
Klassische Elektrodynamik

Hendrik van Hees¹
Goethe-Universität Frankfurt

12. Juni 2021

¹e-mail: hees@fias.uni-frankfurt.de



Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
1 Das elektromagnetische Feld im Vakuum	5
1.1 Heuristische Einführung	5
1.2 Elektromagnetische Potentiale und Eichsymmetrie	15
1.3 Die Maxwell-Gleichungen als relativistische Feldtheorie	24
1.4 Poincaré-Symmetrie	26
1.4.1 Translationen in Raum und Zeit: Energie und Impuls	29
1.4.2 Lorentz-Transformationen: Drehimpuls und Schwerpunkt	34
1.5 Elektrostatik	35
1.5.1 Die Poisson-Gleichung und die Green-Funktion des Laplace-Operators	36
1.5.2 Entwicklung nach Eigenfunktionen	37
1.5.3 Elektrostatische Multipolentwicklung	42
1.5.4 Elektrostatische Felder in einem beliebigen Inertialsystem	47
1.5.5 Beispiel: Homogen geladene Kugel	48
1.6 Magnetostatik	50
1.6.1 Das Biot-Savart-Gesetz	50
1.6.2 Beispiel: Homogen geladene rotierende Kugel	52
1.6.3 Magnetostatische Multipolentwicklung	53
1.7 Freie Elektromagnetische Wellen	58
1.7.1 Allgemeine Betrachtungen zu freien Feldern	58
1.7.2 Ebene Wellen	60
1.7.3 Wellenpakete	63
1.7.4 Skalare Kugelwellen	64
1.7.5 Vektorielle Kugelwellen	66
1.7.6 Multipolentwicklung des elektromagnetischen Feldes	71
1.8 Felder zeitabhängiger Ladungs- und Stromverteilungen	72
1.8.1 Die retardierten Potentiale (Lorenz-Eichung)	72
1.8.2 Das retardierte elektromagnetische Feld	76
1.8.3 Das Anfangswertproblem	77
1.8.4 Die Multipolmomente des elektromagnetischen Feldes	80
1.8.5 Die Potentiale in Coulomb-Eichung	85
1.9 Klassische geladene Teilchen	85
1.9.1 Liénard-Wiechert-Potentiale	85

1.9.2	Synchrotronstrahlung	85
1.9.3	Strahlungsrückwirkung	85
2	Elektromagnetismus in kontinuierlichen Medien	87
2.1	Elektrische Leitfähigkeit	87
2.1.1	Randwertaufgaben der Elektrostatik (leitende Medien)	87
2.2	Elektrische Polarisierbarkeit	87
2.2.1	Randwertaufgaben der Elektrostatik (Dielektrika)	87
2.3	Magnetische Polarisierbarkeit	87
2.4	Phänomenologische Theorie der Supraleitung	87
2.5	Wellenleiter	87
2.6	Hohlraumresonatoren	87
3	Optik	89
3.1	Streutheorie und Beugung	89
3.2	Klassische Dispersionstheorie	89
3.3	Brechungs- und Reflexionsgesetz	89
3.4	Kristalloptik	89
3.5	Strahlenoptik	89
A	Einheitensysteme in der Elektrodynamik	91
A.1	SI-Einheiten	91
A.2	Umrechnung zwischen Heaviside-Lorentz- und SI-Einheiten	93
B	Formelsammlung	95
B.1	Vektoranalysis im euklidischen \mathbb{R}^3	95
B.1.1	Dreidimensionale Vektoranalysis (kartesische Koordinaten)	95
B.1.2	Dreidimensionale Vektoranalysis (Kugelkoordinaten)	96
B.1.3	Dreidimensionale Vektoranalysis (Zylinderkoordinaten)	97
B.1.4	Der Drehimpulsoperator	97
B.2	Vektoranalysis im Minkowskiraum	98
C	Orthogonale Funktionensysteme	103
C.1	Der Hilbert-Raum L^2	103
C.2	Fourier-Reihen und -Integrale	103
C.3	Kugelflächenfunktionen	103
C.4	Sphärische Bessel-Funktionen	105
C.5	Zylindrische Bessel-Funktionen	105
D	Partielle Differentialgleichungen	107
D.1	Laplace- und Poisson-Gleichung	107
D.2	Die Wellengleichung	107
	Literaturverzeichnis	113

Kapitel 1

Das elektromagnetische Feld im Vakuum

1.1 Heuristische Einführung

Zur Behandlung der **klassischen Elektrodynamik** benötigen wir gegenüber der **Mechanik** einige neue Begriffsbildungen, die sich in der Physikgeschichte am Ende eines längeren Entwicklungsprozesses herauskristallisiert haben, nämlich die auf **Faraday** zurückgehende und durch **Maxwell** sodann mathematisch ausgebildete Idee des **elektromagnetischen Feldes**. Physikalisch bedeutete dies die Abkehr vom Newtonschen Konzept der **Fernwirkung**, wie sie sich in seinem **Gravitationsgesetz** manifestiert. Unser Ausgangspunkt werden daher von Anfang an die **Maxwellschen Gleichungen** sein, die wir nach den klassischen Vorbildern der klassischen Lehrbuchliteratur (vgl. z.B. [Som01, Bec82]) an die Spitze unserer Betrachtungen stellen. Sehr empfehlenswerte Standardreferenzen für Lehrbücher zur klassischen Elektrodynamik sind [Jac83, SDM⁺98, LL92]. Das Standardwerk zur Problematik der klassischen Behandlung von Punktteilchen ist [Roh07]. Konzeptionell ist dieses Skript insbesondere an [Sch10] angelehnt.

Ihren konzeptionellen Abschluß hat die Maxwellsche Elektrodynamik und mit ihr die gesamte klassische Physik erst mit der Entwicklung der Relativitätstheorie am Ende des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts durch die Arbeiten von **Heaviside**, **Lorentz**, **FitzGerald**, **Poincaré** und vor allem **Einstein** und **Minkowski** erfahren [Ein05]. Daher werden wir uns in diesem Manuskript im Gegensatz zu den meisten traditionellen Darstellungen von Anfang an auf den relativistischen Standpunkt stellen und die klassische Elektrodynamik von Beginn an als relativistische Feldtheorie in kovarianter Notation formulieren. Freilich ist es dann für konkrete Rechnungen bequemer, die dreidimensionale Vektoranalysis in einem festen Inertialsystem zu verwenden und ggf. anwendbare nichtrelativistische Näherungen vorzunehmen.

In diesem einführenden Abschnitt stellen wir uns aber zunächst auf den traditionellen Standpunkt und erläutern die Bedeutung der grundlegenden Größen, also **elektrisches und magnetisches Feld** sowie **Ladungen und Ströme** in traditioneller Weise. Dabei beschränken wir uns in diesem Kapitel zunächst auf das Vakuum als Ausgangspunkt für die Beschreibung der elektromagnetischen Erscheinungen auf elementarer Ebene. In Kapitel 2 werden wir dann die übliche **Lineare-Antworttheorie** für die Beschreibung des elektromagnetischen Verhaltens makroskopischer Materie verwenden, wobei wir uns weiterhin im rein klassischen Teilchenbild bzw. der Kontinuumsmechanik bewegen werden.

Eine didaktisch etwas heikle Frage ist die Wahl des **Einheitensystems**. Einerseits ist in der experimentellen Physik und der Technik das **Internationale Einheitensystem (SI)** die Standardwahl. Selbstverständlich läßt sich auch in der theoretischen Physik im Prinzip problemlos in SI-Einheiten rechnen. Allerdings werden einige physikalische Zusammenhänge, insbesondere im relativistischen Kontext, recht undeutlich, und so wähle ich hier das **rationalisierte Gaußsche Maßsystem**, auch als **Heaviside-Lorentzches Maßsystem** bekannt, welches insbesondere in der theoretischen Hochenergiepartikelphysik und relativistischen Quantenfeldtheorie die Standardwahl ist. In Anhang A stelle ich die Beziehungen zwischen den verschiedenen anderen in der Literatur gebräuchlichen Einheitensystemen (SI, nicht-rationalisiertes Gauß-System) zum Heaviside-Lorentz-

System zusammen.

Beschäftigen wir uns jedoch zunächst mit den heuristischen Grundlagen, die der Beschreibung elektromagnetischer Phänomene zugrundeliegt. Der Ausgangspunkt ist die **Elektrostatik** und die Beobachtung, daß die Materie außer der Masse eine weitere charakteristische Größe aufweist, nämlich die **elektrische Ladung**. Durch Reiben bestimmter Materialien (z.B. Bernstein, dessen griechischer Name „Elektron“ dem Gebiet seinen Namen gegeben hat) lassen sich diese „aufladen“. Dies äußert sich in der Kraftwirkung geladener Körper. Begeben wir uns in ein Inertialsystem, so wirkt zwischen zwei Körpern, die mit einer bestimmten Ladungsmenge q_1 bzw. q_2 aufgeladen und in gegenüber ihrer Ausdehnung großem Abstand voneinander angeordnet sind, so stellt man zwischen ihnen eine entlang der Verbindungslinie der Orte beider Ladungen wirkende Kraft fest, die proportional zum inversen Abstandsquadrat ist. Es gilt also das **Coulomb-Gesetz**

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \quad (1.1.1)$$

Dies ist die Kraft, die auf den mit der Ladung q_1 versehenen am Ort \vec{x}_1 lokalisierten Körper aufgrund der Anwesenheit des mit q_2 geladenen Körpers bei \vec{x}_2 wirkt. Dabei erscheint der Faktor 4π im Nenner zunächst willkürlich, legt aber implizit die Wahl der **Ladungseinheit** über die Kraftwirkung auf die geladenen Körper fest. Die Wahl des Faktors 4π entspricht der Konvention eines „rationalisierten Einheitensystems“. Wir werden gleich noch sehen, woher diese Bezeichnung rührt.

Wir bemerken hierzu, daß auf elementarer Ebene die **elektrische Ladung** eine fundamentale intrinsische Eigenschaft der **Elementarteilchen** ist. Sie tritt stets in ganzzahligen Vielfachen der **Elementarladung**¹ auf und kann positiv und negativ sein. Das Coulomb-Gesetz (1.1.1) besagt demnach, daß sich Ladungen mit gleichem Vorzeichen abstoßen und solche mit entgegengesetztem Vorzeichen anziehen. Im Zusammenhang mit der im Alltag auftretenden Materie sind aus Sicht der Elementarteilchenphysik betrachtet nur die drei Teilchen **Elektron, Proton und Neutron** relevant. Das Proton besitzt eine positive, das Elektron eine negative Elementarladung, und die Neutronen sind elektrisch neutral. Die Protonen und Neutronen werden durch die starke Wechselwirkung zu Atomkernen gebunden, um die herum sich wiederum aufgrund der elektromagnetischen Anziehung die Elektronen gruppieren und **elektrisch neutrale Atome** bilden. Diese verbinden sich zu Molekülen und bilden die gesamte uns umgebende makroskopische Materie. Die für „Normalbedingungen“ wesentlichen Eigenschaften der Materie werden also weitgehend durch die elektromagnetische Wechselwirkung bestimmt. Die genaue theoretische Beschreibung dieses Aufbaus kann zwar erst die Quantentheorie liefern. Allerdings sind die meisten makroskopischen Phänomene der Elektrodynamik mit **klassischen Vielteilchenmodellen bzw. kontinuumsmechanischen Beschreibungen der Materie** und der **klassischen Elektrodynamik** beschreibbar, und dies ist der Gegenstand dieses Manuskripts.

Eine weitere Beobachtung ist, daß sich solche Coulomb-Kräfte linear überlagern, d.h. hat man weitere Körper, so wirkt auf Körper 1 die Gesamtkraft

$$\vec{F}_1 = \sum_n \vec{F}_{1n} = q_1 \sum_n \frac{q_n}{4\pi |\vec{x}_1 - \vec{x}_n|^2} \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_n}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_n|}. \quad (1.1.2)$$

Diese Schreibweise suggeriert nun schon die sehr wichtige Interpretation der **elektrostatischen Wechselwirkung** als **Feldwirkung**. Die Summe ist nämlich eine von den intrinsischen Eigenschaften der „Probeladung“, für die wir die Kraftwirkung aufgrund der übrigen im Raum verteilten Ladungen messen, unabhängige Größe, die wir als **elektrisches Feld** bezeichnen:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_n \frac{q_n}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_n|^2} \frac{\vec{x} - \vec{x}_n}{|\vec{x} - \vec{x}_n|}. \quad (1.1.3)$$

¹Streng genommen sind die Quarks, aus denen die Hadronen, u.a. also auch die Kernbausteine Proton und Neutron, zusammengesetzt sind Teilchen mit drittelzahligen Ladungen. Allerdings treten sie im Bereich der klassischen Elektrodynamik nicht auf, da sie nicht als freie Teilchen existieren („Quark-Confinement“).

1.1. Heuristische Einführung

Wie wir aufgrund der Formel sehen, ist dies ein **Vektorfeld hinsichtlich Drehungen** im Raum \mathbb{R}^3 . Unter **Translationen im Raum** ist es ein Skalar. Wir bemerken sogleich, daß wir an dieser Stelle rein statische Probleme betrachten und (1.1.3) in dieser Form nur für ruhende Ladungen gilt.

Eine der Feldbeschreibung, die ihrem Wesen nach eine Kontinuumsstheorie ist, eher angepaßte Beschreibung der Ladungen ist es, diese durch die **Ladungsdichte** anzugeben. Wir denken uns also den von geladener Materie erfüllten Raum in makroskopisch große Zellen eingeteilt, in denen sich jeweils sehr viele Teilchen (z.B. Atome, Moleküle oder Elektronen im Falle der uns im Alltag umgebenden Materie) befinden. Im Sinne einer Mittelwertbildung über den Ladungsinhalt diese makroskopisch großen aber mikroskopisch kleinen Volumenelemente, auf die wir später in Kapitel 2 noch genauer eingehen werden, können wir dann die Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ an der Stelle \vec{x} als die Ladung in einem Volumenelement pro Volumen definieren. Die Ladungsdichte wird i.a. auch von der Zeit abhängen. Das elektrische Feld aufgrund einer solchen Ladungsverteilung können wir uns dann im Sinne von (1.1.3) als Superposition der Felder der Ladung in den Volumenelementen vorstellen, wobei die Summe in ein Integral übergeht. Dann erhalten wir (wieder spezialisiert auf den statischen Fall)

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|^2} \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \quad (1.1.4)$$

Den Fall diskreter Punktladungen können wir in diese allgemeinere Kontinuumsbeschreibung subsumieren, indem wir die δ -Distribution verwenden. Offenbar erhalten wir nämlich (1.1.3) zurück, wenn wir in (1.1.4)

$$\rho(\vec{x}) = \sum_n q_n \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_n) \quad (1.1.5)$$

setzen.

In (1.1.4) haben wir für den statischen Fall das elektrische Feld bei vorgegebener Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ angegeben. Die umgekehrte Frage ist nun, wie wir bei gegebenem elektrischen Feld die Ladungsverteilung berechnen können. Erinnern wir uns dazu der Vektoranalysis (siehe z.B. [CH10] und die Formelsammlung in Anhang B.1), sehen wir, daß die Bildung der Divergenz zum Ziel führt. Dazu können wir in (1.1.4) die partiellen Ableitungen bzgl. \vec{x} mit der Integration vertauschen. Um die Divergenzbildung auszuführen, betrachten wir zunächst ganz allgemein ein Vektorfeld der Gestalt

$$\vec{V}(\vec{x}) = a(\vec{x})\vec{b}(\vec{x}) \quad (1.1.6)$$

und bilden die Divergenz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}) = \partial_j (a b_j) = b_j \partial_j a + a \partial_j b_j = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} a + a \vec{\nabla} \cdot \vec{b}. \quad (1.1.7)$$

Wenden wir dies auf die im Integranden von (1.1.4) auftretende Funktion an, setzen also

$$a(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \quad \vec{b}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{x}' \Rightarrow \vec{V}(\vec{x}) = \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \quad (1.1.8)$$

erhalten wir

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} a(\vec{x}) = -\frac{3(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5}, \quad \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{b}(\vec{x}) = 3 \quad \text{für } \vec{x} \neq \vec{x}' \quad (1.1.9)$$

und damit

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = 0 \quad \text{für } \vec{x} \neq \vec{x}'. \quad (1.1.10)$$

Wir müssen nun noch den singulären Punkt bei $\vec{x} = \vec{x}'$ genauer betrachten. Wir erinnern uns dazu der Definition der Divergenz über ein Oberflächenintegral. Sei dazu $V \subset \mathbb{R}^3$ ein Bereich, der den Punkt \vec{x} enthält.

Dessen Oberfläche ∂V sei so orientiert, daß die Flächennormalenvektoren aus dem Volumen herausweisen. Dann ist die allgemeine Definition der Divergenz durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}) = \lim_{V \rightarrow \{\vec{x}\}} \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} d^2 \vec{F}(\vec{x}') \cdot V(\vec{x}') \quad (1.1.11)$$

gegeben. Dabei bezeichnen wir mit $|V|$ das Volumen des Bereichs V und der Limes $V \rightarrow \{\vec{x}\}$ bedeutet, daß wir das Volumen um \vec{x} immer kleiner machen, wobei allerdings der Punkt \vec{x} stets innerhalb dieses Volumens liegt. Freilich wird dieser Grenzwert nur dort existieren, wo \vec{V} eine Divergenz im naiven Sinne besitzt.

Um nun das Verhalten um die Singularität von (1.1.10) bei $\vec{x} = \vec{x}'$ zu untersuchen, wählen wir für V die Kugel $K_R(\vec{x}')$ um \vec{x}' mit Radius R . Das Oberflächenintegral über unser Vektorfeld berechnen wir in der Standardparametrisierung

$$K_R(\vec{x}') : \quad \vec{x} = \vec{x}' + R \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in (0, \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (1.1.12)$$

Die Oberflächenelementvektoren sind durch

$$d\vec{F} = d\vartheta d\varphi \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = d\vartheta d\varphi R^2 \sin \vartheta \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (1.1.13)$$

gegeben. Die Orientierung ist durch unsere Wahl der Reihenfolge der Faktoren im Vektorprodukt bereits korrekt gewählt, da die Flächenelementvektoren radial von der Kugel wegweisen, wie es definitionsgemäß sein soll. Damit erhalten wir

$$\int_{\partial K_R(\vec{x}')} d^2 \vec{F}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta = 4\pi. \quad (1.1.14)$$

Die Divergenz dieses Vektorfeldes im Punkt $\vec{x} = \vec{x}'$ divergiert also, denn das Kugelvolumen ist ja $|K_R(\vec{x}')| = 4\pi R^3/3 \rightarrow 0$ für $R \rightarrow 0$. Andererseits gilt aufgrund des Gaußschen Integralsatzes offenbar für jedes endliche, den Punkt \vec{x}' im Inneren enthaltende Volumen V und jede Kugel $K_\epsilon(\vec{x}')$, deren Radius so klein ist, daß sie ganz im Inneren von V enthalten ist

$$0 \stackrel{(1.1.10)}{=} \int_{V \setminus K_\epsilon(\vec{x}')} d^3 \vec{x} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \int_{\partial V} d^2 \vec{F}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - \int_{\partial K_\epsilon(\vec{x}')} d^2 \vec{F}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (1.1.15)$$

Das Minuszeichen beim zweiten Integranden ergibt sich daraus, daß nun beim Oberflächenintegral über die kleine Kugelfläche entsprechend der Orientierungskonvention die Flächennormalenvektoren radial nach innen weisen müssen, definitionsgemäß jedoch $\partial K_\epsilon(\vec{x}')$ entgegengesetzt orientiert ist.

Unter Verwendung von (1.1.14) folgt daraus

$$\int_V d^3 \vec{x} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \int_{\partial V} d^2 \vec{F}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = 4\pi. \quad (1.1.16)$$

Dabei ist im Volumenintegral die Divergenz als **Distribution** zu lesen. Da ferner diese Distribution für $\vec{x} \neq \vec{x}'$ verschwindet, liegt die Vermutung nahe, daß

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = 4\pi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.1.17)$$

1.1. Heuristische Einführung

ist.

Um diese Vermutung zu beweisen, betrachten wir eine hinreichend schnell abfallende und glatte Testfunktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und versuchen nachzuweisen, daß

$$I(\vec{x}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} f(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \stackrel{?}{=} 4\pi f(\vec{x}') \quad (1.1.18)$$

gilt.

Dazu erinnern wir uns des **1. Greenschen Satzes**, der aus dem Gaußschen Integralsatz und (1.1.7) hervorgeht:

$$\int_{\partial V} d\vec{F}(\vec{x}) a(\vec{x}) \vec{b}(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x} \{ a(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{b}(\vec{x}) + [\vec{\nabla}_{\vec{x}} a(\vec{x})] \cdot \vec{b}(\vec{x}) \}. \quad (1.1.19)$$

D.h. es ist

$$\int_V d^3\vec{x} a(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{b}(\vec{x}) = \int_{\partial V} d\vec{F}(\vec{x}) a(\vec{x}) \vec{b}(\vec{x}) - \int_V d^3\vec{x} [\vec{\nabla}_{\vec{x}} a(\vec{x})] \cdot \vec{b}(\vec{x}). \quad (1.1.20)$$

Nun gilt zunächst für jedes $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} I(\vec{x}') &= \int_{K_\epsilon(\vec{x}')} d^3\vec{x} f(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K_\epsilon(\vec{x}')} d^3\vec{x} f(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &\stackrel{(1.1.10)}{=} \int_{K_\epsilon(\vec{x}')} d^3\vec{x} f(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Mit dem Greenschen Satz erhalten wir also für jedes ϵ

$$\begin{aligned} I(\vec{x}') &= \int_{\partial K_\epsilon(\vec{x}')} d^2\vec{F}(\vec{x}) \cdot f(\vec{x}) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - \int_{K_\epsilon(\vec{x}')} d^3\vec{x} [\vec{\nabla}_{\vec{x}} f(\vec{x})] \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta f(\vec{x}' + \epsilon \hat{r}) - \int_0^\epsilon dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta \partial_r f(\vec{x}' + r \hat{r}), \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

wobei wir wieder Polarkoordinaten um \vec{x}' mit

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (1.1.23)$$

eingeführt haben. Für das erste Integral ergibt sich für $\epsilon \rightarrow 0$ in der Tat $4\pi f(\vec{x}')$, und das zweite verschwindet. Damit ist aber (1.1.18) bewiesen.

