familie von Orientierungen, wenn $\mathrm{d}h_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$ die Orientierung or_p in die Orientierung von $\mathbb{R}^n$ überführt.*

Die Familie $\{or_p\}_{p\in M}$ von Orientierungen heißt ***lokal verträglich****, wenn sich zu jedem $p \in M$ eine orientierungserhaltende Karte κ angeben läßt.*

Die Mannigfaltigkeit M wird dadurch zu einer ***orientierten Mannigfaltigkeit****, daß man auf ihr eine lokal verträgliche Familie von Orientierungen definiert.*

Bemerkung: Ist M eine orientierte Mannigfaltigkeit, so wird durch die Menge aller orientierungserhaltenden Karten ein maximaler **orientierender Atlas** definiert, d.h. ein Atlas, bei dem alle Kartenwechsel überall positive Jacobideterminanten besitzen. Umgekehrt definiert jeder orientierungserhaltende Atlas eine Orientierung auf M.

Wenden wir uns nun orientierten berandeten Mannigfaltigkeiten zu. Es ist aufgrund von Lemma 1 klar, daß der Rand einer orientierten berandeten Mannigfaltigkeit ebenfalls orientierbar ist, denn ein maximaler orientierter Atlas auf M induziert einen ebensolchen auf ∂M.

Definition 17. *Orientierung des Randes Sei M eine orientierte berandete Mannigfaltigkeit und $p \in \partial M$. Dann heißt eine Basis $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ von $T_p\partial M$ genau dann relativ zu T_pM* ***positiv orientiert****, wenn für einen und damit jeden nach außen weisenden Vektor b_0 die Basis $\{b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ von T_pM positiv orientiert ist. Wir versehen den Rand ∂M im folgenden stets mit dieser Orientierung.*

4.3 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Nun können wir uns der Integration widmen. Es ist klar, daß wir mittels der lokalen Karten im Prinzip die **Lebesgueintegration** auf dem $\mathbb{R}^n$ zur Verfügung haben. Es ergeben sich nur zwei Probleme. Das erste ist, daß wir koordinatenunabhängige Definitionen für die Integrale benötigen, damit es überhaupt sinnvoll ist, von Integrationen auf Mannigfaltigkeiten zu sprechen. Zum zweiten wollen wir die zunächst nur lokal definierten Integrale auf beliebig große Teilmannigfaltigkeiten und gar die gesamte Mannigfaltigkeit verallgemeinern.

Definition 18. *Kleine Mengen Sei M ein Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt* ***klein****, wenn sie vollständig im Gebiet einer Karte enthalten ist.*

Lemma 2. *Zerlegung in kleine Mengen Sei M eine Mannigfaltigkeit, auf der ein abzählbarer Atlas $\mathcal{A} = \{(\kappa_j, U_j)\}_{i\in\mathbb{N}}$ existiert. Dann gibt es stets eine Zerlegung der Mannigfaltigkeit M in disjunkte kleine Teilmengen.*

Beweis: Definiert man rekursiv $A_1 = U_1$ und $A_{j+1} = U_{j+1} \setminus \cup_{k=1}^{j} U_k$. **Q.E.D.**.

Definition 19. *Integral einer n-Form Sei nun ω eine n-Form auf einer orientierten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Es existiere eine Zerlegung $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von M in abzählbar viele kleine Lebesgue-meßbare Teilmengen und $\{(U_j, \kappa_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von orientierungserhaltenden Karten mit $A_j \subseteq U_j$ derart, daß die Funktionen*

$$a_j : \kappa_j(U_j) \to \mathbb{R},\ a_j(q^k) = \omega_{\kappa_j^{-1}(q)}(\partial_1, \ldots, \partial_n) \tag{49}$$

über $h_j(A_j)$ Lebesgue-integrierbar sind und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\kappa_j(A_j)} \mathrm{d}^n q |a_j(q)| < \infty \tag{50}$$

*ist. Dann definieren wir als der **Integral der n-form***

$$\int_M \omega := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\kappa_j(A_j)} \mathrm{d}^n q a_j(q). \tag{51}$$

Satz 6. *Wohldefiniertheit des Integrals Das soeben definierte Integral ist von der gewählten Zerlegung A_j und der Karten κ_j unabhängig. Insbesondere gilt auch (50) für jede solche Zerlegung.*

Beweis: Sei also $\{A'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ Zerlegungen von M in meßbare Mengen und $\{(U'_j, \kappa'_j)\}$ orientierungserhaltende Karten mit $A'_j \subseteq U'_j$. Ferner seien a'_j bzgl. der neuen Zerlegung definiert wie (49) bzgl. der ursprünglichen Zerlegung.