Wenden wir dieses Resultat nun an, um die Divergenz von (1.1.4) zu berechnen, erhalten wir die erste der vier **Maxwell-Gleichungen**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho. \quad (1.1.24)$$

Diese Gleichung gilt allgemein, und nicht nur für den statischen Fall, anhand dessen wir sie hergeleitet haben und wird als **Gaußsches Gesetz** bezeichnet.

Das **magnetische Feld** rührt im Alltag meist von Permanentmagneten her. Wir gehen an dieser Stelle nicht auf die mikroskopische Theorie dieses **Ferromagnetismus** ein, da dazu die Quantentheorie erforderlich ist. Wir bemerken nur so viel, daß die Elementarteilchen außer ihrer Ladung auch ein **magnetisches Moment** aufweisen, womit wir uns in Abschnitt 1.6.3 noch genauer beschäftigen werden. Hier wollen wir nur zur Definition des magnetischen Feldes anführen, daß auf eine Punktladung q , die sich in einem Magnetfeld \vec{B} bewegt, die **Lorentzkraft**

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \quad (1.1.25)$$

wirkt. Dabei ist c ein Parameter von der Dimension einer Geschwindigkeit, welcher sich als die **Lichtgeschwindigkeit** im Vakuum erweist. Auch darauf gehen wir erst weiter unten im Kontext mit der eigentlich adäquaten relativistischen Behandlung des Elektromagnetismus' ein.

Während wir oben gesehen haben, daß das elektrische Feld Ladungen als Quellen hat, und die Elementarteilchen entsprechende Ladungen besitzen, aus denen sich die Ladung der makroskopischen Materie ergibt, gibt es aller Erfahrung nach **keine magnetischen Einzelladungen (Monopole)**. Dies drücken wir entsprechend als allgemeingültige Eigenschaft des magnetischen Feldes durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1.26)$$

aus. Zunächst sah es lange so aus, als seien Elektrizität und Magnetismus zwei voneinander gänzlich unabhängige Phänomene. Dies änderte sich erst als dank der Entdeckung des **Galvanischen Effekts** außer der statischen Reibungselektrizität auch elektrische Ströme verfügbar wurden. Entsprechend entdeckte **Ørsted**, daß Kompaßnadeln durch elektrische Ströme abgelenkt werden, mit elektrischen Strömen also Magnetfelder verbunden sind.

Das quantitative Gesetz dazu stammt von **Ampère**. Sein **Durchflutungsgesetz** für den Fall statischer Ströme und Felder besagt, daß das Linienintegral über das Magnetfeld entlang des Randes ∂F einer Fläche F gleich ist dem gesamten durch diese Fläche fließenden **elektrischen Strom**. Dabei bezeichnet man als elektrischen Strom die pro Zeiteinheit durch die Fläche strömende Ladung. Dabei ist das Vorzeichen des elektrischen Stromes außer durch das Vorzeichen der strömenden Ladungsträger auch durch die Orientierung der Flächennormalenvektoren definiert. Der Rand der Fläche ist im Sinne der **Rechte-Hand-Regel** zu orientieren: Weist der Daumen der rechten Hand in Richtung der Flächennormalenvektoren, so zeigen die Finger in die Umlaufrichtung des Randes dieser Fläche. Mit diesen Konventionen (und der Wahl „rationaler“ Heaviside-Lorentz-Einheiten lautet demnach das **Ampèresche Durchflutungsgesetz**

$$\int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{c}. \quad (1.1.27)$$

Der Factor $1/c$ (inverse Lichtgeschwindigkeit) auf der rechten Seite dient dazu, die Einheiten des magnetischen Feldes so festzulegen, daß es dieselbe Dimension wie das elektrische Feld besitzt, wie es auch die Formel für die Lorentzkraft (1.1.25) erfordert. Diese rechte Seite können wir noch etwas ausführlicher schreiben, indem wir den **Stromdichtevektor** einführen. Sei dazu $\rho(\vec{x})$ die Ladungsdichte der nun strömenden Ladung und $\vec{v}(\vec{x})$ das Geschwindigkeitsfeld des entsprechenden Fluids im Sinne der Kontinuumsmechanik, so ist offenbar $dq = dt d\vec{F} \cdot \rho(\vec{x})\vec{v}(\vec{x})$ die während der kleinen Zeit dt durch das Flächenelement $d\vec{F}$ strömende elektrische Ladung. Entsprechend bezeichnen wir mit

$$\vec{j}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}) \quad (1.1.28)$$

den **Stromdichtevektor der elektrischen Ladung**. Damit schreibt sich (1.1.28)

$$\int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_F d\vec{F} \cdot \vec{j}(\vec{x}). \quad (1.1.29)$$

Die linke Seite können wir nun nach dem **Stokesschen Integralsatz** gleichfalls als Flächenintegral ausdrücken. Dann erhalten wir

$$\int_F d\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{c} \int_F d\vec{F} \cdot \vec{j}(\vec{x}). \quad (1.1.30)$$

Da diese Gleichung für jede Fläche F gilt, können wir das Durchflutungsgesetz auch in differentieller Form durch

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \vec{j}(\vec{x}) \quad (1.1.31)$$

1.1. Heuristische Einführung

ausdrücken. Dieses Gesetz gilt nun nur im **Fall zeitunabhängiger Ströme und Felder**. Wie Maxwell entdeckt hat, ist im nichtstationären Fall, also wenn Ladungen, Ströme und Felder zeitabhängig sind, auf der rechten Seite die Stromdichte durch den sogenannten **Maxwellschen Verschiebungsstrom** $\partial_t \vec{E}/c$ zu ergänzen. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, gehört dieser Term logisch aber auf die linke Seite der Gleichung. Wir notieren also die allgemeingültige Form des **Ampère-Maxwell-Gesetzes** in der Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{j}(t, \vec{x}). \quad (1.1.32)$$

Es fehlt uns nunmehr noch eine letzte fundamentale Gleichung, das **Faradaysche Induktionsgesetz**. Es beschreibt die Induktion elektrischer Ringspannungen oder **elektromotorischer Kräfte** durch die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses. Wir notieren es sogleich in differentieller Form in der Gestalt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0, \quad (1.1.33)$$

in der es allgemein gültig ist. Wir werden im folgenden noch auf die genaue Anwendung und die physikalische Bedeutung all dieser Gleichungen genauer eingehen. Insbesondere das Faradaysche Gesetz macht zuweilen Probleme, wenn man es mit beweglichen Elementen wie Leiterschleifen in Magnetfeldern (Generator) oder mit beweglichen Magneten (Unipolargenerator) zu tun hat. Wie wir sehen werden, lösen sich damit zusammenhängende scheinbare Paradoxa problemlos auf, sobald man sich auf den korrekten relativistischen Standpunkt stellt. Wir beschließen diese heuristische Einleitung, indem wir die nunmehr vollständig zusammengetragenen Maxwell-Gleichungen nochmals übersichtlich hinschreiben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x}), \quad (1.1.34)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{j}(t, \vec{x}), \quad (1.1.35)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0, \quad (1.1.36)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0. \quad (1.1.37)$$

Dabei heißen die ersten beiden Gleichungen die **inhomogenen** und die letzten beiden Gleichungen die **homogenen Maxwell-Gleichungen**². In der obigen Form haben wir die **mikroskopischen Gleichungen** angegeben, d.h. unter den auf der rechten Seite auftretenden Größen sind *sämtliche* Ladungen zu verstehen. Wir gehen auf die makroskopische effektive Form der Maxwell-Gleichungen erst in Kapitel 2 ein, wo wir sie als Folge der mikroskopischen Gleichungen unter bestimmten Näherungsannahmen über die durch Mittelung über die mikroskopischen Freiheitsgrade der Materie entstehenden makroskopischen Größen herleiten werden. Wir werden dort auch sehen, wie wir die Magnetisierung von Permanentmagneten in (1.1.35) berücksichtigen können. Es wird sich zeigen, daß dabei auf der rechten Seite ein Term $\vec{j}_{\text{mag}} = c \vec{\nabla} \times \vec{M}(t, \vec{x})$ zur Stromdichte hinzutreten wird, wo \vec{M} die **Magnetisierungsdichte** des Materials ist.

Als weitere fundamentale Gleichung ist noch die **Lorentz-Kraft** auf eine Punktladung aufgrund der Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad (1.1.38)$$

anzuführen. Wir beschließen diese kurzen heuristischen Betrachtungen mit der Feststellung, daß aus den beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen die Erhaltung der elektrischen Ladung als Konsistenzbedingung

²Die Gleichungen werden auch nach ihren wesentlichen Entdeckern benannt: So heißen (1.1.34) und (1.1.35) jeweils das **Gaußsche Gesetz für das elektrische bzw. magnetische Feld**, (1.1.36) das **Ampère-Maxwellsche Durchflutungsgesetz** und (1.1.37) das **Faradaysche Induktionsgesetz**.

folgt. Dazu bilden wir die Zeitableitung der Gleichung (1.1.34) und die Divergenz von (1.1.35). Wegen $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ folgt dann

$$-\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.1.39)$$

Dies können wir in Form der **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.1.40)$$

schreiben. Um zu sehen, daß dies wirklich nichts anderes als die Erhaltung der elektrischen Ladung bedeutet, integrieren wir diese Gleichung über ein zeitlich konstantes Volumen V mit in kanonischer Weise orientiertem Rand ∂V . Mit dem Gaußschen Integralsatz folgt dann

$$\frac{dQ_V}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V d^3\vec{x} \rho(t, \vec{x}) = - \int_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) = - \int_{\partial V} d\vec{F} \cdot \rho(t, \vec{x}) \vec{v}(t, \vec{x}). \quad (1.1.41)$$

In der Tat besagt diese Gleichung, daß die Änderung der im Volumen V befindlichen Ladung pro Zeiteinheit gerade durch den Fluß der Ladung durch die Oberfläche des Volumens gegeben ist, und das bedeutet die Erhaltung der Ladung. Nimmt man an, daß die Ladungsdichte und der Fluß der Ladungsträger hinreichend schnell im Unendlichen abfallen, was wir unter realen Bedingungen stets annehmen dürfen, so folgt

$$\frac{dQ_{\text{tot}}}{dt} = 0, \quad (1.1.42)$$

d.h. die Gesamtladung in einem abgeschlossenen System bleibt erhalten.

Schließlich betrachten wir noch die **Integralform der Maxwell-Gleichungen**. Diese wird in der Literatur oft an die Spitze gestellt, weil sie die historisch ältere Beschreibungsweise der elektromagnetischen Erscheinungen darstellt. Dies ist insofern verständlich als in der experimentellen Praxis mit ausgedehnten Systemen hantiert wird. Allerdings ist dies nicht die fundamentale Betrachtungsweise, denn die Elektrodynamik stellt ja aus moderner Sicht, wie schon oben betont, eine **lokale relativistische Feldtheorie** dar, und daher ist die differentielle Beschreibung natürlicher und insofern auch einfacher.

Man gelangt prinzipiell auch sehr einfach von den differentiellen zu den integralen Formen der Maxwell-Gleichungen, indem man die jeweils anwendbaren Integralsätze der dreidimensionalen Vektoranalysis anwendet. Unproblematisch sind dabei die Maxwell-Gleichungen, die keine Zeitableitungen enthalten. Integrieren wir nämlich das **Gaußsche Gesetz** (1.1.34) zu einem festen Zeitpunkt über ein beliebiges Volumen V , das seinerseits wie das elektrische Feld und/oder die Ladungsdichte ebenfalls zeitabhängig sein darf, erhalten wir unter Anwendung des **Gaußschen Integralsatzes**

$$\Phi_{\vec{E}, \partial V}(t) := \int_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = \int_V d^3\vec{x} \rho(t, \vec{x}) = Q_V(t). \quad (1.1.43)$$

Dabei ist definitionsgemäß die Orientierung des Randes ∂V des Volumens V so gewählt, daß die Flächennormalenelemente $d\vec{F}$ stets vom Volumen wegzeigen. die so definierte Größe heißt $\Phi_{\vec{E}, \partial V}$ heißt **Fluß des elektrischen Feldes** durch die geschlossene Fläche ∂V . Dieser Name erklärt sich aus der mathematischen Analogie zu dem oben betrachteten Flächenintegral über die Stromdichte. In der integralen Form besagt das Gaußsche Gesetz, daß zu jedem Zeitpunkt, der elektrische Fluß über eine geschlossene Oberfläche der im eingeschlossenen Volumen befindlichen Ladung entspricht. Grob gesprochen kann man sagen die elektrischen Feldlinien beginnen bei positiven und enden bei negativen Ladungen. Dies ist bei Punktladungen wörtlich zu nehmen, denn dort ist das entsprechende Coulombfeld ja tatsächlich singular. Bei kontinuierlichen Ladungsverteilungen liegen freilich i.a. keinerlei Singularitäten des Feldes vor.

1.1. Heuristische Einführung

Ebenso folgt aus dem Gaußschen Gesetz für das Magnetfeld (1.1.36)

$$\Phi_{\vec{B}, \partial V} = \int_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0, \quad (1.1.44)$$

d.h. der magnetische Fluß durch eine **beliebige geschlossene Fläche** verschwindet stets. Die magnetischen Feldlinien sind also stets geschlossen und quellenfrei.

Im Prinzip sind auch die Integralformen von Durchflutungs- und Induktionsgesetz, die Zeitableitungen enthalten nicht komplizierter in eine Integralform zu bringen. Beginnen wir mit dem Faradayschen Induktionsgesetz (1.1.37). Hier integrieren wir freilich über eine beliebige Fläche F , die mit einer beliebigen Orientierung ausgestattet sei. Die Randkurve ∂F sei verabredungsgemäß, wie in der dreidimensionalen Vektoranalysis üblich, gemäß der Rechte-Hand-Regel positiv relativ zu der Orientierung der Fläche orientiert, d.h. weist der Daumen der rechten Hand in die willkürlich festgelegte Richtung der Flächennormalen, so geben die Finger den dazugehörigen Durchlaufsinne der Randkurve an. Dann folgt durch Integration von (1.1.37) über diese Fläche zu einer festen Zeit t

$$\int_{\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = -\frac{1}{c} \int_F d\vec{F} \cdot \partial_t \vec{B}(t, \vec{x}). \quad (1.1.45)$$

Die Schwierigkeit besteht nun einzig darin, daß das Faradaysche Gesetz in seiner ursprünglichen integralen Form die Zeitableitung des magnetischen Flusses durch eine beliebige Fläche betrifft, d.h. wir suchen

$$\dot{\Phi}_{\vec{B}, F}(t) = \frac{d}{dt} \int_F d\vec{F} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}). \quad (1.1.46)$$

Ist hierbei die Fläche F unabhängig von der Zeit, kann man die Zeitableitung ohne weiteres als partielle Ableitung in das Integral hineinziehen, und dann kommt auf der rechten Seite von (1.1.45) einfach die Zeitableitung (1.1.46) zu stehen.

Betrachten wir nun aber eine zeitabhängige Fläche, die wir der Genauigkeit halber jetzt mit F_t bezeichnen wollen, ist bei der Zeitableitung auch die entsprechende Änderung dieser Fläche zu berücksichtigen. Wir müssen hier nämlich

$$dt \dot{\Phi}_{\vec{B}, F} = \int_{F_{t+dt}} d\vec{F} \cdot \vec{B}(t+dt, \vec{x}) - \int_{F_t} d\vec{F} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) \quad (1.1.47)$$

berechnen. Offensichtlich genügt uns dabei die Entwicklung der rechten Seite dieser Gleichung bis $\mathcal{O}(dt)$, d.h.

$$dt \dot{\Phi}_{\vec{B}, F} = dt \int_{F_t} d\vec{F} \cdot \partial_t \vec{B}(t, \vec{x}) + \int_{F_{t+dt}} d\vec{F} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) - \int_{F_t} d\vec{F} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) + \mathcal{O}(dt^2). \quad (1.1.48)$$

Um den Beitrag aufgrund der zeitlichen Änderung der Fläche zu berechnen, betrachten wir Abb. 1.1. Wir wenden den Gaußschen Integralsatz auf das dort gezeigte infinitesimale zylinderartige Volumen an, das durch die Bewegung der Fläche in dem infinitesimalen Zeitintervall $(t, t+dt)$ definiert wird. Dessen Randfläche besteht aus der Deckfläche F_{t+dt} , der Bodenfläche F_t und der Mantelfläche. Bei der Anwendung des Gaußschen Integralsatzes müssen die Flächennormalen nach außen weisen. Daher geht die Deckfläche mit positivem Vorzeichen, die Bodenfläche aber mit negativem Vorzeichen ein, weil definitionsgemäß die Orientierung für diese ursprünglichen Flächen in (1.1.48) so gewählt ist. Das entsprechend orientierte Flächenelement für die Mantelfläche ist bis auf Größen der Ordnung $\mathcal{O}(dt^2)$ durch $d\vec{F} = d\vec{x}|_{\partial F_t} \times \vec{v}(t, \vec{x}) dt$ gegeben. Dies liefert

$$\int_{dV} d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \int_{F_{t+dt}} d\vec{F} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) - \int_{F_t} d\vec{F} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) + dt \int_{\partial F_t} (d\vec{x} \times \vec{v}) \cdot \vec{B}. \quad (1.1.49)$$

Andererseits läßt sich das Volumenintegral in der gewünschten Ordnung $\mathcal{O}(dt)$ in der Form

$$\int_{dV} d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = dt \int_{F_t} d\vec{F} \cdot \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \quad (1.1.50)$$

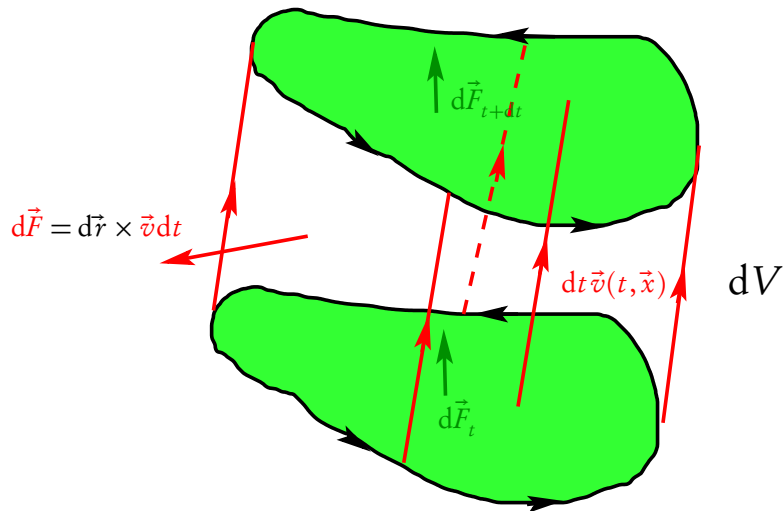


Abbildung 1.1: Kleines zylinderartiges Volumen dV , das von der Fläche während einer infinitesimalen Zeit dt durchlaufen wird (zur Ableitung des Flächenintegrals eines Vektorfeld über eine zeitabhängige Fläche).

schreiben. Dies in (1.1.49) eingesetzt ergibt

$$\int_{F_{t+dt}} d\vec{F} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) - \int_{F_t} d\vec{F} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = dt \left[\int_{F_t} d\vec{F} \cdot \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \int_{\partial F_t} d\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \right]. \quad (1.1.51)$$

Verwenden wir dies wiederum in (1.1.48), erhalten wir schließlich

$$\dot{\Phi}_{\vec{B}, F} = \int_{F_t} d\vec{F} \cdot [\partial_t \vec{B} + \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})] - \int_{\partial F_t} d\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.1.52)$$

Dies gilt zunächst für ein beliebiges Vektorfeld \vec{B} . Verwenden wir nun noch die Quellenfreiheit von \vec{B} , also $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ sowie das Faradaysche Gesetz in differentieller Form (1.1.37), erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{c} \dot{\Phi}_{\vec{B}, F} = - \int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (1.1.53)$$

Dies ist die allgemein gültige integrale Form für das Faradaysche Induktionsgesetz für beliebig bewegte Flächen. Wichtig ist, daß auf der rechten Seite dieser Gleichung die vollständige **elektromotorische Kraft**³

$$\mathcal{E} = \int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad (1.1.54)$$

zu stehen kommt. Beachtet man diese allgemeingültige Form, lassen sich viele vermeintliche Schwierigkeiten, die in der Literatur im Zusammenhang mit dem Faradayschen Gesetz immer wieder auftauchen, vermeiden. Wir kommen darauf bei der Besprechung der Homopolarinduktion weiter unten nochmals ausführlich zurück.

Auf die integrale Form des Ampère-Maxwell-Gesetzes (1.1.35) werden wir schließlich geführt, indem wir die zeitliche Ableitung des elektrischen Flusses

$$\Phi_{\vec{E}, F} = \int_F d\vec{F} \cdot \vec{E} \quad (1.1.55)$$

³Hier ist der Begriff „Kraft“ im Sinne einer energieartigen Größe zu verstehen. Es handelt sich hier ja formal um die Arbeit einer Einheitsladung entlang der geschlossenen Kurve ∂F im elektromagnetischen Feld.

betrachten, wobei die beliebig zeitabhängig gedachte Fläche und ihre Berandung wieder auf die übliche Weise gemäß der Rechte-Hand-Regel relativ zueinander orientiert seien, bilden. Dazu können wir wieder die allgemeingültige Formel (1.1.52) verwenden, woraus sich zunächst

$$\frac{1}{c} \dot{\Phi}_{\vec{E},F} = \frac{1}{c} \int_F d\vec{F} \cdot [\partial_t \vec{E} + \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})] - \int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \right) \quad (1.1.56)$$

ergibt. Gemäß dem Ampère-Maxwell-Gesetz können wir im Flächenintegral

$$\frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{j} \quad (1.1.57)$$

und mit dem Gaußschen Gesetz (1.1.34)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (1.1.58)$$

setzen. Wenden wir dann noch auf das Flächenintegral von $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ den Stokesschen Integralsatz an, erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{c} \dot{\Phi}_{\vec{E},F} = -\frac{1}{c} \int_F d\vec{F} \cdot (\vec{j} - \rho \vec{v}) + \int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \right). \quad (1.1.59)$$

Auch dieses Gesetz wird oft in der vereinfachten Form geschrieben, die entsteht, wenn man annimmt, daß $|\vec{v}| \ll c$ und $|\rho \vec{v}| \ll \vec{j}$ ist und folglich alle Terme $\propto \vec{v}/c$ in (1.1.59) vernachlässigt. Im Gegensatz einem ähnlichen Vorgehen im Zusammenhang mit dem Faradayschen Induktionsgesetz führen diese Vereinfachungen, die strikt genommen freilich nur für ruhende Integrationsflächen gelten, bei gewöhnlichen Anwendungen bei üblichen Geschwindigkeiten der involvierten realen Körper nur selten zu ernsthaften Schwierigkeiten. Wie wir weiter unten sehen werden, liegt dies darin begründet, daß schon kleine Geschwindigkeiten bei Phänomenen wieder Homopolarinduktion erhebliche elektromotorische Kräfte bedingen können.

Man kann mit Hilfe der unten hergeleiteten Transformationsformeln für das Verhalten der elektromagnetischen Größen beim relativistisch korrekten Wechsel von einem Inertialsystem zu einem anderen mittels der **Lorentz-Transformation** zeigen, daß die entsprechenden Zusatzterme in den Integralformeln für beliebig bewegte Integrationsflächen und -randkurven selbstverständlich notwendig für die Konsistenz der Integralform der Maxwell-Gleichungen mit dem speziellen Relativitätsprinzip sind [Mon04]. Dies ist nicht verwunderlich, denn die Maxwell-Gleichungen stellen eine vollständig relativistisch kovariante Feldtheorie dar, wie wir sogleich in den nächsten Abschnitten sehen werden.

Bei einer Anwendung dieser hier zunächst nur rein formal mathematisch hergeleiteten Formeln auf konkret bewegte Materie und die damit zusammenhängenden elektromagnetischen Phänomene zeigt sich, daß allein diese relativistische Betrachtungsweise zu einer vollkommen konsistenten Theorie der elektromagnetischen Phänomene in Materie führt. Insofern verwundert es nicht, daß erst mit der Analyse der Raum-Zeitstruktur durch Einstein [Ein05] und schließlich der relativistisch kovarianten Formulierung der makroskopischen Elektrodynamik durch Minkowski [Min10] die diesbezüglichen Probleme endgültig gelöst werden konnten. Wir werden darauf in Kapitel 2 ausführlich zurückkommen.

1.2 Elektromagnetische Potentiale und Eichsymmetrie

Wir wollen nun zeigen, daß die oben erörterten Maxwell-Gleichungen **relativistisch kovariant** formuliert werden können. Dazu wollen wir versuchen, sie im Rahmen des vierdimensionalen **Tensorkalküls** im Minkowskiraum zu formulieren. Dazu erinnern wir an unsere Behandlung der relativistischen Raum-Zeit-Struktur im Mechanikteil dieser FAQ [Hee08].

Dort hatten wir gesehen, daß es bequem ist, die Zeit und die Raumkoordinaten eines kartesischen Koordinatensystems, das bzgl. eines beliebigen Inertialsystems ruht, zu dem **Vierervektor** $x = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

mit $x^0 = ct$ zusammenzufassen. Dabei bedienen wir uns hochgestellter Indizes zum Durchnummerieren der Komponenten.

Der Wechsel von einem Inertialsystem $\Sigma(x^\mu)$ zu einem anderen $\Sigma(x'^\mu)$ erfolgt dabei durch eine **eigentlich orthochrone Lorentz-Transformation**, die durch eine reelle 4×4 -Matrix $\hat{\Lambda} = (\Lambda^\mu{}_\nu)$ gegeben ist:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (1.2.1)$$

Dabei erfüllt die Matrix die Bedingung, daß für zwei beliebige Vierervektoren das **Minkowski-Produkt**

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (1.2.2)$$

mit $(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ungeändert bleibt. Es ist also

$$x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = \eta_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu. \quad (1.2.3)$$

Dafür ist es notwendig und hinreichend, daß die Transformationsmatrix die **Pseudoorthogonalitätsrelation**

$$\hat{\Lambda}^t \hat{\Lambda} = \hat{\eta} \quad \text{oder} \quad \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \quad (1.2.4)$$

erfüllt. Für mit der Identität stetig verbundene Lorentz-Transformationen muß

$$\det \hat{\Lambda} = 1, \quad \text{und} \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad (1.2.5)$$

gelten. Diese Transformationen bilden eine Gruppe, die man als die **eigentlich orthochrone Lorentz-Gruppe** $\text{SO}(1,3)^\uparrow$ bezeichnet.

So wie in der klassischen Kontinuumstheorie die Skalar- und Vektor- bzw. allgemeiner die Tensorfelder bzgl. der Drehgruppe $\text{SO}(3)$ und die partiellen Ableitungen sowie die diversen Integrationen über Volumen, Flächen und Wege die adäquate mathematische Sprache darstellen, um unter Drehungen kovariante Formulierungen von physikalischen Sachverhalten zu finden, so kann man in der **relativistischen Feldtheorie** entsprechende Begriffe im vierdimensionalen Minkowskiraum bilden, also versuchen, die Naturgesetze in Gestalt von Vierertensorfeldern und entsprechenden Operationen zu formulieren, und genau das wollen wir nun für die Elektrodynamik ausführen. Den mathematischen Kalkül der vierdimensionalen Vektoranalysis werden wir dabei gleichzeitig mitentwickeln. Da nun die Drehungen eine Untergruppe der $\text{SO}(1,3)^\uparrow$ bilden, kann man die entsprechenden Gesetze bzgl. eines beliebigen aber dann festliegenden Inertialsystems auch im Dreierkalkül formulieren, und in dieser Form liegen uns die Maxwell-Gleichungen in der Gestalt (1.1.34-1.1.37) vor.

Wir können uns zunächst die Übersetzungsarbeit in den Viererformalismus erleichtern, indem wir zuerst die homogenen Maxwell-Gleichungen (1.1.36) und (1.1.37) betrachten. Sie stellen aus rein mathematischer Sicht **Zwangsbedingungen** für die Felder dar, die wir zunächst ausnützen können, um die Zahl der expliziten Freiheitsgrade von 6 (drei Komponenten des elektrischen und drei Komponenten des magnetischen Feldes) auf 4 zu reduzieren. Dazu erinnern wir uns des **Helmholtzschens Fundamentalsatzes der Vektoranalysis** (vgl. [CH10]).

Aus (1.1.36) folgt demnach, daß das magnetische Feld als Wirbelfeld eines **Vektorpotentials** geschrieben werden kann, d.h. es existiert ein Vektorfeld $\vec{A}(t, \vec{x})$, so daß

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{x}) \quad (1.2.6)$$

gilt. setzen wir dies in (1.1.37) ein, folgt

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t} \right] = 0. \quad (1.2.7)$$

1.2. Elektromagnetische Potentiale und Eichsymmetrie

Ein wirbelfreies Feld läßt sich aber nach dem besagten Helmholtzschen Zerlegungssatz als Gradient eines Skalarfeldes schreiben, d.h. es existiert ein Skalarfeld Φ , so daß

$$\vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi(t, \vec{x}). \quad (1.2.8)$$

Wir können also die homogenen Maxwell-Gleichungen durch die Einführung des Skalar- und Vektorpotentials identisch erfüllen, indem wir

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla} \Phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t}, \quad \vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{x}) \quad (1.2.9)$$

setzen.

Allerdings sind diese Potentiale durch Vorgabe von \vec{E} und \vec{B} nur bis auf ein **Skalarfeld** bestimmt. Um das zu sehen, gehen wir von der zweiten Gleichung aus. Fügen wir nämlich dem Vektorpotential ein Gradientenfeld hinzu, betrachten also

$$\vec{A}'(t, \vec{x}) = \vec{A}(t, \vec{x}) - \vec{\nabla} \chi(t, \vec{x}) \quad (1.2.10)$$

statt des ursprünglichen Vektorpotentials \vec{A} , so ändert sich wegen $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \chi = 0$ das Magnetfeld nicht. Ersetzen wir nun auch in der Gleichung für das elektrische Feld das alte durch das neue Vektorpotential, erhalten wir

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla} \left[\Phi(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi(t, \vec{x})}{\partial t} \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'(t, \vec{x})}{\partial t}. \quad (1.2.11)$$

Setzen wir also

$$\Phi'(t, \vec{x}) = \Phi(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi(t, \vec{x})}{\partial t}, \quad (1.2.12)$$

so gilt

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla} \Phi'(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'(t, \vec{x})}{\partial t}, \quad (1.2.13)$$

Das bedeutet, daß die Gleichungen (1.2.9) invariant unter einer sogenannten **Eichtransformation** sind, d.h. sie ändern sich nicht, wenn wir Skalar- und Vektorpotential vermöge

$$\Phi'(t, \vec{x}) = \Phi(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi(t, \vec{x})}{\partial t}, \quad \vec{A}'(t, \vec{x}) = \vec{A}(t, \vec{x}) - \vec{\nabla} \chi(t, \vec{x}) \quad (1.2.14)$$

umdefinieren.

Da Skalar- und Vektorpotential nur bis auf ein skalares Eichfeld festgelegt sind, können wir ihnen zusätzliche Bedingungen auferlegen, die die noch zu lösenden inhomogenen Maxwell-Gleichungen vereinfachen. Dabei denken wir uns die Ladungs- und Stromdichte vorgegeben und fragen nach dem durch sie hervorgerufenen elektromagnetischen Feld. Dazu setzen wir (1.2.9) in (1.1.34) und (1.1.35) ein. Daraus folgt mit Hilfe von (B.1.12)

$$-\Delta \Phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t} = \rho(t, \vec{x}), \quad (1.2.15)$$

$$\vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x})] - \Delta \vec{A}(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(t, \vec{x})}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \vec{j}(t, \vec{x}). \quad (1.2.16)$$

Betrachten wir die zweite Gleichung zuerst und überlegen, wie wir diese möglichst vereinfachen können, indem wir eine geeignete Zusatzbedingung für die Potentiale wählen, die den verbliebenen redundanten Eichfreiheitsgrad festlegt. Offenbar erreichen wir eine Entkopplung der Komponenten des Vektorfeldes, wenn wir die **Lorenz-Eichbedingung**

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.2.17)$$

fordern. Dann lautet nämlich zunächst (1.2.16)

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \vec{A}(t, \vec{x}) =: \square \vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c} \vec{j}(t, \vec{x}). \quad (1.2.18)$$

Dies ist offensichtlich eine **Wellengleichung** für jede der drei Komponenten des Vektorpotentials mit den Komponenten des Stromdichtevektors als Quellterm. Zur Abkürzung haben wir den **d'Alembert-Operator**

$$\square = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \quad (1.2.19)$$

eingeführt. Er wird sich gleich noch als vierdimensionale Verallgemeinerung des Laplace-Operators $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ erweisen.

Verwenden wir nun die Lorentz-Eichbedingung (1.2.17) in (1.2.15), können wir die Divergenz des Vektorpotentials eliminieren und erhalten auch für das Skalarpotential die Wellengleichung

$$\square \Phi(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x}). \quad (1.2.20)$$

Bevor wir uns mit der Lösung dieser Gleichungen befassen, wollen wir noch herausfinden, wie wir die Elektrodynamik **Lorentz-kovariant** formulieren können. Betrachten wir dazu zunächst den d'Alembert-Operator (1.2.19). Offenbar setzt er sich aus partiellen Ableitungen nach $x^0 = ct$ und den räumlichen Komponenten zusammen.

Also müssen wir zuerst das Transformationsverhalten der partiellen Ableitungen von Feldern unter der Lorentztransformation herausfinden. Dazu bemerken wir, daß für ein Viererskalarfeld $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi(x^0, \vec{x}) = \phi(x)$

$$d\phi = dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi \quad (1.2.21)$$

wieder ein Skalar unter Lorentztransformationen ist. Um das zu zeigen, bemerken wir, daß definitionsgemäß ein Skalarfeld das Transformationsverhalten

$$\phi'(x') = \phi(x) = \phi(\hat{\Lambda}^{-1} x') \quad (1.2.22)$$

unter Lorentztransformationen (1.2.1) aufweist. Nun gilt

$$\begin{aligned} dx'^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \phi'(x') &= \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \phi(x) \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\rho} \phi(x) = dx^\nu \delta^\rho{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\rho} \phi(x) \\ &= dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \phi(x). \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Folglich ist also das Differential eines Skalarfeldes (1.2.21) wiederum ein Skalarfeld. Da offenbar dx^ν die kontravarianten Komponenten eines Vierervektors bilden, müssen demgemäß die Komponenten des Vierergradienten

$$\partial_\mu \phi(x) := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) \quad (1.2.24)$$

kovariante Vektorkomponenten sein. Damit ist aber

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu \quad (1.2.25)$$

ein viererskalärer Differentialoperator unter Lorentztransformationen.

Betrachten wir nun die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in der Form (1.2.18) und (1.2.20), liegt die Vermutung nahe, daß wir das Skalar- und Vektorpotential sowie die Ladungs- und die Stromdichte zu Vierervektoren zusammenfassen können, und zwar gemäß

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad (1.2.26)$$

$$(j^\mu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}. \quad (1.2.27)$$

Dann können wir nämlich die Maxwell-Gleichungen (1.2.18) und (1.2.21) in die Vierervektorgleichungen

$$\square A^\mu(x) = \frac{1}{c} j^\mu(x) \quad (1.2.28)$$

überführen. Dazu stellen wir zunächst fest, daß wir hier als grundlegendes physikalisches Postulat vorausgesetzt haben, daß die Grenzggeschwindigkeit c des Minkowski-Raumes identisch ist mit dem Geschwindigkeitsparameter c in den Maxwell-Gleichungen, die somit gemäß der Wellengleichung (1.2.28) der **Ausbreitungsgeschwindigkeit** elektromagnetischer Wellen im Vakuum entspricht. Alle empirischen Befunde weisen bislang mit hoher Präzision darauf hin, daß dies tatsächlich der Fall ist.

Zum anderen müssen wir aber noch nachweisen, daß der Vierervektorcharakter mit der physikalischen Bedeutung der Viererstromdichte entspricht. Dies können wir uns am einfachsten dadurch klar machen, daß wir einen **mikroskopischen Ausdruck** für diese Größen formulieren. Betrachten wir dazu eine Punktladung, die sich entlang einer beliebigen Weltlinie $y^\mu(\tau)$ bewegt, wobei τ die Eigenzeit des Teilchens bezeichnet [Hee08]. In seinem momentanen Ruhesystem⁴ sind die Ladungs- und Stromdichte offenbar durch

$$\rho^*(x^*) = q \delta^{(3)}[\vec{x}^* - \vec{y}^*(\tau)]|_{t^*=\tau}, \quad \vec{j}^*(x^*) = 0 \quad (1.2.29)$$

gegeben. Dies können wir nun auch in **kovarianter Form** durch

$$j^{*\mu}(x^*) = q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{dy^{*\mu}(\tau)}{d\tau} \delta^{(4)}[x^* - y^*(\tau)] \quad (1.2.30)$$

ausdrücken. Dabei haben wir benutzt, daß $dy^{*0}/d\tau = c > 0$ ist. Da (1.2.30) manifest kovariant ist, gilt sie dann aber in einem beliebigen Inertialsystem, wobei wir voraussetzen, daß die **elektrische Ladung eines Teilchens ein Viererskalar** ist,

$$j^\mu(x) = q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \delta^{(4)}[x - y(\tau)], \quad (1.2.31)$$

weil $u^\mu(\tau) = d_\tau y^\mu(\tau)$ ein Vierervektor und τ sowie die δ -Distribution Viererskalare sind. Entsprechend müssen dann wegen (1.2.28) auch A^μ die Komponenten eines kontravarianten Vierervektors darstellen.

Für kontinuierliche Ladungs- und Stromverteilungen ist es zweckmäßig, das Vierergeschwindigkeitsfeld

$$[u^\mu(x)] = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2(t, \vec{x})/c^2}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v}(t, \vec{x}) \end{pmatrix} \quad (1.2.32)$$

einzuführen. Es ist ein **Vierervektor**, denn $u^\mu u_\mu = c^2$ ist ein Skalar. Im lokalen Ruhesystem der Materie ist offenbar

$$j^{*\mu} = \rho^* \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \rho^* u^{*\mu}, \quad (1.2.33)$$

⁴Hier und im folgenden bezeichnen wir solche Größen mit einem Stern an den Symbolen.

1. Das elektromagnetische Feld im Vakuum

wobei ρ^* die Dichte der elektrischen Ladung, gemessen im lokalen Ruhssystem des betrachteten Volumenelements der Materie. Da j^μ ein Vierervektor ist, gilt also

$$j^\mu = \rho^* u^\mu, \quad (1.2.34)$$

wobei ρ^* offenbar ein Viererskalarfeld ist. Für die Ladungsdichte im jeweiligen Inertialsystem ist also

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \rho^*. \quad (1.2.35)$$

Dies ist konsistent damit, daß die in dem Materieelement enthaltene Ladung ein Viererskalar ist. Es ist nämlich offenbar für dieses Materieelement

$$dq = d^3 \vec{x}^* \rho^* = d^3 \vec{x} \rho, \quad (1.2.36)$$

denn die Länge des im lokalen Ruhssystem der Materie ruhenden Volumenelements erfährt in Bewegungsrichtung die **Lorentzkontraktion** um den Faktor $\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$, was gerade den entsprechenden Faktor in (1.2.35) kompensiert.

Betrachten wir nun die ursprünglichen Maxwell-Gleichungen (1.1.34-1.1.37) aus relativistisch kovarianter Sicht. Das hat gegenüber der Formulierung über die Potentiale (bzw. das Vierervektorpotential) den Vorteil, daß sie nur direkt beobachtbare Feldgrößen involvieren und unabhängig von der Wahl der Eichbedingung sind. Dazu brauchen wir nur eine viererkovariante Größe zu finden, die die Dreiervektorkomponenten \vec{E} und \vec{B} enthält. Ein Blick auf (1.2.6) lehrt uns, wie diese Größe aussehen wird. Die Rotation des Vektorpotentials kann ja umkehrbar eindeutig als antisymmetrischer Dreiertensor zweiter Stufe dargestellt werden. Entsprechend bilden wir den antisymmetrischen Vierertensor zweiter Stufe

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.2.37)$$

Da A_μ die kovarianten Komponenten eines Vektorfeldes und ∂_ν kovariante Komponenten eines Vierervektordifferentialoperators sind, ist dieser **Faraday-Tensor** offensichtlich ein Tensor zweiter Stufe, und es gilt $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$.

Betrachten wir nun die zeitlichen und räumlichen Komponenten dieses Tensors. Dazu vereinbaren wir im folgenden, daß lateinische Indizes von 1 bis 3 laufen und also die räumlichen Komponenten durchnummerieren. Es ist offenbar

$$\begin{aligned} F_{0j} &= \partial_0 A_j - \partial_j A_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial A^j}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = E_j, \\ F_{jk} &= \partial_j A_k - \partial_k A_j = -\partial_j A^k + \partial_k A^j = -\epsilon_{jkl} B_l. \end{aligned} \quad (1.2.38)$$

Dabei verwenden wir für reine Dreiergrößen, z.B. hier die Dreiervektorkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke, die Konvention, daß alle Indizes als unterer Index notiert werden, denn in Euklidischen Räumen sind die ko- und Kontravarianten Komponenten von Tensoren ohnehin numerisch identisch. Schreiben wir den Faraday-Tensor in Matrixschreibweise, gilt also

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.39)$$

Um die inhomogenen Maxwell-Gleichungen zu formulieren, müssen wir nur fragen, wie wir aus dem Vierertensorfeld ein Vierervektorfeld machen können, wobei wir offenbar nur den Vektordifferentialoperator ∂_μ

1.2. Elektromagnetische Potentiale und Eichsymmetrie

zur Verfügung haben. Kontrahieren wir also versuchsweise (1.2.37) mit diesem Differentialoperator, wobei wir freilich kovariant kontrahieren müssen, d.h. wir bilden

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu. \quad (1.2.40)$$

Nun ist aber wegen (1.2.25) und (1.2.28)

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} j_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu. \quad (1.2.41)$$

Nun muß aber auch der verbliebene vom Viererpotential abhängige Term auf der rechten Seite durch die Feldstärken auszudrücken sein. Dazu erinnern wir uns, daß (1.2.28) nur unter der Voraussetzung der Lorenz-Eichbedingung (1.2.17) gilt. Diese ist aber wegen der Definition (1.2.26) des Viererpotentials identisch mit der manifest kovarianten Bedingung

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1.2.42)$$

Wegen $\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu$ verschwindet also der störende Term auf der rechten Seite von (1.2.41), und damit erhalten wir die **inhomogenen Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form**

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} j_\nu. \quad (1.2.43)$$

Nun müssen wir noch die homogenen Maxwell-Gleichungen mit Hilfe der Feldstärkekomponenten kovariant ausdrücken. Betrachten wir dazu die linken Seiten der homogenen Maxwell-Gleichungen (1.1.36) und (1.1.37) mit den linken Seiten der inhomogenen Maxwell-Gleichungen (1.1.34) und (1.1.35), so sehen wir, daß diese auseinander hervorgehen, wenn wir die Ersetzungen $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ und $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ vornehmen. Wir benötigen also eine kovariante Größe, die die sechs Komponenten des elektromagnetischen Feldes unter gewissen Vorzeichenregeln vertauscht. Das können wir nun mit Hilfe des vierdimensionalen **Levi-Civita-Tensors** erreichen. Dies ist der antisymmetrische Tensor vierter Stufe, dessen Komponenten durch

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3), \\ -1 & \text{falls } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.2.44)$$

definiert sind. Es ist wichtig zu bemerken, daß definitionsgemäß

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \eta_{\rho\gamma} \eta_{\sigma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det \eta \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.2.45)$$

ist. Unter Lorentztransformationen gilt aufgrund der analogen Überlegung mit der Transformationsmatrix $\hat{\Lambda}$

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \det \Lambda \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (1.2.46)$$

Bzgl. eigentlicher Lorentztransformationen, also solcher, für die $\det \Lambda = +1$ ist, haben wir es also mit einem invarianten Tensor zu tun.

Bilden wir nun das **Hodge-Dual** des Faraday-Tensors

$$\dagger F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (1.2.47)$$

ergibt sich

$$\dagger F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.48)$$

1. Das elektromagnetische Feld im Vakuum

Vergleichen wir dies mit (1.2.39), liefert dies in der Tat genau die gewünschte Vertauschung von elektrischen und magnetischen Feldkomponenten. Da die homogenen Maxwell-Gleichungen wieder erste Ableitungen der Feldstärkekomponenten beinhalten, ergeben sich offenbar vier kovariante Gleichungen durch die Kontraktion mit ∂_μ . In der Tat ist

$$\partial_\mu \dagger F^{\mu 0} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \partial_\mu \dagger F^{\mu j} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_j}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{E})_j = 0. \quad (1.2.49)$$

Dabei ergibt sich jeweils 0 aufgrund der homogenen Maxwell-Gleichungen (1.1.36) und (1.1.37). Insgesamt lassen sich also die homogenen Maxwell-Gleichungen zu der einen vierkovarianten Gleichung

$$\partial_\mu \dagger F^{\mu\nu} = 0 \quad (1.2.50)$$

zusammenfassen.