Über $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrable Funktionen sind nun auch über jede Lebesgue-meßbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ integrabel, insbesondere also die a_j über $\kappa_j(A_j \cap A'_k)$. Aus (50) und dem Satz von Lebesgue folgt dann

$$\int_{\kappa_j(A_j)} \mathrm{d}^n q a_j = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\kappa_j(A_j \cap A'_k)} \mathrm{d}^n q a_j. \tag{52}$$

Insbesondere konvergiert die rechts stehende Reihe.

Sei nun weiter $\varphi = \kappa_j \circ (\kappa'_k)^{-1}|_{\kappa'_k(U_j \cap U'_k)}$ der Kartenwechsel und J_φ die dazugehörige Jacobideterminante. Dann ist für $p \in U_j \cap U'_k$

$$a'_k[\kappa'_k(p)] = a_j[\kappa_j(p)] \det J_\varphi[\kappa'_k(p)]. \tag{53}$$

Da die Karten allesamt per definitionem orientierungserhaltend sind, ist die Jacobideterminanten $\det J_\varphi > 0$. Es ist also

$$\int_{\kappa'_k(A_j \cap A'_k)} \mathrm{d}^n q' a'_k = \int_{\kappa'_k(A_j \cap A'_k)} \mathrm{d}^n q' a_j \circ \varphi |\det J_\varphi| = \int_{\kappa_j(A_j \cap A'_k)} \mathrm{d}^n q a_j, \tag{54}$$

wo wir den Transformationssatz für Lebesgueintegrale in mehreren Veränderlichen angewandt haben. Die gleiche Argumentation können wir für die Funktionen $|a_j|$ und $|a'_k|$ anwenden. Folglich ist also

$$\int_{\kappa'_k(A'_k)} \mathrm{d}^n q' a'_k = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\kappa'_k(A_j \cap A'_k)} \mathrm{d}^n q' a'_k. \tag{55}$$

Wir können nun auch über k summieren. Da die in Frage stehenden Reihen allesamt absolut konvergieren, wie aus der Gültigkeit der Bedingung (50) für die jeweiligen Reihen folgt, darf die Reihenfolge der Doppelsumme auf der rechten Seite vertauscht werden, wodurch wir (52) zur Anwendung bringen können. Schließlich finden wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\kappa_k'(A_k')} \mathrm{d}^n q' a_k' = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\kappa_j(A_j)} \mathrm{d}^n q a_j. \tag{56}$$

Q.E.D.

Definition 20. *Träger einer Form Sei ω eine q-Form ($q \leq n$) über einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Dann heißt die Menge*

$$\operatorname{supp} \omega = \overline{\{p \in M | \omega_p \neq 0\}} \subseteq M \tag{57}$$

Träger[4]*.*

Satz 7. *Satz von Stokes Sei M eine orientierte n-dimensionale berandete Mannigfaltigkeit und ω eine $(n-1)$-Form mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{58}$$

Beweis: Sei zunächst $M = \mathbb{R}^n_-$ und $\{x^j\}_{j=1^n}$ die Koordinaten bzgl. eines beliebigen Koordinatensystems. Dann können wir schreiben

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{n} f_\mu \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^\mu} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n, \tag{59}$$

wobei das Dach wieder für den auszulassenden Faktor im Keilprodukt steht. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \sum_{\mu=1}^{\infty} (\mathrm{d}x^\nu \partial_\nu f_\mu) \hat{\mathrm{d}}x^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^\mu} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\mu-1} (\partial_\mu f_\mu) \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n. \end{aligned} \tag{60}$$

Sei weiter $\iota : \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildung, dann ist offenbar

$$\iota^* \mathrm{d}x^1 = 0,\ \iota^* \mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}x^\mu \text{ für } \mu \geq 2 \tag{61}$$

und folglich

$$\iota^* \omega = \iota^* f_1 \mathrm{d}x^2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n. \tag{62}$$