Damit ist klar, daß die Maxwell-Gleichungen eine mit den Prinzipien der relativistischen Raumzeitstruktur konsistente Theorie darstellen. Es ist klar, daß auch die Bewegung von Punktteilchen im elektromagnetischen Feld bzw. kontinuumsmechanische Beschreibungen der Bewegung von Materie relativistisch zu formulieren sind, damit das gekoppelte System von Bewegungsgleichungen für die Materie und das elektromagnetische Feld insgesamt eine in sich konsistente relativistische Theorie bilden. Wie wir später in Abschnitt 1.9.3 sehen werden, ist dieses Programm zumindest für Punktteilchen im Rahmen der klassischen Elektrodynamik mit großen Schwierigkeiten verbunden.

Zum Abschluß dieses Abschnitts betrachten wir noch die expliziten Transformationsformeln des elektromagnetischen Feldes unter Lorentz-Transformationen. Es ist klar, daß wir dazu direkt vom Faraday-Tensor ausgehen können, denn als Tensorfeld zweiter Stufe transformiert sich dieser gemäß

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}x'). \quad (1.2.51)$$

Wir betrachten nun insbesondere einen **drehungsfreien Boost** mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{v} = c\vec{\beta}$. Es bewegt sich also das Bezugssystem Σ' mit der Geschwindigkeit \vec{v} relativ zum Bezugssystem Σ . Um die entsprechende **Boost-Matrix** bequem notieren zu können, definieren wir die Projektionsmatrizen in Richtung von \vec{v} und senkrecht dazu gemäß

$$P_{\parallel} = \frac{\vec{v} \otimes \vec{v}}{v^2} = \frac{\vec{\beta} \otimes \vec{\beta}}{\beta^2}, \quad P_{\perp} = \mathbb{1}_3 - P_{\parallel}. \quad (1.2.52)$$

Diese symmetrischen Matrizen erfüllen offenbar die Beziehungen

$$P_{\parallel}^2 = P_{\parallel}, \quad P_{\perp}^2 = P_{\perp}, \quad P_{\parallel}P_{\perp} = P_{\perp}P_{\parallel} = 0, \quad P_{\perp} + P_{\parallel} = 1. \quad (1.2.53)$$

Der drehungsfreie Boost wird dann durch die reelle symmetrische Matrix 4×4 -Matrix

$$(\Lambda^\mu{}_\rho) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^t \\ -\gamma\vec{\beta} & \gamma P_{\parallel} + P_{\perp} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.2.54)$$

beschrieben. Um das beweisen, rechnen wir zuerst nach, daß es sich tatsächlich um eine Lorentz-Transforma-

tion handelt, indem wir (1.2.4) überprüfen. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
 \Lambda\eta\Lambda^t &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^t \\ -\gamma\vec{\beta} & \gamma P_{\parallel} + P_{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^t \\ -\gamma\vec{\beta} & \gamma P_{\parallel} + P_{\perp} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^t \\ -\gamma\vec{\beta} & \gamma P_{\parallel} + P_{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^t \\ \gamma\vec{\beta} & -\gamma P_{\parallel} - P_{\perp} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & -\gamma^2\vec{\beta}^t + \gamma^2\vec{\beta}^t \\ \gamma^2\vec{\beta} - \gamma^2\vec{\beta} & \gamma^2\vec{\beta}^2 P_{\parallel} - P_{\perp} - \gamma^2 P_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_3 \end{pmatrix} = \eta,
 \end{aligned} \tag{1.2.55}$$

d.h. (1.2.55) erfüllt (1.2.4) und ist daher tatsächlich eine Lorentz-Transformationsmatrix. Daraus folgt auch sofort

$$\Lambda^{-1} = \eta\Lambda^t\eta = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\vec{\beta}^t \\ \gamma\vec{\beta} & \gamma P_{\parallel} + P_{\perp} \end{pmatrix}. \tag{1.2.56}$$

Aus (1.2.39) erhalten wir durch Indexziehen

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E}^t \\ \vec{E} & -\dagger\vec{B} \end{pmatrix}, \tag{1.2.57}$$

wobei wir uns wieder der abkürzenden (1+3)-dimensionalen Schreibweise bedient haben. Das Hodge-Dual von Dreivektoren ist dabei durch $\dagger B_{jk} = \epsilon_{ijk} B_i$ definiert. Setzt man dies in (1.2.51) ein und vergleicht wieder die Komponenten der Matrix, erhält man nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned}
 \vec{E}'(t', \vec{x}') &= \gamma[\vec{E}(t, \vec{x}) + \vec{\beta} \times \vec{B}(t, \vec{x})] - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{\beta}[\vec{\beta} \cdot \vec{E}(t, \vec{x})], \\
 \vec{B}'(t', \vec{x}') &= \gamma[\vec{B}(t, \vec{x}) - \vec{\beta} \times \vec{E}(t, \vec{x})] - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{\beta}[\vec{\beta} \cdot \vec{B}(t, \vec{x})].
 \end{aligned} \tag{1.2.58}$$

Diese Gleichungen lassen sich in einfacherer Form ausdrücken, indem man die Projektionen parallel und senkrecht zur Relativgeschwindigkeit $\vec{v} = c\vec{\beta}$ betrachtet. Wenden wir die entsprechenden Projektionsoperatoren an, folgt

$$\begin{aligned}
 \vec{E}'_{\parallel}(t', \vec{x}') &= \left(\gamma - \frac{\gamma^2\beta^2}{1+\gamma}\right) \vec{E}_{\parallel}(t, \vec{x}) = \vec{E}_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp}(t', \vec{x}') &= \gamma[\vec{E}_{\perp}(t, \vec{x}) + \vec{\beta} \times \vec{B}(t, \vec{x})], \\
 \vec{B}'_{\parallel}(t', \vec{x}') &= \left(\gamma - \frac{\gamma^2\beta^2}{1+\gamma}\right) \vec{B}_{\parallel}(t, \vec{x}) = \vec{B}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\perp}(t', \vec{x}') &= \gamma[\vec{B}_{\perp}(t, \vec{x}) - \vec{\beta} \times \vec{E}(t, \vec{x})].
 \end{aligned} \tag{1.2.59}$$

Dabei haben wir die für einen beliebigen Vektor \vec{V} gültigen Gleichungen $P_{\parallel}(\vec{\beta} \times \vec{V}) = 0$ und $P_{\perp}(\vec{\beta} \times \vec{V}) = \vec{\beta} \times \vec{V}$ benutzt.

Vergleichen wir (1.2.54) mit (1.2.56), ist klar, daß wir die umgekehrte Transformation erhalten, indem wir einfach das Vorzeichen von $\vec{\beta}$ umkehren, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(t, \vec{x}) &= \gamma[\vec{E}'(t', \vec{x}') - \vec{\beta} \times \vec{B}'(t', \vec{x}')] - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{\beta}[\vec{\beta} \cdot \vec{E}'(t', \vec{x}')], \\
 \vec{B}(t, \vec{x}) &= \gamma[\vec{B}'(t', \vec{x}') + \vec{\beta} \times \vec{E}'(t', \vec{x}')] - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{\beta}[\vec{\beta} \cdot \vec{B}'(t', \vec{x}')].
 \end{aligned} \tag{1.2.60}$$

1.3 Die Maxwell-Gleichungen als relativistische Feldtheorie

Wir wenden uns nun der Analyse der Maxwell-Gleichungen mit Hilfe des **Hamiltonschen Prinzips der kleinsten Wirkung** zu. Dieses Vorgehen ist vor allem deshalb sinnvoll, weil das **Noether-Theorem** eine systematische Interpretationsmöglichkeit physikalischer Größen über den Zusammenhang zwischen Symmetrien, hier insbesondere der Raum-Zeit-Symmetrien (**Poincaré-Invarianz**) und Erhaltungsgrößen, gestattet. Wir werden also zunächst die Formulierung der Feldgleichungen aus dem Variationsprinzip besprechen, um dann **Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunkt** des elektromagnetischen Feldes in Wechselwirkung mit Ladungs- und Stromverteilungen zu gewinnen. Eine besondere Rolle spielt hierbei auch die oben besprochene **Eichinvarianz** der Elektrodynamik.

Die Beschreibung von Feldgleichungen über das **Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung** erfolgt analog zu der entsprechenden Beschreibung von Punktteilchen und Punktteilchensystemen. Der einzige grundlegende Unterschied für Felder ist, daß wir es in gewisser Hinsicht mit einer kontinuierlichen Anzahl von Freiheitsgraden zu tun haben. Dabei können wir die räumlichen Argumente der Felder als die Parameter ansehen, die diese Freiheitsgrade „durchnumerieren“. Stellt sich also die Lagrange-Funktion von Punktteilchensystemen als Summe über die endliche Anzahl von Freiheitsgraden dar, muß für Felder entsprechend ein Integral über die räumlichen Komponenten der Raum-Zeit-Argumente der Felder treten. Wir betrachten hier das elektromagnetische Feld im kovarianten Viererformalismus und stellen es demgemäß durch das Vektorpotential $A^\mu(x)$ dar. Die Lagrange-Funktion wird also durch ein Integral der Form

$$L = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \mathcal{L}[A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] \quad (1.3.1)$$

zu schreiben sein. Dabei nehmen wir an, daß die **Lagrange-Dichte** \mathcal{L} eine Funktion des Vektorpotentials und seiner ersten Ableitungen ist, da wir erwarten, daß sich dann durch die Variation im Sinne des Hamiltonschen Prinzips Feldgleichungen zweiter Ordnung ergeben, wie es sein muß. Weiter nehmen wir an, daß die Lagrangedichte nur von den Feldern und ihren Ableitungen an einem einzigen Raum-Zeitpunkt x abhängen. Dies bezeichnet man als **Lokalitätsprinzip**. Das **Wirkungsfunktional** ist dann wie in der Mechanik das Zeitintegral über die Lagrange-Funktion, d.h.

$$S[A_\mu] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \mathcal{L}[A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)]. \quad (1.3.2)$$

Die Feldgleichungen werden demnach mit Sicherheit relativistisch kovariant sein, wenn das Wirkungsfunktional selbst ein **Lorentz-Skalar** ist. Da nun das Vierervolumenelement d^4x selbst ein Lorentz-Skalar ist, weil die Determinante der Lorentz-Transformationen, und damit also die Jacobi-Determinante beim Transformieren der Raum-Zeit-Koordinaten, den Wert 1 besitzt, muß demnach die Lagrangedichte \mathcal{L} ein Lorentz-Skalar sein. Schließlich müssen die Feldgleichungen noch invariant unter Eichtransformationen der Gestalt (1.2.14) sein. Das ist auch wiederum sicher gewährleistet, wenn die Wirkung selbst eichinvariant ist.

Sehen wir zunächst von der Anwesenheit von Ladungen und Strömen ab, betrachten also lediglich freie elektromagnetische Felder, bieten sich als eichinvariante Größen der Faraday-Tensor (1.2.37) und sein Hodge-Dual (1.2.47) an. Aus diesen Tensoren lassen sich die Invarianten

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\dagger F_{\mu\nu} \dagger F^{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2), \quad \dagger F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -4\vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (1.3.3)$$

bilden. Wie wir noch sehen werden, scheidet die zweite Invariante aus, da sie nicht invariant unter Raumspiegelungen ist. Da Raumspiegelungen offenbar Determinante -1 besitzen, ändert diese Invariante nämlich ihr Vorzeichen unter Raumspiegelungen, weil der Levi-Civita-Tensor unter uneigentlichen Lorentz-Transformationen sein Vorzeichen wechselt. In der Tat ist die Lagrange-Dichte für das freie elektromagnetische Feld durch

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.3.4)$$

gegeben.

Um nun auch die Kopplung an Ladungen und Ströme zu beschreiben, erinnern wir uns der Lagrangefunktion für die Bewegung geladener Teilchen in äußeren Feldern aus der Mechanik [Hee08]. Der entsprechende Term in der Wirkung lautet

$$-\int_{\mathbb{R}} d\tau \frac{q}{c} \dot{y}_\mu A^\mu(y) = -\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{\mathbb{R}} d\tau \frac{q}{c} \dot{y}_\mu \delta^{(4)}[x - y(\tau)] A^\mu(x). \quad (1.3.5)$$

Denken wir uns nun wieder makroskopische Materie als aus sehr vielen Teilchen zusammengesetzt und gehen zur Kontinuumsschreibweise über, erhalten wir wegen (1.2.31)

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{c} j_\mu A^\mu. \quad (1.3.6)$$

Wir werden das schwierige Problem einer konsistenten Beschreibung von geladener Materie und Felder auf Abschnitt 1.9.3 verschieben und uns hier auf das Problem der Gleichungen für das elektromagnetische Feld bei gegebener Ladungs- und Stromverteilung j^μ beschränken. Kombinieren wir (1.3.4) und (1.3.6), erhalten wir die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.3.7)$$

Offensichtlich ist nun diese Lagrangedichte zwar relativistisch kovariant aber nicht eichinvariant. Dazu bemerken wir zunächst, daß sich die Eichtransformation (1.2.14) in relativistisch kovarianter Form als

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \quad (1.3.8)$$

schreibt. Dazu muß man sich nur klar machen, daß $\partial_0 = (1/c)\partial_t$ und daß $\partial^j = -\partial_j$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ gilt. Während offenbar $F_{\mu\nu}$ eichinvariant ist, wie wir ja oben schon bemerkt haben, ändert sich die Lagrangedichte um

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = -\frac{1}{c} j_\mu \partial^\mu \chi. \quad (1.3.9)$$

Falls wir aber die Kontinuitätsgleichung (1.1.40), die in relativistisch kovarianter Notation

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.3.10)$$

lautet, voraussetzen, können wir statt (1.3.9)

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = -\frac{1}{c} \partial^\mu (j_\mu \chi) \quad (1.3.11)$$

schreiben. D.h. die Lagrangedichte ändert sich unter Eichtransformationen lediglich um eine **Viererdivergenz**. Nehmen wir also an, daß der Viererstrom j_μ und das Eichfeld χ hinreichend schnell abfallen, können wir aufgrund des vierdimensionalen Äquivalents des Gaußschen Satzes auf die **Eichinvarianz der Wirkung** schließen. Dies ist aber sicher hinreichend für die Eichinvarianz der aus dem Hamiltonschen Prinzip folgenden Bewegungsgleichungen.

Wir bemerken dazu, daß der vierdimensionale Gaußsche Satz

$$\int_{V^{(4)}} d^4x \partial_\mu V^\mu = \int_{\partial V^{(4)}} d^3\sigma_\mu V^\mu \quad (1.3.12)$$

lautet, wo $V^{(4)}$ irgendein vierdimensionaler Bereich im Minkowskiraum, $\partial V^{(4)}$ seinen Rand und $d^3\sigma^\mu$ die **Hyperflächennormalenvektoren** dieses Randes bezeichnen. Dazu bemerken wir daß dieses Hyperflächenelement wie folgt definiert werden kann: Es sei $\partial V^{(4)} : (q^1, q^2, q^3) \mapsto x^\mu(q^k)$ eine beliebige Parametrisierung des Randes. Dann ist

$$d^3\sigma^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial q^1} \frac{\partial x_\rho}{\partial q^2} \frac{\partial x_\sigma}{\partial q^3}. \quad (1.3.13)$$

1. Das elektromagnetische Feld im Vakuum

Dabei ist wie beim dreidimensionalen Gaußschen Satz auf die Orientierung dieses Vierervektors zu achten, d.h. er muß stets nach außen also vom Inneren des Vierervolumenbereichs $V^{(4)}$ weg weisen.

Es ist klar, daß dieser Satz aus dem allgemeinen **Stokesschen Satz** für Differentialformen dritter Stufe folgt. Definieren wir nämlich

$$\dagger V_{\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} V^\mu, \quad (1.3.14)$$

ergibt sich

$$d\dagger V = dx^\mu \wedge \partial_\mu V = \partial_\mu V^\mu. \quad (1.3.15)$$

Damit ist aber (1.3.11) nichts anderes als der in Komponenten ausgeschriebene Stokessche Satz [Hee00]

$$\int_{V^{(4)}} d\dagger V = \int_{\partial V^{(4)}} \dagger V. \quad (1.3.16)$$

Betrachten wir also (1.3.7) und leiten zunächst die Bewegungsgleichungen her. Dazu ist es am einfachsten, direkt die Variation auszuführen anstatt die **Euler-Lagrange-Gleichungen** auszuwerten. Variieren wir also A^μ als unabhängige Feldfreiheitsgrade, erhalten wir

$$\delta S[A] = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left[\frac{1}{2} F^{\mu\nu}(x) \delta F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{c} j_\nu(x) \delta A^\nu(x) \right]. \quad (1.3.17)$$

Da nun $F_{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist, gilt

$$F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) = 2F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu. \quad (1.3.18)$$

Dies also oben eingesetzt und den ersten Ausdruck partiell integriert, liefert

$$\delta S[A] = + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left[\frac{1}{c} j_\nu(x) - \partial_\mu F^{\mu\nu} \right] \delta A_\nu. \quad (1.3.19)$$

Nach dem Hamiltonschen Prinzip ergeben sich nun die Feldgleichungen aus der Forderung, daß das Wirkungsfunktional unter beliebigen Variationen δA_ν stationär ist, also $\delta S[A] = 0$ gilt. Demnach muß aber in (1.3.19) die Klammer verschwinden, und das liefert in der Tat die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (1.2.43). Zusammen mit der Definition $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ in (1.3.7), die wir ja auch schon bei der Herleitung der Bewegungsgleichung verwendet haben, folgt daraus, daß mit der Lagrangedichte (1.3.7) tatsächlich die Maxwell-Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip folgen.

1.4 Poincaré-Symmetrie

Nun betrachten wir die Implikationen von **Symmetrien** für die Maxwell-Theorie. Wie wir aus der Mechanik [Hee08] wissen, impliziert nach dem **Noether-Theorem** jede Einparameteruntergruppe einer Lie-Gruppe, unter der die Wirkung invariant ist, einen **Erhaltungssatz** und umgekehrt. Als erstes beschäftigen wir uns mit der **Poincaré-Symmetrie** der Raumzeit, welche die Definition der fundamentalen Erhaltungsgrößen **Energie und Impuls** (Translationsinvarianz von Raum und Zeit), **Drehimpuls** (räumliche Drehungen) und Schwerpunkt (Boosts) erlauben. Entsprechend der Natur der Theorie als Feldtheorie ergeben sich für diese Größen zunächst **Tensorfelder** für die Dichten dieser Erhaltungsgrößen. Dabei müssen wir aber auch die **Eichinvarianz** der Elektrodynamik im Auge behalten, denn physikalisch beobachtbare Größen sollten **eichinvariant** sein.

Beginnen wir jedoch mit der allgemeinen Beschreibung von **Lie-Symmetrien**. Betrachten wir dazu ein allgemeines System von Feldkomponenten $\Phi_j(x)$, wobei j eine endliche Anzahl solcher Feldkomponenten durchnumerieren möge. Dazu nehmen wir an, daß eine **infinitesimale Transformation** der Raumzeitkoordinaten und **Felder** der Form

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \delta \alpha^k \xi_k^\mu(x), \quad \Phi_j \rightarrow \Phi'_j(x') = \Phi_j(x) + \delta \alpha^k \Xi_{jk}(\Phi_j, x) \quad (1.4.1)$$

gegeben ist, die die Wirkung

$$S[\Phi_j] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \mathcal{L}(\Phi_j, \partial_\mu \Phi_j, x) \quad (1.4.2)$$

invariant läßt. Dazu bemerken wir als erstes, daß zwei Lagrangedichten, die sich lediglich um eine Vierdivergenz $\partial_\mu \Omega^\mu(\Phi_j, x)$ unterscheiden, zu den gleichen Bewegungsgleichungen führt, betrachten wir zunächst die Variation von (1.4.2) nach den Feldern Φ_j im Sinne des Hamiltonschen Prinzips. Offenbar gilt

$$\delta S = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(\delta \Phi_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} + \delta \partial_\mu \Phi_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_j)} \right). \quad (1.4.3)$$

Da nun beim Hamiltonschen Prinzip die Raumzeitargumente nicht mitvariiert werden, gilt $\delta \partial_\mu \Phi_j = \partial_\mu \delta \Phi_j$, und wir können die Variation der Wirkung durch partielle Integration in die Form

$$\delta S = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \delta \Phi_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_j)} \right) \quad (1.4.4)$$

bringen. Nach dem Hamiltonschen Prinzip muß nun diese Variation der Wirkung unter voneinander unabhängigen Variationen $\delta \Phi_j$ verschwinden, und das bedeutet, daß die **Feldgleichungen** durch die **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_j)} = 0 \quad (1.4.5)$$

gegeben sind.