Die rechte Seite von (58) berechnet sich folglich

$$\int_{\mathbb{R}^n_-} \mathrm{d}\omega = \sum_{\mu=1} \int_{\mathbb{R}^n_-} \mathrm{d}^n x (-1)^{\mu-1} \partial_\mu f_\mu = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{d}^{n-1}(x^2, \ldots x^n) f_1(0, x^2, \ldots, x^n) = \int_{\partial \mathbb{R}^n_-} \omega. \tag{63}$$

[4]engl. „support"

Dabei haben wir mit Hilfe des Satzes von Fubini die Integrationsreihenfolge in jedem Summanden vertauscht, so daß zunächst bzgl. x^μ integriert wurde. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich dabei nämlich

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x^1 \partial_1 f_1 = f_1(0, x^2, \ldots, x^n), \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x^\mu \partial_\mu f_\mu = 0 \text{ für } \mu \in \{2, \ldots, n\}, \tag{64}$$

denn weil ω und folglich auch die f_μ nach Voraussetzung kompakten Träger haben sollten, verschwinden die Funktionen stets im Unendlichen. Im letzten Schritt haben wir lediglich die Definition für das Integral der $n-1$-Form benutzt. Damit ist die Behauptung für $M = \mathbb{R}^n_-$ bewiesen.

Als nächstes betrachten wir den Fall, daß der Träger von ω ganz in einem einzelnen Kartengebiet U liegt. Die dazugehörige Karte (U, κ) sei orientierungserhaltend, ebenso wie die Einschränkung auf den Rand $\kappa|\partial U : \partial U \to \partial U'$.

Wir wollen nun vermöge der Abbildung κ die Behauptung auf den vorigen Fall, also $M = \mathbb{R}^n_-$ zurückführen. Dazu benötigen wir

Satz 8. *Natürlichkeit des Differentialoperators Seien M_1 und M_2 n-dimensionale Mannigfaltigkeiten und $f : M_1 \to M_2$ ein Diffeomorphismus. Sei weiter ω eine k-Form in M_2. Dann definieren wir $f^*\omega$*

$$(f^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{f(p)}(f^*v_1, \ldots, f^*v_k). \tag{65}$$

Dabei sind die f^*v_k über die Kurven $s : I \to M_1$, die die Tangentialvektoren in T_pM_1 definieren bestimmt, indem f^*v_k derjenige Tangentialvektor in $T_{f(p)}M_2$ ist, der die Kurve $f \circ s : I \to M_2$ zum Repräsentanten hat (vgl. die Definition 7). Dann gilt

$$f^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(f^*\omega). \tag{66}$$

Beweis: Wir führen einen Induktionsbeweis in k. Sei (U_1, κ_1) eine lokale Karte um $p \in M_1$. Da $f : M_1 \to M_2$ Diffeomorphismus ist, ist auch $(f(U_2), \kappa_2 = \kappa_1 \circ f)$ eine lokale Karte.

Sei nun $k = 0$. Dann ist $\omega : M_2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und es gilt $(f^*\omega)_p = \omega[f(p)]$. Nun gilt in den lokalen Koordinaten q von M_1 bzw. q' von M_2:

$$\mathrm{d}(f^*\omega)_p = \mathrm{d}(\omega \circ f)_p = [\mathrm{d}\omega_{f(p)}] \circ \mathrm{d}f_p := (f^*\mathrm{d}\omega)_p, \tag{67}$$

wobei wir die Kettenregel angewendet haben.

Angenommen die Behauptung gelte für alle $0 \leq k < l-1$. Dann gilt für eine l-Form ω auf M_2

$$f^*\omega = \frac{1}{l!} f^*\omega_{\mu_1 \ldots \mu_l} f^*\mathrm{d}q'^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge f^*\mathrm{d}q'^{\mu_l}. \tag{68}$$

Aus der Produktregel und der bereits bewiesenen Behauptung für $k = 0$ folgt nun wegen $\mathrm{dd} \equiv 0$, daß

$$\mathrm{d}(f^*\mathrm{d}q'^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge f^*\mathrm{d}q'^{\mu_k l}) = \mathrm{d}(\mathrm{d}(f^*q'^{\mu_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(f^*q'^{\mu_l}) = 0 \tag{69}$$

Damit ist also

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = \frac{1}{l!}\mathrm{d}(f^*\omega_{\mu_1 \ldots \mu_l}) f^*\mathrm{d}q'^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge f^*\mathrm{d}q'^{\mu_l} = \frac{1}{l!} f^*\mathrm{d}\omega_{\mu_1 \ldots \mu_l} \wedge \mathrm{d}q'^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge f^*\mathrm{d}q'^{\mu_l}, \tag{70}$$

welch letzterer Ausdruck aber gerade $f^*\mathrm{d}\omega$ ist. **Q.E.D.**

Kommen wir nun zum Beweis des Stokesschen Satzes zurück, wo wir nun annehmen, daß supp $\omega \subseteq U$ ist, wobei (U, κ) eine Karte ist. Aus der eben bewiesenen Natürlichkeit von d folgt dann

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_U \mathrm{d}\omega = \int_{\kappa(U)} \kappa^{-1*}\mathrm{d}\omega = \int_{\kappa(U)} \mathrm{d}(\kappa^{-1*}\omega). \tag{71}$$

Wir können nun $\kappa^{-1*}\omega$ durch 0 außerhalb von $\kappa(U)$ zu einer Differentialform ω' auf ganz $\mathbb{R}^n_-$ fortsetzen und den bereits bewiesenen Fall $M = \mathbb{R}^n_-$ anwenden:

$$\int_{\kappa(U)} \mathrm{d}(\kappa^{-1*}\omega) = \int_{\mathbb{R}^n_-} \mathrm{d}\omega' = \int_{\partial\mathbb{R}^n_-} \omega' = \int_{\kappa(\partial U)} \kappa^{-1*}\omega = \int_{\partial U} \omega = \int_{\partial M} \omega, \tag{72}$$

womit wir das Stokessche Theorem auch schon für den Fall, daß der Träger von ω ganz in einem Kartengebiet zu liegen kommt, bewiesen.

Kommen wir nun zum allgemeinen Fall, wo es nicht unbedingt möglich sein muß, daß man eine Karte findet, so daß der Träger von ω ganz in das einzelne Kartengebiet fällt. Wir führen diesen Fall jedoch dadurch auf den letzteren zurück, indem wir zeigen, daß stets eine Zerlegung $\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_l$ möglich ist, so daß der Träger eines jeden ω_m in einem Kartengebiet liegt und die ω_m allesamt differenzierbar sind.

Zu jedem $p \in$ supp ω sei (U_p, κ_p) eine orientierungserhaltende Karte. Da die U_p eine Überdeckung der kompakten Menge supp ω mit offenen Mengen bilden, genügen schon endlich viele $\{U_m\}_{m\in\{1,\ldots,l\}} \subset \{U_p | p \in \text{supp}\ \omega\}$ zur Überdeckung von supp ω. Zu jedem m können wir nun eine Funktion $\lambda_m : M \to [0,1]$ wählen, so daß supp $\lambda_m \subset U_m$ und kompakt ist. Solche Funktionen existieren stets, denn wir können eine „Mollifierfunktion"[5] mit Träger in $\kappa_m(U_m)$ nach U_p liften. Die Urbilder des Intervalls $(0,1)$ dieser Funktionen λ_m überdecken wiederum suppω, und durch

$$\omega_{mp} = \begin{cases} \frac{\lambda_m}{\sum_{m=1}^{l} \lambda_m} & \text{für } p \in \lambda_m^{-1}[(0,1)] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{73}$$

haben wir die gewünschte Zerlegung von ω schon gefunden, und jetzt ist auf jede der Formen ω_m der bereits bewiesene Fall anwendbar, daß der Träger in eine Karte fällt. **Q.E.D.**

Wir wollen zur Ergänzung noch die in der Analysis auch sonst sehr nützliche Mollifierfunktion definieren. Zunächst sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{74}$$

Man zeigt schnell, daß $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (Übung!). Ferner ist $f(x) > 0$ für alle $x \in (-1, 1)$. Für jede Kugel $K_\epsilon(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ ist dann

$$\lambda_{\epsilon,x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \lambda_{\epsilon,x_0}(x) = f(\|x - x_0\|) \tag{75}$$

eine $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$-Funktion mit supp $\lambda_{\epsilon,x_0} = K_\epsilon(x_0)$. Dabei bezeichnet $\|x\|$ die euklidische Norm des $\mathbb{R}^n$.

[5] Wir definieren weiter unten noch diese Funktionen

Die Mollifierfunktion ist anschaulich gesprochen deshalb so wichtig, weil sie zeigt, daß es positiv semidefinite C^∞-Funktionen mit beliebig kleinem Träger gibt. Man braucht sie u.a. auch zum Beweis des Fundamentallemmas der Variationsrechnung.