Betrachten wir nun

$$\mathcal{L}_2 = \partial_\mu \Omega^\mu(\Phi_j, x) = \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Phi_j} \partial_\mu \Phi_j + \left(\frac{\partial \Omega^\mu}{\partial x^\mu} \right)_{\text{expl}} \quad (1.4.6)$$

und berechnen den Ausdruck (1.4.5), finden wir zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial (\partial_\mu \Phi_j)} = \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Phi_j} &\Rightarrow \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial (\partial_\mu \Phi_j)} = \partial_\mu \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Phi_j} = \frac{\partial^2 \Omega^\mu}{\partial \Phi_j \partial \Phi_k} \partial_\mu \Phi_k + \partial_\mu^{(\text{expl})} \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Phi_j}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \Phi_j} &= \frac{\partial^2 \Omega^\mu}{\partial \Phi_j \partial \Phi_k} \partial_\mu \Phi_k + \partial_\mu^{(\text{expl})} \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Phi_j}. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Das bedeutet, daß

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \Phi_j} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial (\partial_\mu \Phi_j)} \equiv 0 \quad (1.4.8)$$

unabhängig von den Feldern Φ_j ist. Die Euler-Lagrange-Gleichungen für

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \mathcal{L}_2 = \mathcal{L} + \partial_\mu \Omega^\mu \quad (1.4.9)$$

sind also unabhängig von Ω^μ , d.h. alle Lagrange-Dichten dieser Form sind zueinander physikalisch äquivalent. Führen wir nun die infinitesimale Transformation (1.4.1) für die Wirkung aus, um zu untersuchen, wann diese eine Symmetrietransformation ist. Dazu müssen wir beachten, daß nun die Felder *und* die Raumzeitargumente geändert werden. Die transformierte Wirkung ist dabei definitionsgemäß durch

$$S' = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x' \mathcal{L}(\Phi'_j, \partial'_\mu \Phi'_j, x') \quad (1.4.10)$$

gegeben. Eine Symmetrietransformation liegt nun dann vor, wenn sich die Variation dieser Wirkung, ausgedrückt durch die „alten“ Felder und Raumzeitargumente nicht ändert. Um die entsprechende **Symmetriebedingung** an die Lagrangedichte zu finden, müssen wir also zunächst (1.4.10) vermöge der vorgegebenen infinitesimalen Transformation (1.4.1) durch die alten Felder und Raumzeitargumente ausdrücken. Dabei können wir uns auf die Entwicklung bis zur ersten Ordnung in den infinitesimalen Transformationsparametern $\delta\alpha^k$ beschränken. Es ist zu beachten, daß im Gegensatz zur Variation der Felder im Sinne des Hamiltonschen Prinzips jetzt auch die Raumzeitargumente transformiert werden. Zunächst gilt

$$\delta(\partial_\mu\Phi_j) = \partial'_\mu\Phi'_j - \partial_\mu\Phi_j = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu [\Phi_j(x) + \delta\alpha^k \Xi_{jk}(\Phi_j, x)] - \partial_\mu\phi_j. \quad (1.4.11)$$

Nun ist die Jacobi-Determinante für die Raumzeittransformation

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \left[\left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)} \right)^{-1} \right]^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu + \delta\alpha^k \partial_\mu \xi_k^\nu + \mathcal{O}(\delta\alpha^2). \quad (1.4.12)$$

Zum Beweis bemerken wir, daß in der Tat

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} (\delta^\nu_\rho + \delta\alpha^k \partial_\rho \xi_k^\nu) = (\delta^\mu_\nu - \delta\alpha^l \partial_\nu \xi_l^\mu) (\delta^\nu_\rho + \delta\alpha^k \partial_\rho \xi_k^\nu) = \delta^\mu_\rho + \mathcal{O}(\delta\alpha^2) \quad (1.4.13)$$

ist, d.h. bis auf Größen der Ordnung $\mathcal{O}(\delta\alpha^2)$ ist die rechte Seite von (1.4.12) tatsächlich die Inverse der Matrix $(\partial x'^\mu/\partial x^\nu)$, wie behauptet. Damit erhalten wir schließlich durch Einsetzen von (1.4.12) in (1.4.11)

$$\delta(\partial_\mu\Phi_j) = \delta\alpha^k [\partial_\mu \Xi_{jk}(\Phi_j, x) + \partial_\mu \xi_k^\nu(x) \partial_\nu \Phi_j(x)]. \quad (1.4.14)$$

Weiter ist

$$\delta(d^4x') = d^4x' - d^4x = d^4x \left[\det \left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)} \right) - 1 \right]. \quad (1.4.15)$$

Offenbar ist bei der Berechnung der Jacobi-Determinanten bis zur ersten Ordnung in $\delta\alpha^k$ nur das Produkt der Diagonalkomponenten der Jacobi-Matrix relevant, also

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)} \right) &= (\delta^0_0 - \delta\alpha^k \partial_0 \xi_k^0) (\delta^1_1 - \delta\alpha^k \partial_1 \xi_k^1) (\delta^2_2 - \delta\alpha^k \partial_2 \xi_k^2) (\delta^3_3 - \delta\alpha^k \partial_3 \xi_k^3) \\ &\quad + \mathcal{O}(\delta\alpha^2) \\ &= 1 - \delta\alpha^k \partial_\mu \xi_k^\mu + \mathcal{O}(\delta\alpha^2). \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Mit (1.4.11-1.4.16) erhalten wir für die Änderung der Wirkung unter der Symmetrietransformation (1.4.11) nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} \delta S &= S - S' \\ &= \delta\alpha^k \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \Xi_{jk} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_j)} [\partial_\mu \Xi_{jk} + \partial_\mu \xi_k^\nu \partial_\nu \Phi_j] - \xi_k^\mu (\partial_\mu^{(\text{expl})} \mathcal{L}) - \mathcal{L} \partial_\mu \xi_k^\mu \right]. \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Da die $\delta\alpha^k$ voneinander unabhängig sind, muß die eckige Klammer für jedes k eine totale Divergenz der Form $-\partial_\mu \Omega_k^\mu(\Phi_j, x)$ sein, d.h. es muß sich zu jedem k ein Vektorfeld $\Omega_k^\mu(\Phi_j, x)$, so daß

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \Xi_{jk} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_j)} [\partial_\mu \Xi_{jk} + \partial_\mu \xi_k^\nu \partial_\nu \Phi_j] - \xi_k^\mu (\partial_\mu^{(\text{expl})} \mathcal{L}) - \mathcal{L} \partial_\mu \xi_k^\mu + \partial_\mu \Omega_k^\mu(\Phi_j, x) = 0 \quad (1.4.18)$$

ist. Zur Abkürzung definieren wir nun den **kanonischen Energie-Impuls-Tensor**

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\nu \Phi_j - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu. \quad (1.4.19)$$

Damit ergibt sich für (1.4.19)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \Xi_{jk} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\mu \Xi_{jk} + \partial_\mu \xi_k^\nu \Theta^\mu{}_\nu - \xi_k^\nu (\partial_\nu^{\text{(expl)}} \mathcal{L}) + \partial_\mu \Omega_k^\mu(\Phi_j, x) = 0. \quad (1.4.20)$$

Betrachten wir nun die Implikationen dieser Aussage für eine Lösung der Feldgleichungen (1.4.5). Bilden wir dazu zunächst die Divergenz des Energie-Impulstensors, erhalten wir aufgrund der Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Theta^\mu{}_\nu &= \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \right) \partial_\nu \Phi_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\mu \partial_\nu \Phi_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \partial_\nu \Phi_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\mu \partial_\nu \Phi_j - \partial_\nu^{\text{(expl)}} \mathcal{L} \\ &= -\partial_\nu^{\text{(expl)}} \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

Weiter ergibt sich wegen der Feldgleichungen für die ersten beiden Terme von (1.4.20)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \Xi_{jk} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\mu \Xi_{jk} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \Xi_{jk} \right). \quad (1.4.22)$$

Verwenden wir noch (1.4.21) in (1.4.20) ergibt sich, daß für die Größen

$$j_k^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \Xi_{jk} + \Theta^\mu{}_\nu \xi_k^\nu + \Omega_k^\mu \quad (1.4.23)$$

die **Kontinuitätsgleichung**

$$\partial_\mu j_k^\mu = 0 \quad (1.4.24)$$

gilt. Dies ist der erste Teil des **Noether-Theorems**: Jede Einparametersymmetrie zieht eine erhaltene Größe nach sich, nämlich die zu der Symmetrie gehörige **Noether-Ladung**

$$Q_k = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} j_k^0(x). \quad (1.4.25)$$

Wir bemerken, daß diese Größe nur dann ein **Lorentz-Skalar** ist, wenn (1.4.24) tatsächlich gilt. Darauf kommen wir am Ende des nächsten Abschnittes noch ausführlich zu sprechen.

1.4.1 Translationen in Raum und Zeit: Energie und Impuls

Wir folgen in der Behandlung der Raum-Zeit-Symmetrien des Minkowski-Raums mit Hilfe des Noethertheorems der sehr eleganten Methode in [Sch10], die sofort auf die eichinvariante Form des **symmetrischen Energie-Impulstensors** führt. Dabei wird die Eichinvarianz der Theorie ausgenutzt, die (infinitesimalen) Symmetrietransformationen eichinvariant zu formulieren. Da nämlich Viererpotentiale des Elektromagnetischen Feldes, die sich lediglich durch eine Eichtransformation (1.3.8) unterscheiden, die gleiche physikalische Situation beschreiben, können wir bei den infinitesimalen Symmetrietransformationen beliebige Vierergradienten von Skalarfeldern zum elektromagnetischen Vierer-Potential hinzufügen, ohne daß sich die physikalische Bedeutung der damit verbundenen Symmetrien ändert. Wir wählen daher unter Ausnutzung der Eichsymmetrie die Realisierung der Raum-Zeit-Symmetrietransformationen so, daß sie zu **eichinvarianten** Erhaltungsgrößen führen.

1. Das elektromagnetische Feld im Vakuum

Betrachten wir nun die Translationen in Raum und Zeit, d.h. die Symmetrie der Raumzeit unter Translationen für das elektromagnetische Feld ohne äußere Ladungs- und Stromverteilungen. Dann gilt

$$\delta x^\mu = -\delta a^\mu, \Rightarrow \xi^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu, \quad (1.4.26)$$

$$A'_\mu(x') = A_\mu(x) + \partial_\mu \delta a^\nu \chi_\nu(x) \Rightarrow \Xi_{\mu\nu} = \partial_\mu \chi_\nu. \quad (1.4.27)$$

Dabei ist χ_ν ein beliebiges Vektorfeld, das wir im folgenden geeignet wählen, um die mit den Translationen in Raum und Zeit verbundenen Erhaltungsgrößen, also **Energie und Impuls** bzw. die **dazugehörigen Dichten eichinvariant** zu machen. Nun müssen wir (1.4.20) betrachten, um $\Omega_{\mu\nu}$ zu finden. Die Lagrangedichte für das freie elektromagnetische Feld lautet

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu. \quad (1.4.28)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}, \quad (1.4.29)$$

und (1.4.20) lautet mit (1.4.26) und (1.4.27)

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_\mu \Omega^\mu{}_\rho - F^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \chi_\rho = 0. \quad (1.4.30)$$

Da nun $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch und $\partial_\mu \partial_\nu \chi_\rho$ symmetrisch unter Vertauschen der Indizes μ und ν ist, verschwindet der zweite Term, und wir können (1.4.30) mit

$$\Omega^\mu{}_\rho = 0 \quad (1.4.31)$$

erfüllen. Um auch die verbliebene durch χ_ν gegebene Eichfreiheit beim Transformationsverhalten der Felder unter Translationen (1.4.27) zu bestimmen, betrachten wir die dazugehörigen **Noether-Ströme** (1.4.23). Dazu müssen wir zunächst den **kanonischen Energie-Impuls-Tensor** des elektromagnetischen Feldes bestimmen. Mit (1.4.28) und (1.4.29) folgt

$$\Theta^\mu{}_\nu = -F^{\mu\rho} \partial_\nu A_\rho + \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \delta^\mu{}_\nu. \quad (1.4.32)$$

Wir bemerken, daß dieser Ausdruck *nicht* eichinvariant ist. Nun können wir aber die Noether-Ströme für unsere Symmetrietransformation (1.4.26, 1.4.27) berechnen:

$$T^\mu{}_\nu = -F^{\mu\rho} \partial_\rho \chi_\nu + \Theta^\mu{}_\nu = -F^{\mu\rho} (\partial_\rho \chi_\nu + \partial_\nu A_\rho) + \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \delta^\mu{}_\nu. \quad (1.4.33)$$

Wählen wir nun $\chi_\nu = -A_\nu$, ergibt sich daraus der eichinvariante Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = F_\mu{}^\rho F_{\rho\nu} + \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu}. \quad (1.4.34)$$

Dabei haben wir der Übersichtlichkeit halber den Index μ nach unten gezogen. Dieser eichinvariante Energie-Impuls-Tensor ist offensichtlich *symmetrisch unter Vertauschung seiner beiden kovarianten Indizes*. Dies ist schon daher physikalisch sinnvoll als der Energie-Impuls-Dichtetensor insbesondere im Rahmen der **Allgemeinen Relativitätstheorie** physikalisch beobachtbare Konsequenzen besitzt, indem er die Erhaltungsgröße ist, an die das Gravitationsfeld universell koppelt und, ähnlich wie der Ladungsdichte-Strom-Vierervektor in der Elektrodynamik, als Quelle des **Gravitationsfeldes** fungiert und die **Einstein-Gleichungen der Gravitation** einen **symmetrischen Energie-Impulstensor** implizieren.

Um die physikalische Bedeutung des symmetrischen Energie-Impulstensors (1.4.34) genauer zu analysieren, bemerken wir, daß für das freie elektromagnetische Feld, wenn also aufgrund des Noether-Theorems die **lokalen Erhaltungssätze**

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.4.35)$$

gelten, die Größen

$$P^\nu = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} T^{0\nu}(x) = \begin{pmatrix} E_{\text{em}}/c \\ \vec{p}_{\text{em}} \end{pmatrix} \quad (1.4.36)$$

die **Gesamtenergie** E_{em} und den **Gesamtimpuls** \vec{p}_{em} des elektromagnetischen Feldes bedeuten. Daß gerade diese Größen die genannte physikalische Bedeutung haben, wird ja gerade durch das Noether-Theorem nahegelegt, denn auch in der Mechanik haben wir als die zur Homogenität der Raumzeit gehörigen Erhaltungsgrößen Energie und Impuls identifiziert. Als nächstes drücken wir mit Hilfe von (1.2.39) den Energie-Impulstensor mit den Komponenten des elektromagnetischen Feldes im Dreierformalismus aus. Es gilt

$$T^{00} = \epsilon = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2), \quad (1.4.37)$$

$$T^{0j} = c\vec{\Pi} = \frac{1}{c}\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}, \quad (1.4.38)$$

$$T^{jk} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\delta_{jk} - E_j E_k - B_j B_k. \quad (1.4.39)$$

Dabei bezeichnen ϵ die Energiedichte und, $\vec{\Pi}$ die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes. Der **Poynting-Vektor** \vec{S} ist die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes. Wir bemerken noch, daß die kovariante Spur des Energie-Impulstensors verschwindet, d.h. es gilt

$$T^\mu{}_\mu = 0. \quad (1.4.40)$$

Bei Anwesenheit von elektrischen Ladungs- und Stromverteilungen können wir aus (1.4.37) und (1.4.38) mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen **Bilanzgleichungen** für den Austausch von Energie und Impuls zwischen elektrischem Feld und geladenen Teilchen gewinnen. Dazu leiten wir die Energiedichte nach der Zeit ab und verwenden die Maxwell-Gleichungen (1.1.34-1.1.37):

$$\partial_t \epsilon = (\partial_t \vec{E}) \cdot \vec{E} + (\partial_t \vec{B}) \cdot \vec{B} = \vec{E} \cdot (c\vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{j}) - c\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}). \quad (1.4.41)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= E_j \epsilon_{jkl} \partial_k B_l - B_j \epsilon_{jkl} \partial_k E_l \\ &= \epsilon_{jkl} (E_j \partial_k B_l + B_l \partial_k E_j) = -\partial_k \epsilon_{kjl} E_j B_l = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{S}. \end{aligned} \quad (1.4.42)$$

Gl. (1.4.41) wird dadurch zu der Bilanzgleichung

$$\partial_t \epsilon = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} - \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (1.4.43)$$

Integriert man dies über ein endliches Dreivolumen und wendet für den ersten Term auf der rechten Seite den Gaußschen Integralsatz an, erhält man

$$\frac{dE_{\text{em},V}}{dt} = - \int_{\partial V} d^2\vec{F} \cdot \vec{S} - \int_V d^3\vec{x} \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (1.4.44)$$

Die im Volumen V enthaltene Energie des elektromagnetischen Feldes geht zum einen durch die durch die Oberfläche strömende Energie des elektromagnetischen Feldes und zum anderen durch die an den elektrischen Ladungen verrichtete Arbeit verloren. Damit ist also $\vec{j} \cdot \vec{E}$ die pro Volumen- und Zeiteinheit vermög des

elektromagnetischen Feldes verrichtete Arbeit an den elektrischen Ladungen. Der Oberflächenterm (1.4.44) ergibt die bereits oben erwähnte Interpretation des Poyntingvektors als **Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes**.

Ebenso können wir eine Bilanzgleichung für den Impuls des elektromagnetischen Feldes aufstellen. Dazu gehen wir von (1.4.38) aus und verwenden wieder die Maxwell-Gleichungen (1.1.34-1.1.37)

$$\partial_t \vec{\Pi} = \frac{1}{c} [(\partial_t \vec{E}) \times \vec{B} + \vec{E} \times \partial_t \vec{B}] = \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{j} \right) \times \vec{B} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}). \quad (1.4.45)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} [\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})]_j &= \epsilon_{jkl} E_k \epsilon_{lmn} \partial_m E_n = (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) E_k \partial_m E_n \\ &= E_n \partial_j E_n - E_k \partial_k E_j = E_n \partial_j E_n - \partial_k (E_k E_j) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} \end{aligned} \quad (1.4.46)$$

bzw.

$$\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{E}^2) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \otimes \vec{E}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E}. \quad (1.4.47)$$

Entsprechend gilt für das magnetische Feld

$$\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{B}^2) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \otimes \vec{B}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B}. \quad (1.4.48)$$

Verwenden wir schließlich noch (1.1.34) und (1.1.36), finden wir durch Einsetzen von (1.4.47) und (1.4.48) in (1.4.45)

$$\partial_t \vec{\Pi} = +\vec{\nabla} \cdot \vec{T} - \left(\rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \right). \quad (1.4.49)$$

Dabei haben wir den dreidimensionalen symmetrischen **Maxwellschen Spannungstensor** $\vec{T}^{ij} = -T^{ij}$ durch

$$\vec{T} = \vec{E} \otimes \vec{E} + \vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \mathbb{1}_3 \quad (1.4.50)$$

bezeichnet. In Gl. (1.4.49) ergibt die linke Seite offenbar die Dichte der auf das elektromagnetische Feld wirkenden Kraft. Integriert man also diese Gleichung über ein endliches Volumen, ergibt sich die Kraft auf das in diesem Volumen enthaltene elektromagnetische Feld. Diese ist zum einen durch den pro Zeiteinheit durch die Fläche strömenden Impuls des elektromagnetischen Feldes (also das Flächenintegral über den **Strahlungsdruck**, was die Bezeichnung Spannungstensor für \vec{T} rechtfertigt) und die Gegenkraft zur auf die Teilchen wirkenden Lorentzkraft gegeben.

Freilich können wir diese Bilanzgleichungen auch manifest kovariant schreiben, indem wir (1.2.43) verwenden und die Viererdivergenz von (1.4.34) bilden

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = j^\rho F_\rho{}^\nu + F^{\mu\rho} \partial_\mu F_\rho{}^\nu + \frac{1}{2} F_{\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = -F^\nu{}_\rho j^\rho + \frac{1}{2} F_{\rho\sigma} (\partial^\rho F^{\sigma\nu} + \partial^\sigma F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\sigma}). \quad (1.4.51)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt Summationsindizes umbenannt und mehrfach die Antisymmetrie des Feldstärketensors ausgenutzt. Aufgrund der Zyklizität in den Indizes im Ausdruck in der Klammer dürfen wir vermuten, daß er etwas mit dem dualen Feldstärketensor zu tun hat, denn aufgrund der Antisymmetrie des Feldstärketensors ist dieser Klammerausdruck antisymmetrisch unter der Vertauschung eines beliebigen Indexpaares. In der Tat gilt wegen der homogenen Maxwell-Gleichungen (1.2.49)

$$0 = \partial^\rho \dagger F_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\mu\sigma\nu} \partial^\rho F^{\sigma\nu} = \frac{1}{6} \epsilon_{\rho\mu\sigma\nu} (\partial^\rho F^{\sigma\nu} + \partial^\sigma F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\sigma}). \quad (1.4.52)$$

1.4. Poincaré-Symmetrie

Da die Hodge-Dualisierung umkehrbar ist (gemäß (B.2.21)) ergibt zweimalige Hodge-Dualisierung bis auf das Vorzeichen den ursprünglichen antisymmetrischen Tensor), muß in der Tat die Klammer identisch verschwinden, und das bedeutet, daß sich (1.4.51) zu

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -F^\nu_\rho j^\rho \quad (1.4.53)$$

vereinfacht. Drückt man nun die vier Gleichungen für $\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ mittels der dreidimensionalen Feldgrößen \vec{E} und \vec{B} aus, erhält man wieder die Bilanzgleichungen für Energie (1.4.43) und Impuls (1.4.49) des elektromagnetischen Feldes.

Wir schließen unsere Betrachtungen zu Energie- und Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes noch mit einer Analyse der Transformationseigenschaften **der integralen Erhaltungsgrößen** von Noether-Strömen. Nehmen wir zunächst an, eine beliebige Viererstromdichte j^μ erfülle die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (1.4.54)$$

Dann behaupten wir, daß die dazugehörige Erhaltungsgröße

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} j^0(x) \quad (1.4.55)$$

ein Lorentz-Skalar ist. Für ein beliebiges Vierervolumenelement gilt nämlich wegen (1.4.54)

$$\int_{V^{(4)}} d^4x \partial_\mu j^\mu = \int_{\partial V^{(4)}} d^3\sigma_\mu j^\mu = 0. \quad (1.4.56)$$

Wählt man nun für $V^{(4)}$ einen unendlich ausgedehnten zylinderartigen Vierervolumenbereich, die als „Boden“ den gesamten räumlichen Bereich $t = \text{const}$ bzgl. des gerade gewählten Inertialsystems mit Koordinaten $x = (ct, \vec{x})$ und als Deckel eine beliebige davon verschiedene raumartige Hyperfläche⁵, bedeutet (1.4.56), daß die Größe (1.4.55) unabhängig von der Wahl einer beliebigen unendlich ausgedehnten raumartigen dreidimensionalen Hyperfläche ist. Insbesondere transformiert eine Lorentz-Transformation die raumartige Hyperfläche $t = \text{const}$ in eine entsprechende raumartige Hyperfläche, so daß folglich die Ladung (1.4.55) in der Tat ein **Lorentz-Skalar** ist. Erfüllt hingegen der Strom (1.4.54) die Kontinuitätsgleichung (1.4.54) nicht, so ist i.a. die gemäß (1.4.55) naiv definierte Gesamtladung *kein Lorentz-Skalar!*

Entsprechend verhält es sich auch mit Energie- und Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes. Für das freie Feld gelten gemäß unserer obigen Herleitung aus dem Noether-Theorem die Kontinuitätsgleichungen

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.4.57)$$

und in vollständiger Analogie zu unserer obigen Betrachtung mit der vektoriellen Stromgröße dürfen wir schließen, daß *dann* der naiv gemäß

$$P^\nu = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} T^{0\nu} \quad (1.4.58)$$

in der Tat ein Vierervektor ist, wie es für einen Viererimpulsvektor sein sollte. In Anwesenheit von Ladungs- und Stromverteilungen gelten wegen (1.4.53) die Kontinuitätsgleichungen (1.4.57) nicht mehr und folglich werden in diesem Fall die gemäß (1.4.58) naiv definierten Größen i.a. *keine Vierervektorkomponenten* repräsentieren. Freilich ist die oben gegebene Interpretation dieser Größen als Energie und Impuls in einem festgelegten Inertialsystem in sich konsistent. Allerdings werden wir sehen, daß sich bei einer naiven Anwendung dieser *i.a. nicht kovarianten Begriffe* Interpretationsprobleme verschiedenster Art ergeben, die zu

⁵Wir bezeichnen eine dreidimensionale Hyperfläche im Minkowski-Raum als raumartig, wenn die kovarianten Flächennormalelemente überall zeitartige Vektoren sind.

einiger Verwirrung in der Literatur Anlaß gegeben haben. Um solche „Paradoxa“ zu vermeiden, ist es bei Lorentz-Transformationsfragen stets sinnvoll, in einem fest vorgegebenen, am besten durch die betrachtete Situation physikalisch ausgezeichneten Bezugssystem zu arbeiten und die integralen Größen wie Ladungen, Feldenergie, Feldimpuls etc. kovariant über die entsprechenden Hyperflächen zu *definieren*. Beispiele für solche Probleme sind die elektromagnetische Selbstenergie eines geladenen Teilchens oder die zur Gesamtmasse beitragende Energie des elektromagnetischen Feldes in einem beliebig bewegten Kondensator, die Analyse des Trouton-Noble-Experiments usw. Auf all diese Beispiele kommen wir an geeigneter Stelle in diesem Manuskript noch ausführlich zu sprechen.