Wir verlassen nun die allgemeinen Mannigfaltigkeiten und wenden uns solchen mit Zusatzstrukturen zu.

5 Affin zusammenhängende Räume

Bis jetzt haben wir zu jedem Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit M nur den Tangentialraum T_pM und den dazugehörigen Kotangentialraum T_p^*M definiert. Weitere natürliche Strukturen waren dann die Tensoren und die Formen. Als die einzige Möglichkeit, unabhängig von den durch Karten gegebenen lokalen Koordinaten Ableitungen und Integrale von diversen Tensorfeldern zu bilden, haben wir die alternierenden Differentialformen gefunden.

Jetzt wenden wir uns der Möglichkeit zu, Vektoren aus verschiedenen Tangentialräumen dadurch miteinander in Zusammenhang zu bringen, daß wir einen gegebenen Vektor in T_pM derart nach $T_{p'}M$, wo p' ein „in der Nähe von p" gelegener Punkt sein soll, transportieren, daß der Differenzenquotient unabhängig von den verwendeten Karten wird. Diesen Differenzenquotient nennen wir dann **kovariante Ableitung des Vektorfeldes**. Wir wollen diese Idee dann auf Tensoren höheren Ranges sowie auf k-Formen und gemischte $\binom{k}{k'}$-Tensoren erweitern.

Um eine geometrische Idee zu gewinnen, wie ein solches Konstrukt wohl zu definieren sei, vergegenwärtigen wir uns die Situation im affinen Raum $\mathbb{R}^n$. Dort können wir eine beliebige Menge von linear unabhängigen Vektoren $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ durch Parallelverschiebung an vom Punkt p jeden Ort transportieren, und Vektorfelder einfach komponentenweise ableiten. Die Konstrukte $\partial_i v^j$ bilden dann die Komponenten eines $\binom{1}{1}$-Feldes, das wir als kovariante Ableitung bezeichnen dürfen. Dies ist aber nur möglich, weil die Basisvektoren sowie die dazugehörigen Kotangentialvektoren unabhängig von p definiert sind. Es ist klar, wie diese Konstruktion auf Tensorprodukte und damit auf beliebige Tensoren zu erweitern ist, nämlich durch die **Produktregel**. Ansonsten ist diese Differentiation linear.

In einem allgemeinen Raum haben wir diese geometrischen Möglichkeiten nicht, und wir müssen eine Schar von Basisvektoren $\{e_i(p)\}_{p\in M, i\in\{1,2,\ldots,n\}} \subset TM$ und die dazugehörige Dualbasis $\{\omega^j(p)\}$ **auszeichnen**. Damit wir ohne Probleme differenzieren können, müssen die Tangentialbasis- und Kotangentialbasisvektoren differenzierbar sein. Wir nennen solche Basen kurz n-Bein-System.

Sei also ein solches n-Bein-System vorgegeben. Wir wollen nun definieren, wie $e_j(p)$ entlang einem Vektor $u \in T_pM$ parallel zu verschieben sei, indem wir zunächst den Operator D vermöge einer beliebigen Schar $\{\omega_j\}$ von $\binom{1}{1}$-Feldern gemäß

$$\mathrm{D}e_j = \omega_j = L^i{}_{jk} e^k \otimes e_i \tag{76}$$

definieren. Die Parallelverschiebung des Basisvektors entlang des Vektors u ergibt sich dann durch Anwenden dieser Form auf $u = u^k e_k$:

$$\mathrm{D}_u e_j = \omega_j(u) = L^i{}_{jk} e_i \otimes e^k(u) = e_i L^i{}_{jk} u^k. \tag{77}$$

Um nun die Produktregel, deren Gültigkeit wir ja für die kovariante Ableitung definitionsgemäß voraussetzen wollen, auf ein beliebiges Vektorfeld anwenden zu können, müssen wir noch definieren, daß für ein Skalarfeld, also eine Nullform $f : M \to \mathbb{R}$ gelten soll $\mathrm{D}f = \mathrm{d}f$. Dann haben wir

$$\mathrm{D}v = \mathrm{D}(v^j e_j) = (\mathrm{d}v^j) \otimes e_j + v^j \omega_j. \tag{78}$$