1.4.2 Lorentz-Transformationen: Drehimpuls und Schwerpunkt

Wir wenden uns nun der Symmetrie unter **Lorentz-Transformationen**, also den Boosts und Drehungen, zu. Eine infinitesimale Lorentztransformation wird in ihrer Wirkung auf die Raumzeitkoordinaten durch

$$x'^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \delta\omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1.4.59)$$

beschrieben. Damit dies eine Lorentztransformation ist, muß

$$\eta_{\mu\rho}(\delta^{\mu}_{\nu} + \delta\omega^{\mu}_{\nu})(\delta^{\rho}_{\sigma} + \delta\omega^{\rho}_{\sigma}) = \eta_{\nu\sigma} \quad (1.4.60)$$

gelten. Multiplizieren wir die linke Seite aus und berücksichtigen nur Terme bis zur ersten Ordnung in $\delta\omega$, ergibt sich

$$\delta_{\nu\sigma} + \delta\omega_{\nu\sigma} + \delta\omega_{\sigma\nu} = \eta_{\nu\sigma} \Rightarrow \delta\omega_{\nu\sigma} = -\delta\omega_{\sigma\nu}. \quad (1.4.61)$$

In der Tat besitzt eine allgemeine Lorentztransformation sechs unabhängige Parameter. Als Einparameteruntergruppen sind physikalisch besonders wichtig die **Boosts**, die die Transformation der Komponenten von Vektoren und Tensoren von einem Inertialsystem zu einem relativ dazu gleichförmig geradlinig bewegten Bezugssystem beschreiben und die rein räumlichen **Drehungen**. Die damit verbundenen Erhaltungsgrößen sind die Schwerpunktschwindigkeit bzw. der Drehimpuls. Betrachten wir also das freie elektromagnetische Feld, erhalten wir Ausdrücke für Drehimpuls und Schwerpunkt bzw. entsprechende Dichtegrößen.

Das elektromagnetische Viererpotential selbst transformiert sich dabei (modulo Eichtransformationen) als Vierervektorfeld, d.h. es gilt

$$A'^{\mu}(x') = A^{\mu}(x) + \delta\omega^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x) + \frac{1}{2} \partial^{\mu} \delta\omega_{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta}(x). \quad (1.4.62)$$

Dabei ist $\chi^{\mu\nu}$ ein beliebiges antisymmetrisches Tensorfeld zweiter Stufe. Die infinitesimale Lorentz-Transformation entspricht also in der Form (1.4.1) geschrieben

$$\xi^{\mu\alpha\beta} = x^{\alpha} \eta^{\mu\beta} - x^{\beta} \eta^{\mu\alpha}, \quad \Xi^{\mu\alpha\beta} = \eta^{\mu\alpha} A^{\beta} - \eta^{\mu\beta} A^{\alpha} + \partial^{\mu} \chi^{\alpha\beta}. \quad (1.4.63)$$

Hier wurde der die unabhängigen infinitesimalen Parameter der Transformation durchnummerierende Index k durch das Indexpaar (α, β) ersetzt.

Da die Lagrangedichte (1.4.28) selbst invariant unter Lorentz-Transformationen ist und wegen $d^4x' = d^4x$ auch das Vierervolumenelement im Wirkungsintegral, können wir in (1.4.20) wie bei den Translationen $\Omega^{\mu}_{\alpha\beta} = 0$ setzen. Die zur Lorentz-Symmetrie gehörigen Noether-Ströme lauten also gemäß (1.4.23) und wegen (1.4.29) und (1.4.32)

$$\begin{aligned} J^{\mu\alpha\beta} &= -F^{\mu}_{\nu} \Xi^{\nu\alpha\beta} + \Theta^{\mu}_{\nu} \xi^{\nu\alpha\beta} \\ &= F^{\mu}_{\nu} (\eta^{\nu\beta} A^{\alpha} - \eta^{\nu\alpha} A^{\beta} - \partial^{\nu} \chi^{\alpha\beta}) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \delta^{\mu}_{\nu} - F^{\mu\rho} \partial_{\nu} A_{\rho} \right) (x^{\alpha} \eta^{\nu\beta} - x^{\beta} \eta^{\nu\alpha}). \end{aligned} \quad (1.4.64)$$

1.5. Elektrostatik

Jetzt wollen wir wieder $\chi^{\alpha\beta}$ so wählen, daß der gesamte Ausdruck eichinvariant wird. Offenbar kann man den ersten Term in der ersten Klammer zum Verschwinden bringen, indem man

$$\chi^{\alpha\beta} = A^\alpha x^\beta - A^\beta x^\alpha \quad (1.4.65)$$

setzt. Dies erfüllt auch die oben getroffene Voraussetzung, daß $\chi^{\alpha\beta}$ ein antisymmetrischer Tensor sein soll. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} J^{\mu\alpha\beta} &= F^\mu{}_\nu (x^\alpha \partial^\nu A^\beta - x^\beta \partial^\nu A^\alpha) + \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} (x^\alpha \eta^{\mu\beta} - x^\beta \eta^{\mu\alpha}) - F^\mu{}_\nu (x^\alpha \partial^\beta A^\nu - x^\beta \partial^\alpha A^\nu) \\ &= F^\mu{}_\nu (x^\alpha F^{\nu\beta} - x^\beta F^{\nu\alpha}) + \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} (x^\alpha \eta^{\mu\beta} - x^\beta \eta^{\mu\alpha}) \\ &= x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}. \end{aligned} \quad (1.4.66)$$

Um die dazugehörigen Erhaltungsgrößen zu interpretieren, setzen wir $\mu = 0$ und spalten wie schon bei der Betrachtung des Energie-Impulstensors in zeit-räumliche und raumräumliche Komponenten auf. Dabei stoßen wir auf die sechs unabhängigen Größen, die wir gleich in dreidimensionaler Vektorschreibweise notieren,

$$(J^{00j}) = t \vec{S} - \vec{x} \epsilon = t c^2 \vec{\Pi} - \vec{x} \epsilon \quad (1.4.67)$$

$$J^{0jk} = c \epsilon_{jkl} \mathcal{J}_l \quad \text{mit} \quad \vec{\mathcal{J}} = \vec{x} \times \vec{\Pi} = \frac{1}{c} \vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (1.4.68)$$

Dabei haben wir uns (1.4.37) und (1.4.38) bedient. Integration der Komponenten J^{00j} über den ganzen Raum liefert die gleichförmig geradlinige Bewegung des Schwerpunkts des freien elektromagnetischen Feldes

$$\langle \vec{x} \rangle = \frac{1}{E_{\text{em}}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \vec{x} \epsilon(t, \vec{x}) = \frac{c^2 \vec{P}_{\text{em}}}{E_{\text{em}}} t + M_{\text{em}} \langle \vec{x} \rangle_{t=0}, \quad E_{\text{em}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \epsilon(t, \vec{x}). \quad (1.4.69)$$

Dabei ist wieder zu beachten, daß $(E_{\text{em}}, c \vec{P}_{\text{em}})$ nur für das freie elektromagnetische Feld die Komponenten eines Vierervektors bilden (vgl. die Bemerkungen im Anschluß an (1.4.58)). Entsprechend ist

$$\vec{J}_{\text{em}} = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (1.4.70)$$

der **Gesamtdrehimpuls des freien elektromagnetischen Feldes**.

Bei Anwesenheit von Ladungs- und Stromverteilungen erhalten wir die Bilanzgleichung für Schwerpunktbewegung und Drehimpuls am einfachsten in kovarianter Form, indem wir (1.4.53) verwenden und die Divergenz von (1.4.66) bilden:

$$\partial_\mu J^{\mu\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + x^\alpha \partial_\mu T^{\mu\beta} - T^{\beta\alpha} - x^\beta \partial_\mu T^{\mu\alpha} = -(x^\alpha F^\beta{}_\mu - x^\beta F^\alpha{}_\mu) j^\mu. \quad (1.4.71)$$

Auf der rechten Seite finden wir, wie zu erwarten, die vierdimensionale Verallgemeinerung des Negativen der auf die Ladungen wirkenden **Drehmoments** aufgrund der auf sie wirkenden elektromagnetischen Kraft.

1.5 Elektrostatik

Die Elektrostatik behandelt den Spezialfall, daß (in einem bestimmten Inertialsystem) die Ladungsdichte zeitunabhängig ist und die Stromdichte verschwindet. Außerdem nehmen wir an, daß auch das elektromagnetische Feld zeitlich konstant ist. Betrachten wir diese Situation im Dreierformalismus in diesem Bezugssystem, vereinfachen sich die Maxwell-Gleichungen (1.1.34-1.1.37) zu

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= \rho(\vec{x}), & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

In diesem Kapitel, wo wir die materiefreien Maxwell-Gleichungen behandeln, haben wir zusätzlich zu diesen Feldgleichungen nur die Randbedingung zu verlangen, daß die Felder im Unendlichen hinreichend schnell verschwinden, solange wir die Ladungsverteilung auf einen räumlich endlichen Bereich beschränken. Aus dem **Helmholtzischen Fundamentalsatz der Vektoranalysis** (vgl. [CH10]) folgt damit für das Magnetfeld sofort

$$\vec{B} = 0, \quad (1.5.2)$$

d.h. es liegt (in diesem speziellen Bezugssystem!) ein rein elektrostatisches Feld vor. Bei vorgegebener Ladungsverteilung haben wir die Lösung dieses Problems bereits im einleitenden Kapitel aus dem **Coulombschen Gesetz** hergeleitet (vgl. (1.1.4)).

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir diese Formel nochmals auf systematischere Art herleiten, indem wir den wichtigen Begriff der **Green-Funktion** und die elektromagnetischen Potentiale verwenden und die Multipolentwicklung sowie ein einfaches Beispiel betrachten.

1.5.1 Die Poisson-Gleichung und die Green-Funktion des Laplace-Operators

In Abschnitt 1.2 haben wir gezeigt, daß wir die homogenen Maxwell-Gleichungen durch die Einführung des Viererpotentials (im Dreierformalismus gesprochen eines skalaren und eines Vektorpotentials) identisch erfüllen können, indem wir die Felder in der Form (1.2.9) schreiben. Für die hier betrachtete elektrostatische Situation vereinfacht sich dieser Ansatz zu

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}), \quad \vec{A} = 0. \quad (1.5.3)$$

Dabei haben wir das Vektorpotential einfach 0 gesetzt. Offenbar ist dieser Ansatz mit (1.5.1) und (1.5.2) kompatibel und erfüllt die Lorenz-Eichbedingung (1.2.17). Da das elektrische Feld demnach ein reines Potentialfeld ist, ist es in der Tat auch wirbelfrei, d.h.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi = 0. \quad (1.5.4)$$

Es bleibt also nur noch die inhomogene Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta\Phi = \rho \quad (1.5.5)$$

zu lösen. Diese Gleichung heißt **Poisson-Gleichung**. Wie bereits oben gesagt, kennen wir ihre Lösung (1.1.4) für eine beliebige vorgegebene Ladungsverteilung ρ bereits. Hier wollen wir sie auf eine etwas andere Art herleiten, nämlich über die Methode der **Green-Funktion des Laplace-Operators**. Diese Funktion definieren wir durch⁶

$$\Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (1.5.6)$$

Es ist nämlich klar, daß wir dann die Lösung der Poisson-Gleichung (1.5.5) als Integral

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' G(\vec{x}, \vec{x}')\rho(\vec{x}') \quad (1.5.7)$$

schreiben können.

Um die Green-Funktion zu finden, bemerken wir als erstes, daß wir offenbar den Ansatz

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = g(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.5.8)$$

machen können, wobei

$$\Delta g(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \quad (1.5.9)$$

⁶Die Vorzeichenkonvention bei der Definition der Green-Funktion ist willkürlich. Wir folgen hier der in der Quantenfeldtheorie in der Hochenergiephysik-Community weitverbreitetsten Konvention.

gilt. Offenbar ist diese Gleichung invariant unter Drehungen um den Ursprung, so daß wir weiter den Ansatz zu

$$g(\vec{x}) = h(|\vec{x}|) = h(r) \quad (1.5.10)$$

vereinfachen dürfen. Führen wir nun Kugelkoordinaten ein, wobei wir freilich die z-Achse ausnehmen müssen, weil die Kugelkoordinaten dort singulär sind, folgt aus der Darstellung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten

$$\Delta h(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r h(r)] = 0 \quad \text{für } r \neq 0. \quad (1.5.11)$$

Diese Gleichung können wir durch einfaches Integrieren lösen, denn offenbar ist

$$\frac{\partial}{\partial r} [r h(r)] = A \Rightarrow h(r) = A + \frac{B}{r}. \quad (1.5.12)$$

Wir verlangen, daß $h(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ gilt, damit das durch (1.5.7) gegebene Potential im Unendlichen verschwindet, d.h. wir setzen $A = 0$.

Nun müssen wir noch die Konstante B festlegen. Dazu integrieren wir (1.5.10) über eine Kugel um den Ursprung mit beliebigem Radius R , was

$$\int_{K_R} d^3 \vec{x} \Delta h(\vec{x}) = \int_{\partial K} d^2 \vec{F} \cdot \vec{\nabla} h(\vec{x}) \stackrel{!}{=} 1 \quad (1.5.13)$$

ergibt. Nun ist

$$\vec{\nabla} h(\vec{x}) = -\frac{B \vec{r}}{r^3} \quad (1.5.14)$$

und damit das Oberflächenintegral in (1.5.13) $-4\pi B$. Daraus folgt schließlich $B = -1/(4\pi)$ und damit für die Green-Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = h(|\vec{x} - \vec{x}'|) = -\frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (1.5.15)$$

Für das elektrostatische Potential liefert dies wegen (1.5.7)

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (1.5.16)$$

Für das elektrostatische Feld liefert also (1.5.3)

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}') (\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \quad (1.5.17)$$

was freilich, wie zu erwarten, mit (1.1.4) übereinstimmt.

1.5.2 Entwicklung nach Eigenfunktionen

Wie in [CH10] ausführlich dargestellt, können Funktionen nach **verallgemeinerten Fourier-Reihen oder Fourier-Integralen** entwickelt werden, wobei die Konvergenz im Sinne des Funktionenraums L^2 zu verstehen ist. Diese Darstellungen sind besonders nützlich, wenn die verwendeten **vollständigen orthonormierten Funktionensysteme** (VONS) den zu lösenden Gleichungen für ein physikalisches Problem sowie die verwendeten Koordinaten bestimmten Symmetrien desselben angepaßt werden. In diesem Abschnitt betrachten wir diese Methode am Beispiel der **Laplace- bzw. Poisson-Gleichung** in kartesischen Koordinaten. Dabei spielt die oben gefundene geschlossene Lösung für die Green-Funktion eine wichtige Rolle, um Grundeigenschaften der sich ergebenden VONS zu gewinnen.

Betrachten wir also den Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.5.18)$$

und suchen die **Eigenwerte und dazugehörigen Eigenfunktionen** des Operators $-\Delta$

$$-\Delta u_\lambda(\vec{x}) = \lambda u_\lambda(\vec{x}). \quad (1.5.19)$$

Die Wahl des Vorzeichens ist deshalb nützlich, weil wir gleich sehen werden, daß dann die Eigenwerte nicht negativ werden.

Wir erinnern daran (vgl. [CH10]), daß die Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten notwendig orthogonal sind, weil der Laplace-Operator **selbstadjungiert** ist. Wir betrachten hierbei den Funktionenraum $L^2(\mathbb{R}^3)$ der quadratintegralen Funktionen mit dem **Skalarprodukt**

$$\langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} f^*(\vec{x})g(\vec{x}). \quad (1.5.20)$$

In der Tat folgt durch zweimaliges partielles Integrieren

$$\begin{aligned} \langle f | \Delta g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} f^*(\vec{x})\Delta g(\vec{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} [\vec{\nabla} f^*(\vec{x})] \cdot [\vec{\nabla} g(\vec{x})] \\ &= + \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} [\Delta f(\vec{x})]^* g(\vec{x}) = \langle \Delta f | g \rangle, \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

d.h. die Selbstadjungiertheit des Laplace-Operators. Für zwei Eigenfunktionen folgt daraus in der Tat

$$\begin{aligned} \langle u_\lambda | \Delta u_{\lambda'} \rangle &= - \langle u_\lambda | \lambda' u_{\lambda'} \rangle = -\lambda' \langle u_\lambda | u_{\lambda'} \rangle \\ &= \langle \Delta u_\lambda | u_{\lambda'} \rangle = - \langle \lambda u_\lambda | u_{\lambda'} \rangle = -\lambda^* \langle u_\lambda | u_{\lambda'} \rangle \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

und damit

$$(\lambda^* - \lambda') \langle u_\lambda | u_{\lambda'} \rangle = 0. \quad (1.5.23)$$

Daraus folgt für $\lambda^* \neq \lambda'$, daß in der Tat die Eigenfunktionen zueinander orthogonal sind. Nun müssen wir nur noch zeigen, daß die Eigenwerte reell sind. Falls die Eigenfunktionen tatsächlich quadratintegral und damit normierbar sind, folgt dies sofort aus (1.5.22), indem man $\lambda' = \lambda$ setzt. Wie wir gleich sehen werden, können die Eigenwerte in unserem Fall beliebige reelle Werte annehmen, d.h. sie bilden ein **kontinuierliches Spektrum**, und in diesem Fall sind die Eigenfunktionen genauer als Distributionen bzw. verallgemeinerter Funktionen aufzufassen und auf die δ -Distribution normiert, d.h. wir setzen

$$\langle u_\lambda | u_{\lambda'} \rangle = \delta(\lambda - \lambda'). \quad (1.5.24)$$

Man kann allerdings die Realität der Eigenwerte in diesem Fall durch geeignete Grenzwertübergänge beweisen, indem man zunächst den Raum auf ein endliches Volumen einschränkt und die Funktionen geeigneten Randbedingungen (z.B. periodischen Randbedingungen) unterwirft. Wir werden weiter sehen, daß es zu jedem Eigenwert mehrere verallgemeinerte Funktionen gibt, d.h. das Spektrum ist **entartet**.

Dieses Problem läßt sich nun dadurch lösen, daß wir bestimmte Sätze von verallgemeinerten Eigenfunktionen dadurch gewinnen, daß wir einen sogenannten **Separationsansatz** verwenden. Dann erhalten wir jeweils von der Wahl der Koordinaten abhängige verallgemeinerte Eigenfunktionen. Es ist klar, daß solche Ansätze nur für bestimmte Koordinaten zum Ziel führen. Wie wir gleich sehen werden, ist der Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten tatsächlich separabel, d.h. er führt in diesem Fall tatsächlich zum Ziel.

Der Separationsansatz lautet für unser Beispiel der kartesischen Koordinaten

$$u_\lambda(\vec{x}) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (1.5.25)$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Eigenwertgleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta u_\lambda(\vec{x}) &= X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) \\ &\stackrel{!}{=} -\lambda u_\lambda(\vec{x}) = -\lambda X(x)Y(y)Z(z). \end{aligned} \quad (1.5.26)$$

Dividieren wir diese Gleichung durch $u_\lambda(\vec{x})$ und formen ein wenig um, erhalten wir

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda - \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)}. \quad (1.5.27)$$

Nun hängt die linke Seite dieser Gleichung nur von x , die rechte nur von y und z ab. Damit muß dieser Ausdruck aber konstant sein. Wir schreiben

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_1^2 \Rightarrow X(x) = A \exp(\pm i k_1 x). \quad (1.5.28)$$

Hier genügt es allerdings, nur ein Vorzeichen zu betrachten, da wir ja alle Eigenfunktionen für alle möglichen Eigenwerte betrachten. Wir wählen konventionsgemäß das obere Vorzeichen.

Weiter gilt nun wegen (1.5.28) und (1.5.27)

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda + k_1^2 + \frac{Z''(z)}{Z(z)}. \quad (1.5.29)$$

Jetzt können wir wieder genau wie oben argumentieren: Die linke Seite der Gleichung hängt nur von y , die rechte nur von z ab, so daß wir insgesamt wieder eine Konstante vorliegen haben. Wir setzen also

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_2^2 \Rightarrow Y(y) = B \exp(i k_2 y). \quad (1.5.30)$$

Diese Prozedur führen wir schließlich nochmals für Z aus und erhalten

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k_3^2 \Rightarrow Z(z) = C \exp(i k_3 z). \quad (1.5.31)$$

Insgesamt ergibt sich also als Eigenfunktionen des negativen Laplaceoperators

$$u_{\vec{k}}(\vec{x}) = N \exp(i \vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (1.5.32)$$

Der Eigenwert ergibt sich sofort durch Anwenden des Laplaceoperators (aber auch aus der obigen Konstruktion) zu

$$\lambda(\vec{k}) = \vec{k}^2. \quad (1.5.33)$$

Damit die Eigenfunktionen $u_{\vec{k}}$ wenigstens im ganzen Raum beschränkt sind und sich auf die δ -Distribution normieren lassen, muß offenbar $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ sein. Dies liefert wegen (1.5.33) nichtnegative reelle Eigenwerte. Außerdem sehen wir, daß es zu jedem Eigenwert $\lambda \neq 0$ überabzählbar viele verallgemeinerte Eigenfunktionen gibt: Für jeden Wert λ liefert die ganze Kugelschale $\vec{k}^2 = \lambda$ von \vec{k} -Werten eine Eigenfunktion zu diesem Eigenwert.

Die Normierung ergibt sich aus der Forderung

$$\langle u_{\vec{k}} | u_{\vec{k}'} \rangle \stackrel{!}{=} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (1.5.34)$$

Wie wir aus der Theorie der Fourier-Transformationen wissen (vgl. wieder [CH10]), ist

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \exp[i\vec{x} \cdot (\vec{k} - \vec{k}')] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (1.5.35)$$

Für die entsprechend normierten Eigenfunktionen gilt also

$$u_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (1.5.36)$$

Die Fourier-Theorie besagt nun weiter, daß wir jede L^2 -Funktion im Sinne der L^2 -Norm nach verallgemeinerten Eigenfunktionen entwickeln können. In der Hilbert-Raum-Notation, die übrigens auf Diracs Formulierung der Quantentheorie zurückgeht, heißt das

$$|f\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} |u_{\vec{k}}\rangle \langle u_{\vec{k}} | f \rangle. \quad (1.5.37)$$

Ausführlich für die Funktionen notiert heißt das

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \tilde{f}(\vec{k}) \quad \text{mit} \\ \tilde{f}(\vec{k}) &= \langle u_{\vec{k}} | f \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) f(\vec{x}). \end{aligned} \quad (1.5.38)$$

Wir werden auf diese Art ganz natürlich auf die Fourier-Darstellung der Funktionen geführt.

Im Zusammenhang mit dem Laplace-Operator wird dies erst dann wirklich interessant, wenn wir es mit echten **Randwertproblemen** zu tun bekommen. Dies werden wir in Abschnitt 2.1.1 ausführlich betrachten. Als Beispiel für die Anwendung der hier betrachteten Technik berechnen wir die Greensche Funktion des Laplaceoperators mit Hilfe der Fourier-Transformation. Wir gehen dazu von (1.5.6) aus und machen den Ansatz

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \tilde{G}(\vec{k}, \vec{x}') \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (1.5.39)$$

Setzen wir diesen Ansatz also in (1.5.6) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}, \vec{x}') &= - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \tilde{G}(\vec{k}, \vec{x}') \vec{k}^2 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \\ &\stackrel{!}{=} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \frac{1}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')]. \end{aligned} \quad (1.5.40)$$

Es muß also

$$\tilde{G}(\vec{k}, \vec{x}') = - \frac{1}{\vec{k}^2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}') = - \frac{1}{\vec{k}^2} u_{\vec{k}}^*(\vec{x}') \quad (1.5.41)$$

sein, und folglich gilt

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \frac{1}{(-\vec{k}^2)} u_{\vec{k}}(\vec{x}) u_{\vec{k}}^*(\vec{x}'). \quad (1.5.42)$$

1.5. Elektrostatik

In dieser Form geschrieben ist das Resultat fast selbstverständlich: $-\vec{k}^2$ ist ja Eigenwert des Laplaceoperators mit der Eigenfunktion $u_{\vec{k}}$. Daher gilt

$$\Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}, \vec{x}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} u_{\vec{k}}(\vec{x}) u_{\vec{k}}^*(\vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (1.5.43)$$

Dabei ist (1.5.44) nichts anderes als die **Vollständigkeitsrelation** der Eigenfunktionen. Diese lautet formal geschrieben

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} |u_{\vec{k}}\rangle \langle u_{\vec{k}}| = \mathbb{1}. \quad (1.5.44)$$

Dies besagt aber nichts anderes, als daß für jede L^2 -Funktion

$$|f\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} |u_{\vec{k}}\rangle \langle u_{\vec{k}}| f \rangle \Rightarrow f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} u_{\vec{k}}(\vec{x}) \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' u_{\vec{k}}^*(\vec{x}') f(\vec{x}') \quad (1.5.45)$$

gilt, und dies ist ja nichts anderes als der Fouriersche Satz für Fourier-Integrale (vgl. wieder [CH10]).

Für die Lösung der Poisson-Gleichung haben wir wegen (1.5.7) mit (1.5.43) die Form

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \frac{\tilde{\rho}(\vec{k})}{\vec{k}^2} u_{\vec{k}}(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \tilde{\rho}(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \frac{\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}')}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (1.5.46)$$

Wegen der prinzipiellen Wichtigkeit zum Verständnis der hier (im übrigen mathematisch recht unpräzise ausgeführten) Handhabung von Distributionen wollen wir noch die explizite Gestalt der Green-Funktion (1.5.15) aus (1.5.42) gewinnen:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \frac{1}{(2\pi)^3 \vec{k}^2} \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')]. \quad (1.5.47)$$

Zunächst sehen wir, daß dieses Integral nicht im üblichen Sinne konvergiert für $\vec{k} \rightarrow \infty$. Wir „regularisieren“ es daher zunächst dadurch, daß wir nur über eine Kugel mit Radius K integrieren und erst zum Schluß den Grenzwert $K \rightarrow \infty$ bilden („Cutoff-Regularisierung“). Außerdem schreiben wir zur Abkürzung $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{y}$ und wählen die Richtung dieses Vektors als Polarachse eines sphärischen Koordinatensystems für \vec{k} dann wird aus (1.5.47)

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = - \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^K dk \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\vartheta \exp(iky \cos\vartheta) \quad (1.5.48)$$

mit $y = |\vec{y}|$. Das Integral über φ liefert offenbar nur einen Faktor 2π , während das Integral über ϑ durch Substitution $u = \cos\vartheta$, $du = -d\vartheta \sin\vartheta$ zu

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = - \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^K dk \int_{-1}^1 du \exp(iky u) = - \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi^2 y} \int_0^K dk \frac{\sin(ky)}{k} = - \frac{1}{4\pi y} \quad (1.5.49)$$

führt. Wegen $y = |\vec{x} - \vec{x}'|$ stimmt dies tatsächlich mit (1.5.15) überein. Bei der letzten Integration in (1.5.50) haben wir

$$\int_0^\infty dk \frac{\sin(ky)}{k} = \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad y > 0 \quad (1.5.50)$$

verwendet. Um diese Gleichung zu beweisen, betrachten wir für $y > 0$ das Fourier-Integral

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^\infty dx \Theta(y - |x|) \exp(-ikx) = \int_{-y}^y \exp(-ikx) \\ &= -i \frac{\exp(iky) - \exp(-iky)}{k} = 2 \frac{\sin(ky)}{y}. \end{aligned} \quad (1.5.51)$$

Nach dem Fourierschen Umkehrsatz für Fourier-Integrale gilt nun

$$\Theta(y - |x|) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k) \exp(ikx) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin(ky)}{\pi k} \exp(ikx). \quad (1.5.52)$$

Für $x = 0$ und $y > 0$ folgt daraus in der Tat (1.5.50):

$$\int_0^{\infty} dk \frac{\sin(ky)}{k} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin(ky)}{k} = \frac{\pi}{2}. \quad (1.5.53)$$

1.5.3 Elektrostatische Multipolentwicklung

Wir sind oben auf natürliche Weise zur Fourier-Darstellung der Greenschen Funktion gelangt, indem wir die Eigenwertaufgabe für den (negativen) Laplace-Operator durch den **Separationsansatz** (1.5.25) gelöst haben. Man sagt auch, daß die Eigenwertgleichung in kartesischen Koordinaten separiert. Entsprechend kann man nun auch durch Separationsansätze bzgl. anderer Koordinaten zum Ziel zu gelangen. Im Falle des Laplace-Operators ist das u.a. auch in **Kugelkoordinaten** (r, ϑ, φ) der Fall. Auch hier können wir wieder auf [CH10] verweisen. Wie dort ausführlich erläutert wird, wird man dadurch auf die **Kugelflächenfunktionen** geführt. Hier fassen wir daher nur noch das wesentlichste kompakt zusammen.

Der Separationsansatz führt auf Lösungen u_{klm} der Eigenwertgleichung

$$\Delta u_{klm} = -k^2 u_{klm} \quad (1.5.54)$$

der Gestalt

$$u_{klm}(r, \vartheta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.5.55)$$

wo die Y_{lm} die **Kugelflächenfunktionen** bezeichnen. Die Bereiche für die Parameter sind $l \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, und für gegebenes l muß $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$ sein. Die Kugelflächenfunktionen selbst sind durch

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_{lm}(\cos \vartheta) \exp(im\varphi), \quad (1.5.56)$$

$$P_{lm}(u) = \frac{(-1)^m (1-u^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{du^{l+m}} (u^2 - 1)^l, \quad (1.5.57)$$

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2 - 1)^l. \quad (1.5.58)$$

gegeben. Die P_l sind die **Legendre-Polynome** und die P_{lm} die zugeordneten **Legendre-Funktionen**. Die in unserem Zusammenhang wichtigste Eigenschaft dieser Funktionen ist, daß sie ein VONS von $L^2(S)$, wobei S die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 bezeichnet, bilden, d.h. es gelten mit dem Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle_S = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta f^*(\vartheta, \varphi) g(\vartheta, \varphi) \quad (1.5.59)$$

die Orthonormierungseigenschaften

$$\langle Y_{lm} | Y_{l'm'} \rangle_S = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (1.5.60)$$

und die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |Y_{lm}\rangle \langle Y_{lm}| = \mathbb{1}. \quad (1.5.61)$$

1.5. Elektrostatik

Wir können also jede auf der Einheitssphäre definierte quadratintegrale Funktion im Sinne der Hilbertraummetrik gemäß

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.5.62)$$

nach Kugelflächenfunktionen entwickeln, wobei die Koeffizienten durch

$$f_{lm} = \langle Y_{lm} | f \rangle_S = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) f(\vartheta, \varphi) \quad (1.5.63)$$

gegeben sind. Explizit mit den Kugelflächenfunktionen ausgedrückt, können wir die Vollständigkeitsrelation (1.5.61) demnach in der Form

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') \quad (1.5.64)$$

schreiben. Da die Kugelkoordinaten an den beiden Polen der Kugel singularär sind, müssen wir $\vartheta' \notin \{0, \pi\}$ voraussetzen, weil andernfalls im Zusammenhang mit der δ -Distribution in (1.5.64) ein undefinierter Ausdruck entsteht.

Weiter zeigt man mit Hilfe der Darstellung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}, \quad (1.5.65)$$

daß die Kugelflächenfunktionen die Gleichung

$$\Delta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.5.66)$$

erfüllen [CH10].

Wir wollen uns an dieser Stelle noch nicht mit dem vollständigen Eigenwertproblem des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten befassen, da wir dies in Abschnitt 1.7.4 nachholen werden, wo diese Problemstellung ihren natürlichen physikalischen Platz hat.

Vielmehr wollen wir jetzt die Greensche Funktion des Laplace-Operators ganz analog wie oben bei den kartesischen Koordinaten mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen schreiben. Dies führt auf die **Multipolentwicklung** des elektrostatischen Potentials und des elektrostatischen Feldes. Gehen wir also mit dem Ansatz für die Green-Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm}(r, r') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.5.67)$$

wobei (r, ϑ, φ) die Polarkoordinaten von \vec{x} und $(r', \vartheta', \varphi')$ diejenigen von \vec{x}' bezeichnen, in (1.5.6) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}, \vec{x}') &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r R_{lm}(r, r')] - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm}(r, r') \right] Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\ &= -\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \delta(r - r') \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi'). \end{aligned} \quad (1.5.68)$$

Wegen (1.5.64) müssen also für alle l, m die Gleichungen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r R_{lm}(r, r')] - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm}(r, r') = -\frac{1}{r^2} \delta(r - r') \quad (1.5.69)$$

1. Das elektromagnetische Feld im Vakuum

gelten. Dabei suchen wir Lösungen dieser Gleichungen, so daß $R_{lm}(r, r') \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ bzw. $r' \rightarrow \infty$. Aufgrund der Singularität der δ -Distribution auf der linken Seite von (1.5.70), suchen wir also Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung für $r > r'$ bzw. $r < r'$, die jeweils diese Randbedingungen erfüllen.

Offenbar haben wir

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A(r')r^l & \text{für } r < r', \\ B(r')/r^{l+1} & \text{für } r > r'. \end{cases} \quad (1.5.70)$$

Multiplizieren wir (1.5.69) mit r und integrieren über ein infinitesimal kleines Intervall $r \in (r' - 0^+, r' + 0^+)$, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial r} [r R_{lm}(r, r')] \Big|_{r=r'-0^+}^{r=r'+0^+} = -\frac{1}{r'}. \quad (1.5.71)$$

Dabei haben wir Stetigkeit der Funktion R_{lm} bei $r = r'$ vorausgesetzt. Diese Stetigkeitsbedingung ergibt die Forderung

$$A(r')r'^l = \frac{B(r')}{r'^{l+1}}, \quad (1.5.72)$$

und (1.5.71) liefert

$$A(r')(l+1)r'^l + l \frac{B(r')}{r'^{l+1}} = \frac{1}{r'}. \quad (1.5.73)$$

Setzt man (1.5.72) in (1.5.74) ein, erhält man

$$A(r') = \frac{1}{(2l+1)r'^{l+1}}, \quad B(r') = \frac{r'^l}{2l+1}. \quad (1.5.74)$$

Es gilt also

$$R_{lm}(r, r') = \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \quad \text{mit } r_{<} = \min(r, r'), \quad r_{>} = \max(r, r') \quad (1.5.75)$$

und schließlich

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\varphi', \vartheta') Y_{lm}(\varphi, \vartheta). \quad (1.5.76)$$

Betrachten wir nun eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung und wenden (1.5.16) an. Nehmen wir an, die Ladung sei außerhalb der Kugel K_R um den Ursprung des betrachteten Koordinatensystems von 0 verschieden. Für das Potential an einem Punkt im ladungsfreien Bereich ergibt dann (1.5.75) im Zusammenhang mit (1.5.16) die **Multipolentwicklung** nach inversen Potenzen des Abstandes $r = |\vec{x}|$

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{(2l+1)r^{l+1}} \int_0^R dr' \int_0^\pi d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' r'^{l+2} \sin \vartheta' Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \rho(\vec{x}'). \quad (1.5.77)$$

Diese Entwicklung wird nun meist in einer etwas anderen Form geschrieben, und zwar mit Hilfe der **sphärischen Multipolmomente**

$$\begin{aligned} Q_{lm} &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_0^R dr' \int_0^\pi d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' r'^{l+2} \sin \vartheta' Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \rho(\vec{x}') \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_{K_R} d^3 \vec{x}' Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') r'^l \rho(\vec{x}'). \end{aligned} \quad (1.5.78)$$

in der Gestalt

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^l \frac{Q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1.5.79)$$

Betrachten wir nun die physikalische Bedeutung der ersten Multipolmomente für $l = 0, 1, 2$, die man aus Gründen, die gleich klar werden, als **Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment** bezeichnet.

Wir geben zuerst die entsprechenden Kugelflächenfunktionen explizit an

$$l = 0: \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad (1.5.80)$$

$$l = 1: \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, \\ Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta \exp(\pm i\varphi), \quad (1.5.81)$$

$$l = 2: \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \\ Y_{2\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta \exp(\pm i\varphi), \\ Y_{2\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta \exp(\pm 2i\varphi). \quad (1.5.82)$$

Beginnen wir also mit dem Monopolbeitrag zum elektrostatischen Potential (1.5.79), also dem Term zu $l = m = 0$. Mit (1.5.80) ergibt sich

$$\Phi_{00}(\vec{x}) = \frac{Q_{00}}{4\pi r}, \quad Q_{00} = \int_{K_R} d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}') = Q_{\text{tot}}. \quad (1.5.83)$$

Dies ist anschaulich leicht verständlich: Aus hinreichender Entfernung betrachtet ergibt die auf die Kugel K_R konzentrierte Ladungsverteilung dasselbe elektrische Feld wie eine Punktladung mit der Gesamtladung $Q_{00} = Q_{\text{tot}}$ im Koordinatenursprung.

Der Dipolbeitrag kann am einfachsten interpretiert werden, wenn wir den Beitrag in **kartesische Komponenten** umschreiben. Dazu verwenden wir

$$\cos \vartheta = \frac{z}{r}, \quad \sin \vartheta \exp(\pm i\varphi) = \frac{x \pm iy}{r}. \quad (1.5.84)$$

Daraus folgt zunächst

$$Q_{10} = \int_{K_R} d^3 \vec{x}' z' \rho(\vec{x}') =: P_z, \quad Q_{1\pm 1} = \mp \int_{K_R} d^3 \vec{x}' \frac{x' \mp iy'}{\sqrt{2}} \rho(\vec{x}') = \mp \frac{P_x \mp iP_y}{\sqrt{2}}, \\ \vec{P} = \int_{K_R} d^3 \vec{x}' \vec{x}' \rho(\vec{x}'). \quad (1.5.85)$$

Der Vektor \vec{P} heißt **Dipolmoment** der durch ρ gegebenen Ladungsverteilung. Der Beitrag zum elektrostatischen Potential ist dann

$$\Phi_1(\vec{x}) = \frac{P_z z}{4\pi r^3} + \frac{(P_x - iP_y)(x + iy) + (P_x + iP_y)(x - iy)}{8\pi r^3} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{x}}{4\pi r^3}. \quad (1.5.86)$$

Dieses Potential läßt sich ebenfalls leicht physikalisch interpretieren. Zunächst bemerken wir, daß der Anteil des elektrischen Feldes überall quellenfrei ist. Das Feld ist nämlich

$$\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\Phi_1 = \frac{1}{4\pi r^5} [3(\vec{P} \cdot \vec{x})\vec{x} - r^2\vec{P}]. \quad (1.5.87)$$

Integrieren wir dieses Feld über eine Kugel mit beliebigem Radius ϵ um den Ursprung, wobei wir die Polachse in die Richtung von \vec{P} legen. Dann folgt in der Tat

$$\int_{\partial K_\epsilon} d^2\vec{F} \cdot \vec{E}_1 = \frac{P}{2\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta = \frac{P}{2\epsilon} \int_0^\pi d\vartheta \sin(2\vartheta) = 0. \quad (1.5.88)$$

Das bedeutet, daß im Ursprung keine Nettopunktladung sitzen kann. Das ist mit der Multipolentwicklung konsistent, weil der Beitrag einer Nettopunktladung im Ursprung ja durch den Monopolbeitrag bereits abgedeckt ist.

Es ist klar, daß das auch für alle höheren Multipolfelder gilt. In der Tat ist für $\epsilon > R$

$$\int_{\partial K_\epsilon} d^2\vec{F} \cdot \vec{E} = -\epsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \partial_r \Phi(\vec{x}) = -\epsilon^2 \sqrt{4\pi} \langle Y_{00} | \partial_r \Phi |_{|\vec{x}|=\epsilon} \rangle_S = Q_{00} = Q_{\text{tot}}, \quad (1.5.89)$$

wobei die Gesamtladung einzig vom Monopolbeitrag herrührt. Alle anderen Multipolbeiträge verschwinden wegen der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen bzgl. des Skalarprodukts auf der Einheitskugel.

Da weiter die einzige weitere Charakterisierung des Dipolfeldanteils der Vektor \vec{P} ist, muß es sich um eine Ladungsanordnung mit zwei entgegengesetzten Ladungen, deren Verbindungslinie entlang der Richtung von \vec{P} liegt, handeln, wobei wir das Feld aus großer Entfernung verglichen zum Abstand der beiden Ladungen betrachten. Setzen wir also eine Ladung $-Q < 0$ bei $\vec{x}' = 0$ und eine Ladung $+Q > 0$ bei $\vec{x}' = d\hat{P}$, wobei $\hat{P} = \vec{P}/|\vec{P}|$ der Einheitsvektor in Richtung des Dipolmomentes ist, so ergibt sich das elektrostatische Potential für diese Ladungsverteilung bei \vec{x} mit $r = |\vec{x}| \gg d$

$$\Phi_d(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{x} - d\hat{P}|} - \frac{1}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi r} \left(\frac{1}{|\hat{x} - d/r\hat{P}|} - 1 \right) = \frac{Q}{4\pi r} \frac{d\hat{x} \cdot \hat{P}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{Qd^2}{r^2}\right). \quad (1.5.90)$$

Lassen wir nun $d \rightarrow 0$ gehen, wobei wir $Qd = P$ festhalten, erhalten wir in der Tat wieder das Potential (1.5.86) zurück. Damit ist das Dipolmoment durch ein Paar entgegengesetzt gleicher infinitesimal beieinandergelegener Punktladungen interpretiert. Die Richtung ist dabei dadurch festgelegt, daß sie der der Verbindungslinie von der negativen zur positiven Ladung entspricht.