Von jetzt an arbeiten wir in der holonomen Basis bzw. Kobasis einer lokalen Karte, für die

$$\mathrm{D}v = (\partial_k v^j + v^i L^j{}_{ik})\mathrm{d}q^k \otimes \partial_j := v^j{}_{;k}\mathrm{d}q^k \otimes \partial_j \tag{79}$$

gilt. Aus dieser expliziten Darstellung der Komponenten der covarianten Ableitung $v^j{}_{;k}$ läßt sich leicht das Transformationsverhalten der **Konnexionskoeffizienten** $L^i{}_{jk}$ bzgl. Koordinatenbasen herleiten. Die $v^j{}_{;k}$ müssen ja die Komponenten eines Tensors vom Range $\binom{1}{1}$ sein, d.h.

$$v'^{j'}{}_{;k'} = v^j{}_{;k} \frac{\partial q^k}{\partial q'^{k'}} \frac{\partial q'^{j'}}{\partial q^j} := \partial'_{k'} v'^{j'} + L'^{j'}{}_{i'k'} v^{i'} \tag{80}$$

Andererseits ist

$$\partial'_{k'} v'^{j'} = \frac{\partial q^k}{\partial q'^{k'}} \left[\partial_k v^j \frac{\partial q'^{j'}}{\partial q^j} + v^i \frac{\partial^2 q'^{j'}}{\partial q^i \partial q^k} \right]. \tag{81}$$

Vergleicht man die beiden letzten Gleichungen, erhält man folgenden Zusammenhang zwischen den Konnexionskoeffizienten in den verschiedenen lokalen Koordinaten:

$$L^j{}_{ik} \frac{\partial q^k}{\partial q'^{k'}} \frac{\partial q'^{j'}}{\partial q^j} = L'^{j'}{}_{i'k'} \frac{\partial q'^{i'}}{\partial q^i} + \frac{\partial q^k}{\partial q'^{k'}} \frac{\partial^2 q'^{j'}}{\partial q^i \partial q^k} \tag{82}$$

Anwendung der inversen Jacobimatrizen der rechten Seite ergibt dann schließlich

$$L^i{}_{jk} = L'^{j'}{}_{i'k'} \frac{\partial q'^{i'}}{\partial q^i} \frac{\partial q'^{k'}}{\partial q^k} \frac{\partial q^j}{\partial q'^{j'}} + \frac{\partial^2 q'^{j'}}{\partial q^i \partial q^k} \frac{\partial q^j}{\partial q'^{j'}}. \tag{83}$$

Die Konnexionskoeffizienten transformieren sich also **nicht** wie Tensorkomponenten der Stufe $\binom{1}{2}$, wie man aus der Indexstellung vermuten würde. Vielmehr transformieren sie sich **inhomogen**. Der inhomogene Term kompensiert gerade das entsprechende Fehlen der Tensoreigenschaft der partiellen Ableitungen $\partial_k v^j$, welches wir im folgenden dem Lehrbuchgebrauch folgend auch häufig als $v^j{}_{,k}$ schreiben werden.

Da die partiellen zweiten Ableitungen miteinander vertauschen, bildet die Antisymmetrisierung der Konnexionskoeffizienten bzgl. des Indexpaares (jk) Komponenten eines Tensorfeldes der Stufe $\binom{1}{2}$, welches man als **Torsionstensorfeld** der Mannigfaltigkeit mit Torsion bezeichnet:

$$T^i{}_{jk} := 2L^i{}_{[jk]} = L^i{}_{jk} - L^i{}_{kj}. \tag{84}$$

In dem Falle, daß die Konnexionskoeffizienten bzgl. einer (und damit jeder) Koordinatenbasis bzgl. der unteren Indizes symmetrisch sind, bezeichnet man die Konnexion bzw. die Mannigfaltigkeit mit Konnexion als **torsionsfrei**.

Wir wollen noch kurz auf die **geometrische Bedeutung der Konnexion** eingehen. Der Grund, warum die partiellen Ableitungen der Vektorkomponenten keinen Tensor bilden, ist ja darauf zurückzuführen, daß die Differenzenbildung an verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit erfolgt. Sei κ eine lokale Karte um p mit den lokalen Koordinaten q^i und $v(q)$ ein Vektorfeld in lokalen Koordinaten. Damit wir eine koordinatenunabhängige Differenz zwischen $v(q)$ und $v(q + \mathrm{d}q)$ bilden können, müssen wir die Vektoren voneinander abziehen. Die

Komponenten des Vektors beziehen sich aber auf die verschiedenen Koordinatenbasen an den verschiedenen Punkten, die durch die lokalen Koordinaten q^j bzw. $q^j + \mathrm{d}q^j$ parametrisiert sind. Die Änderung der Komponenten aufgrund der Parallelverschiebung ist gerade durch $\delta v^i = L^i{}_{jk} v^j \mathrm{d}q^k$ gegeben. Die $L^i{}_{jk}$ sind willkürlich wählbar und definieren, was Parallelverschiebung bzgl. lokaler Koordinatenbasen konkret zu bedeuten hat. Die einzige Forderung ist, daß die Konnexionskoeffizienten C^∞ Funktionen bzgl. der lokalen Koordinaten sind und sich gemäß (83) unter Kartenwechseln transformieren.

Zusammen mit der Forderung nach Verträglichkeit der kovarianten Ableitung mit der Differentialbildung für Nullformen ergeben sich die Rechenregeln für andere Tensorkomponenten als kontravariante Vektorkomponenten. Leiten wir als Beispiel die kovariante Ableitung einer 1-Form her. Wir fragen also, wie sich die Komponenten ω_j einer Form $\omega = \omega^j \mathrm{d}q_j$ transformieren. Es muß gelten:

$$\mathrm{d}(\omega_j v^j) = (\mathrm{D}\omega_j) v^j + \omega_j (\mathrm{D}v^j) = (\mathrm{D}\omega_j) v^j + \omega_j (v^j{}_{;k} \mathrm{d}q^k) \stackrel{!}{=} (\mathrm{d}\omega_j) v^j + \omega_j \mathrm{d}v^j. \tag{85}$$

Wendet man im vorletzten Term 79 an und löst nach $\mathrm{D}\omega_j$ auf, erhält man[6]

$$\mathrm{D}\omega_j = (\partial_k \omega_j - \omega_i L^i{}_{jk}) \mathrm{d}q^k, \tag{86}$$

also für die Komponenten der kovarianten Ableitung

$$\mathrm{D}_k \omega_j := \omega_{j;k} = \partial_k \omega_j - \omega_i L^i{}_{jk}, \tag{87}$$

die per constructionem die Komponenten eines $\binom{0}{2}$-Tensors bilden. Aus dieser Gleichung folgt noch

$$\mathrm{D}_{[k} \omega_{j]} = \partial_k \omega_j - \partial_j \omega_k - \omega_i T^i{}_{jk}, \tag{88}$$

wobei wir uns der Definition (84) des Torsionstensors bedient haben. Dies macht die spezielle Bedeutung der torsionsfreien Konnexionen deutlich: Genau für diese Räume gehen durch Antisymmetrisieren die kovarianten Ableitungen von Formen in die Cartanableitung des Kalküls der alternierenden Differentialformen über.

Jetzt können wir per Produktregel die kovariante Ableitung für beliebige Tensoren bestimmen. Dazu benötigen wir nur die Vorschriften zur kovarianten Ableitung der Koordinatenbasis und -kobasis, die aus den allgemeinen Vorschriften (79) und (87) folgen:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_k \partial_j &= L^i{}_{jk} \partial_i \\ \mathrm{D}_k \mathrm{d}q^j &= -\mathrm{d}q^l L^j{}_{lk} \end{aligned} \tag{89}$$

Damit folgt z.B. die kovariante Ableitung eines Tensorfeldes ω der Stufe $\binom{0}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\omega &= \mathrm{d}q^k \otimes \mathrm{D}_k (\omega_{lm} \mathrm{d}q^l \otimes \mathrm{d}q^m) \\ &= \mathrm{d}q^k \otimes (\omega_{lm,k} \mathrm{d}q^l \otimes \mathrm{d}q^m - \omega_{lm} L^l{}_{nk} \mathrm{d}q^n \otimes \mathrm{d}q^m - \omega_{lm} L^m{}_{nk} \mathrm{d}q^l \otimes \mathrm{d}q^n) \\ &= (\omega_{lm,k} - \omega_{nm} L^n{}_{lk} - \omega_{ln} L^n{}_{mk}) \mathrm{d}q^k \otimes \mathrm{d}q^l \otimes \mathrm{d}q^m. \end{aligned} \tag{90}$$

Literatur

[Ein90] A. Einstein, Grundzüge der Relativitätstheorie, Vieweg Verlag (1990)

[6]Hier wurde Gebrauch gemacht von der Tatsache, daß die Gleichung für **alle** Vektorfelder v^j gelten soll.