Diskutieren wir das **Quadrupolfeld**, also der $l = 2$ -Beitrag zur Multipolentwicklung (1.5.79) zunächst quantitativ: Schreiben wir dazu wieder die Kugelflächenfunktionen in kartesischen Komponenten, erhalten wir Tensorbeiträge der Form $x_j x_k / r^2$. Die 5 sphärischen Quadrupolkomponenten Q_{2m} müssen demnach mit den entsprechenden kartesischen symmetrischen Momenten zweiter Stufe der Ladungsverteilung zu tun haben. Allerdings wird

$$\tilde{Q}_{jk} = 3 \int_{K_R} d^3\vec{x}' x'_j x'_k \rho(\vec{x}') \quad (1.5.91)$$

i.a., $3 \cdot 2/2 + 3 = 6$ unabhängige Komponenten beinhalten. Andererseits kann der Quadrupolbeitrag nicht durch eine infinitesimal ausgedehnte Ladungsverteilung um den Ursprung mit einer von 0 verschiedenen Nettoladung herrühren, da dieser Anteil ja schon durch den Monopolbeitrag erfaßt ist. Wir müssen also von dem symmetrischen Tensor (1.5.92) den Spuranteil abziehen. Der Quadrupolanteil der Ladungsverteilung ist also durch den spurfreien kartesischen Tensor

$$\bar{Q}_{jk} = \int_{K_R} d^3\vec{x}' (3x'_j x'_k - r'^2 \delta_{jk}) \rho(\vec{x}'). \quad (1.5.92)$$

Schreiben wir also zunächst die sphärischen Quadrupolmomente hin:

$$\begin{aligned}
 Q_{20} &= \int_{K_R} d^3\vec{x}' \frac{1}{2} (3z'^2 - r'^2) \rho(\vec{x}') = \frac{1}{2} \bar{Q}_{33}, \\
 Q_{2\pm 1} &= \mp \int_{K_R} d^3\vec{x}' \sqrt{\frac{3}{2}} (x' \mp iy') z' \rho(\vec{x}') = \mp \frac{1}{\sqrt{6}} (\bar{Q}_{13} \mp i\bar{Q}_{23}), \\
 Q_{2\pm 2} &= \int_{K_R} d^3\vec{x}' \sqrt{\frac{3}{8}} (x'^2 - y'^2 \mp 2ix'y) = \sqrt{\frac{1}{24}} (\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{22} \mp 2i\bar{Q}_{12}).
 \end{aligned} \tag{1.5.93}$$

Der Quadrupolbeitrag zum Potential ist also

$$\begin{aligned}
 \Phi_2(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi r^5} \left\{ \frac{1}{4} \bar{Q}_{33} (3z^2 - r^2) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} [(\bar{Q}_{13} - i\bar{Q}_{23})(x + iy)z + (\bar{Q}_{13} + i\bar{Q}_{23})(x - iy)z] \\
 &\quad + \frac{1}{8} [(\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{22} - 2i\bar{Q}_{12})(x^2 - y^2 + 2ixy) \\
 &\quad \left. + (\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{22} + 2i\bar{Q}_{12})(x^2 - y^2 - 2ixy)] \right\}.
 \end{aligned} \tag{1.5.94}$$

Ausmultiplizieren liefert unter Beachtung von $\bar{Q}_{jj} = 0$

$$\Phi_2(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r^5} \frac{\bar{Q}_{jk} x_j x_k}{2}. \tag{1.5.95}$$

1.5.4 Elektrostatische Felder in einem beliebigen Inertialsystem

Es ist klar, daß aufgrund der Lorentz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen jede elektrostatische Lösung auch eine Lösung für eine gleichförmig geradlinig bewegte Ladungsverteilung ergibt. Nehmen wir also an, daß im Inertialsystem Σ' die Ladung ruht und dort ein rein elektrostatisches Feld vorliegt, d.h. es gilt

$$(j'^{\mu}) = \begin{pmatrix} c\rho'(\vec{x}') \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5.96}$$

Im System Σ , bzgl. dessen sich Σ' mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = c\vec{\beta}$ gleichförmig geradlinig bewegt, gilt aufgrund der entsprechenden Lorentz-Transformation (1.2.54)

$$\vec{x}' = -\gamma\vec{v}t + \gamma P_{\parallel}\vec{x} + P_{\perp}\vec{x} = \vec{x} - \gamma\vec{v}t + (\gamma - 1) \frac{\vec{\beta}}{\beta^2} \vec{\beta} \cdot \vec{x} \tag{1.5.97}$$

und

$$(j^{\mu}) = \gamma \begin{pmatrix} c\rho'(\vec{x}') \\ \vec{v}\rho'(\vec{x}') \end{pmatrix} = \rho(x) \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \rho(x) = \gamma\rho' \left[\vec{x} - \gamma\vec{v}t + (\gamma - 1) \frac{\vec{\beta}}{\beta^2} \vec{\beta} \cdot \vec{x} \right]. \tag{1.5.98}$$

Für das elektrische Feld im Bezugssystem Σ' gilt aufgrund von (1.2.60) und wegen $\vec{B}' = 0$

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(t, \vec{x}) &= \gamma \vec{E}'(\vec{x}') - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \vec{\beta} [\vec{\beta} \cdot \vec{E}'(\vec{x}')] \quad \text{bzw.} \\
 \vec{E}_{\parallel}(t, \vec{x}) &= \vec{E}'_{\parallel}(\vec{x}'), \quad \vec{E}_{\perp}(t, \vec{x}) = \gamma \vec{E}'_{\perp}(\vec{x}')
 \end{aligned} \tag{1.5.99}$$

1. Das elektromagnetische Feld im Vakuum

wobei wieder für \vec{x}' (1.5.97) einzusetzen ist. Das Magnetfeld ist

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \gamma \vec{\beta} \times \vec{E}'(\vec{x}') = \vec{\beta} \times \vec{E}(t, \vec{x}), \quad (1.5.100)$$

wobei die letztgenannte Form sich unmittelbar aus (1.5.99) und $\vec{\beta} \times \vec{\beta} = 0$ ergibt.

Für das Viererpotential gilt

$$(A'^{\mu}) = \begin{pmatrix} \Phi'(\vec{x}') \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A^{\mu}) = \gamma \Phi'(\vec{x}') \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} = \Phi(x) \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}. \quad (1.5.101)$$

Dabei ist in der letztgenannten Formel wieder (1.5.97) für \vec{x} einzusetzen. Wir bemerken, daß dieses Potential die Lorenz-Eichbedingung (1.2.42) erfüllt, denn es ist

$$\partial'_{\mu} A'^{\mu} = \frac{1}{c} \partial'_t \Phi' = 0. \quad (1.5.102)$$

Da dies eine manifest kovariante Gleichung ist, auf der linken Seite also ein Viererskalarfeld steht, muß die Bedingung auch bzgl. der Komponenten in Σ gelten. Zur Illustration rechnen wir dies aber explizit nach. Es gilt

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = \frac{1}{c} \partial_t \Phi(x) + \vec{\beta} \cdot \vec{\nabla} \Phi(x). \quad (1.5.103)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi(x) &= \gamma \partial'_t \Phi'(\vec{x}') = -\gamma^2 \vec{v} \cdot \vec{\nabla}' \Phi'(\vec{x}'), \\ \vec{\nabla} \Phi(x) &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \partial'_k \gamma \Phi'(\vec{x}') = \gamma \left[\mathbb{1}_3 + (\gamma - 1) P_{\parallel} \right] \vec{\nabla}' \Phi'(\vec{x}') = \gamma [P_{\perp} + \gamma P_{\parallel}] \vec{\nabla}' \Phi'(\vec{x}'). \end{aligned} \quad (1.5.104)$$

Daraus folgt durch Einsetzen in (1.5.103) wegen $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ unmittelbar $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$.

1.5.5 Beispiel: Homogen geladene Kugel

Als Beispiel für die Berechnung des elektrostatischen Feldes betrachten wir eine homogen geladene Kugel vom Radius R mit der Gesamtladung Q . Ihr Mittelpunkt ruhe im Ursprung des Bezugssystems Σ' . Da es sich um ein kugelsymmetrisches Problem handelt, ist es einfacher, die Legendre-Gleichung

$$\Delta' \Phi'(\vec{x}') = -\rho'(\vec{x}') = -\rho_0(\vec{x}') = \begin{cases} -\frac{3Q}{4\pi R^3} & \text{für } |\vec{x}'| = r' < R, \\ 0 & \text{für } r' \geq R \end{cases} \quad (1.5.105)$$

direkt zu lösen. Offenbar hängt nämlich Φ' nur von r' ab. In Kugelkoordinaten lautet unsere Gleichung also

$$\frac{1}{r'} [r' \Phi'(r')]'' = -\rho_0(r'). \quad (1.5.106)$$

Dabei bezeichnen Striche Ableitungen nach der Radialkoordinate r' . Wir brauchen die Gleichung nur sukzessive hochintegrieren. für $r' < R$ gilt

$$[r' \Phi']'' = -r' \rho_0 \Rightarrow [r' \Phi']' = -\frac{\rho_0}{2} r'^2 + C_1 \Rightarrow \Phi' = -\frac{\rho_0}{6} r'^2 + C_1 + \frac{C_2}{r'}. \quad (1.5.107)$$

Für $r' \geq R$ ist die allgemeine Lösung offenbar für $\rho_0 = 0$ in dieser Lösung enthalten, d.h. es gilt

$$\Phi'(r') = C_1 + \frac{C_2}{r'}. \quad (1.5.108)$$

1.5. Elektrostatik

Die Konstanten bestimmen wir nun aus Stetigkeitsbedingungen. Da wir es im Inneren der Kugel mit einer kontinuierlichen Ladungsverteilung zu tun haben, kann es im Ursprung keine Singularität geben, d.h. es gilt $C_2 = 0$. Weiter wollen wir aus Bequemlichkeitsgründen, daß das Potential im Unendlichen verschwindet. Daher setzen wir $C_1' = 0$. Weiter soll das Potential bei $r' = R$ stetig sein, d.h. es muß gelten

$$-\frac{\rho_0}{6}R^2 + C_1 = \frac{C_2'}{R}. \quad (1.5.109)$$

Weiter muß nach dem Gaußschen Gesetz im Außenraum $C_2' = Q/(4\pi) = \rho_0 R^3/3$ sein. Daraus folgt

$$C_1 = \frac{\rho_0}{2}R^2. \quad (1.5.110)$$

Also gilt

$$\Phi'(r') = \frac{\rho_0}{6}(3R^2 - r'^2)\Theta(R - r') + \frac{\rho_0 R^3}{3r'}\Theta(r' - R). \quad (1.5.111)$$

Daraus folgt für das elektrische Feld

$$E'_{r'}(r') = -\partial_{r'}\Phi'(r') = \frac{\rho_0}{3}r'\Theta(R - r') + \frac{\rho_0 R^3}{3r'^2}\Theta(r' - R), \quad E_{\theta'} = E_{\phi'} = 0. \quad (1.5.112)$$

Betrachten wir nun das elektromagnetische Feld im Bezugssystem Σ , wo sich die homogen geladene Kugel mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = c\vec{\beta} = c\beta\vec{e}_z$ bewegen möge. Zur Zeit $t = t' = 0$ mögen die räumlichen Koordinatensysteme zusammenfallen und sich der Mittelpunkt der Kugel im Koordinatenursprung befinden. Dann gelten die Transformationsformeln für die Raum-Zeitkoordinaten und das elektrostatische Feld (1.5.97) bzw. (1.5.99), d.h. in kartesischen Koordinaten

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \gamma(z - vt) \end{pmatrix} \Rightarrow r' = \sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2} \quad (1.5.113)$$

und

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = E'_{r'}(r')\frac{\gamma}{r'} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - vt \end{pmatrix}, \quad (1.5.114)$$

wobei wir (1.5.113) für \vec{x}' und r' sowie (1.5.112) einzusetzen haben. Die Feldlinien sind also immer noch radial vom momentanen Mittelpunkt der Kugel aus ausgerichtet, der sich zur Zeit t bei $\vec{x} = (0, 0, vt)$ befindet. Aus (1.5.100) ergibt sich das Magnetfeld zu

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \beta\vec{e}_3 \times \vec{E} = \frac{\gamma\beta}{r'} E'_{r'}(r') \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5.115)$$

Das Magnetfeld ist also im Sinne der Rechte-Hand-Regel um die Richtung der Stromdichte \vec{j} , gewunden⁷.

Es ist klar, daß wir auch von den Potentialen ausgehen können. Im System Σ , wo sich die geladene Kugel bewegt, gilt gemäß (1.5.101)

$$\Phi(t, \vec{x}) = \gamma\Phi'(\vec{x}'), \quad \vec{A}(t, \vec{x}) = \vec{\beta}\Phi(t, \vec{x}). \quad (1.5.116)$$

⁷Man beachte, daß $E'_{r'}$ dasselbe Vorzeichen wie die Ladung besitzt, also die Stromdichte für positive Ladung in die positive und für negative Ladung in die negative z-Richtung weist.

Dabei ist wieder auf der rechten Seite \vec{x}' mit Hilfe von (1.5.113) durch \vec{x} auszudrücken. Bei der Berechnung des elektrischen Feldes ist darauf zu achten, daß neben dem Skalarpotential auch ein zeitabhängiges Vektorpotential vorliegt, d.h. wir erhalten für das elektrische Feld

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}(t, \vec{x}) = -\left(\vec{\nabla} + \frac{\vec{\beta}}{c}\partial_t\right)\Phi(t, \vec{x}) \quad (1.5.117)$$

und für das Magnetfeld

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{x}) = -\vec{\beta} \times \vec{\nabla}\Phi(t, \vec{x}). \quad (1.5.118)$$

Führt man die Ableitungen aus, kommt man erwartungsgemäß auf das gleiche Resultat wie mit der oben gezeigten Methode der direkten Transformation der Felder, also auf (1.5.114) bzw. (1.5.115).

1.6 Magnetostatik

1.6.1 Das Biot-Savart-Gesetz

Wir betrachten nun den Fall, daß zeitunabhängige **stationäre Stromverteilungen** vorliegen. Ebenso seien das elektromagnetische Feld (\vec{E}, \vec{B}) und die Ladungsverteilung ρ zeitunabhängig. Auch dann entkoppeln in den Maxwell-Gleichungen, die wir wieder in ihrer mikroskopischen Form im Dreierformalismus (1.1.34-1.1.37) betrachten wollen, elektrisches und magnetisches Feld vollkommen, wobei sich (1.1.34) und (1.1.37) für die elektrische Feldstärke zu den elektrostatischen Grundgleichungen (vgl. (1.5.1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}), \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0 \quad (1.6.1)$$

vereinfachen. Das elektrische Feld ist also allein aus der Ladungsverteilung nach den im vorigen Abschnitt behandelten Methoden der Elektrostatik zu bestimmen.

Aufgrund des Vorliegens von Strömen erhalten wir nun aber auch ein Magnetfeld, das gemäß (1.1.35) und (1.1.36) für unseren zeitunabhängigen Fall den **Grundgleichungen der Magnetostatik**⁸

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\vec{j}(\vec{x})}{c}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0 \quad (1.6.2)$$

genügt. In vektoranalytischer Hinsicht stellt es ein Gegenstück zum elektrostatischen Feld dar, denn während \vec{E} ein **wirbelfreies Potentialfeld** darstellt, ist das magnetische Feld \vec{B} ein reines **Solenoidal- oder Wirbelfeld**. Entsprechend muß es sich aufgrund des Helmholtzschen Zerlegungssatzes aus einem Vektorpotential vermöge

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \quad (1.6.3)$$

darstellen lassen, wobei das Vektorpotential nur bis auf ein Potentialfeld bestimmt ist, wie wir oben bei der Besprechung der Eichinvarianz der allgemeinen Maxwellgleichungen schon besprochen haben. Setzen wir (1.6.3) in (1.6.2) ein, ergibt sich

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{\vec{j}}{c}. \quad (1.6.4)$$

⁸Der Fall von Permanentmagneten (Ferromagnetika), die eine konstante von 0 verschiedene Magnetisierung aufweisen, die mikroskopisch auf die Existenz des magnetischen Moments der Elektronen und somit deren Spin zurückzuführen ist, ist in dieser Form der Gleichungen enthalten. Die Magnetisierung liefert formal einen Beitrag $\vec{j}_{\text{mag}} = c\vec{\nabla} \times \vec{M}$ zur Gesamtstromdichteverteilung $\vec{j} = \vec{j}_{\text{el}} + \vec{j}_{\text{mag}}$.

1.6. Magnetostatik

Falls wir für \vec{A} eine kartesische Basis verwenden⁹, können wir dies in der Form

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \frac{\vec{j}}{c} \quad (1.6.5)$$

schreiben. Aufgrund der Eichfreiheit können wir die **Coulomb-Eichung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.6.6)$$

als Nebenbedingung fordern, so daß dann

$$\Delta \vec{A} = -\frac{\vec{j}}{c} \quad (1.6.7)$$

folgt. Damit können wir wieder die oben bei der Elektrostatik hergeleitete Green-Funktion (1.5.15) des Laplace-Operators verwenden, um als Lösung

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (1.6.8)$$

zu erhalten.

Nun haben wir allerdings zu überprüfen, ob die Coulomb-Eichbedingung (1.6.6) erfüllt ist, denn nur dann dürfen wir behaupten, daß (1.6.8) tatsächlich eine Lösung des magnetostatischen Problems darstellt. In der Tat gilt

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = + \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{j}(\vec{x}'). \quad (1.6.9)$$

Da voraussetzungsgemäß die Ladungsdichte zeitunabhängig ist, gilt aufgrund der Kontinuitätsgleichung, die wir bereits in (1.1.40) als Integrabilitätsbedingung der Maxwell-Gleichungen hergeleitet haben,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (1.6.10)$$

und damit erfüllt (1.6.8) in der Tat die Coulomb-Eichbedingung (1.6.6), d.h. diese Gleichung stellt eine Lösung des magnetostatischen Problems dar.

Das Magnetfeld selbst erhalten wir daraus mittels (1.6.3) zu

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \vec{\nabla}_{\vec{x}} \times \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (1.6.11)$$

Bzgl. der Gradientenbildung ist $\vec{j}(\vec{x}')$ ein konstanter Vektor. Nun gilt für irgendeinen Vektor $\vec{a} = \text{const}$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{a} f(\vec{x})]_j = \epsilon_{jkl} \partial_k [a_l f(\vec{x})] = -\epsilon_{jlk} a_l \partial_k f = -(\vec{a} \times \vec{\nabla} f)_j. \quad (1.6.12)$$

Wenden wir dies auf (1.6.9) an, erhalten wir das **Biot-Savart-Gesetz**

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (1.6.13)$$

⁹Man beachte, daß dabei für \vec{x} durchaus beliebige verallgemeinerte Koordinaten verwendet werden dürfen!

1.6.2 Beispiel: Homogen geladene rotierende Kugel

Das folgende Beispiel zeigt, daß statt einer Auswertung des Integrals (1.6.11) die direkte Lösung von (1.6.7) einfacher zum Ziel führt. Betrachten wir dazu als Beispiel eine homogen geladene Kugel mit Radius R , die sich um eine feste Achse dreht. Die Stromdichte ist

$$\vec{j}(\vec{x}) = \rho \Theta(R-r) \vec{\omega} \times \vec{x} \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}, \quad (1.6.14)$$

wobei $r = |\vec{x}|$ ist und ω die konstante Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Angesichts der Gleichung (1.6.7) erscheint ein Ansatz

$$\vec{A}(\vec{x}) = f(r) \vec{\omega} \times \vec{x} \quad (1.6.15)$$

vielversprechend. Man rechnet leicht nach, daß dieser Ansatz automatisch die Coulomb-Eichbedingung (1.6.6) erfüllt. Berechnen wir also (*in kartesischen Koordinaten!*)

$$\begin{aligned} (\Delta \vec{A})_k &= \partial_j \partial_j [f \epsilon_{klm} \omega_l x_m] = \epsilon_{klm} \omega_l \partial_j (x_m \partial_j f + f \delta_{jm}) \\ &= \epsilon_{klm} \omega_l (\delta_{mj} \partial_j f + x_m \partial_j \partial_j f + \partial_j f \delta_{jm}) \\ &= \epsilon_{klm} \omega_l (x_m \Delta f + 2 \partial_m f) \\ &= (\vec{\omega} \times \vec{x})_k \left(\Delta f + 2 \frac{f'(r)}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.6.16)$$

Setzen wir (1.6.14) in (1.6.7) ein, liefert unser Ansatz die Bestimmungsgleichung

$$\Delta f(r) + 2 \frac{f'(r)}{r} = -\frac{\rho}{c} \Theta(R-r). \quad (1.6.17)$$

Verwenden wir den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten folgt

$$\frac{1}{r} [r f(r)]'' + \frac{2}{r} f'(r) = f''(r) + \frac{4}{r} f'(r) = -\frac{\rho}{c} \Theta(R-r). \quad (1.6.18)$$

Für $r > R$ folgt

$$f''(r) + \frac{4}{r} f'(r) = 0, \quad r > R. \quad (1.6.19)$$

Diese Gleichung können wir offenbar durch den Ansatz $f(r) = r^\lambda$ lösen, denn dieser Ansatz führt auf

$$\lambda(\lambda-1) + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = -3. \quad (1.6.20)$$

Da das Vektorpotential im Unendlichen verschwinden soll, ist also

$$f(r) = \frac{A_{>}}{r^3} \quad \text{mit} \quad A_{>} = \text{const}, \quad r > R. \quad (1.6.21)$$

Für $r > R$ gilt

$$f'' + \frac{4}{r} f' = -\frac{\rho}{c}. \quad (1.6.22)$$

Diese Gleichung besitzt offenbar eine Lösung der Form

$$f(r) = C r^2 \Rightarrow C = -\frac{\rho}{10c}. \quad (1.6.23)$$

Die allgemeine Lösung der DGL (1.6.22) ergibt sich daraus durch Addition einer allgemeinen Lösung der Homogenen Gleichung, die die Form $f_{\text{hom}}(r) = A_{<} + B_{<}/r^3$ besitzt. Da das Vektorpotential bei $r = 0$ nicht singular werden kann, ist notwendig $B_{<} = 0$. Also gilt

$$f(r) = -\frac{\rho}{10c}r^2 + A_{<}, \quad r < R. \quad (1.6.24)$$

Nun sollten bei $r = R$ sowohl \vec{A} als auch \vec{B} stetig sein. Man rechnet leicht nach, daß für unseren Ansatz (1.6.15)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = [rf'(r) + 2f(r)]\vec{\omega} - \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{r}}{r}f'(r)\vec{r} \quad (1.6.25)$$

gilt. Damit also \vec{A} und \vec{B} an der Kugeloberfläche stetig sind, müssen f und f' bei $r = R$ stetig sein. Das liefert mit (1.6.21) und (1.6.24) die Bedingungen

$$\frac{A_{>}}{R^3} = -\frac{\rho}{10c}R^2 + A_{<}, \quad -\frac{3A_{>}}{R^3} = -\frac{\rho}{5c}R \Rightarrow A_{<} = \frac{\rho R^2}{6c}, \quad A_{>} = \frac{\rho R^5}{15c}. \quad (1.6.26)$$

Also finden wir schließlich

$$f(r) = \Theta(R-r)\frac{\rho}{30c}(5R^2 - 3r^2) + \Theta(r-R)\frac{\rho R^5}{15c r^3} \quad (1.6.27)$$

und damit aus (1.6.25) für das Magnetfeld

$$\vec{B} = \Theta(R-r)\frac{1}{4\pi R^5} [3(\vec{M} \cdot \vec{x})\vec{x} - \vec{M}(6r^2 - 5R^2)] + \Theta(r-R)\frac{1}{4\pi r^5} [3(\vec{M} \cdot \vec{x})\vec{x} - r^2\vec{M}] \quad (1.6.28)$$

mit

$$\vec{M} = \frac{4\pi R^5 \rho}{15c} \vec{\omega}. \quad (1.6.29)$$

Der Vergleich mit dem elektrostatischen Dipolfeld (1.5.87) zeigt, daß im Außenraum ($r > R$) ein magnetostatisches Dipolfeld mit dem magnetischen Dipolmoment (1.6.29) vorliegt.

Es ist klar, daß zusätzlich zum gerade berechneten Magnetfeld auch das in Abschnitt 1.5.5 berechnete elektrische Feld vorliegt. Wir überlassen die Diskussion der Lösung in einem beliebigen Inertialsystem, in dem sich die Kugel neben ihrer Eigendrehung auch noch geradlinig gleichförmig bewegt, dem Leser zur Übung.

1.6.3 Magnetostatische Multipolentwicklung

Wir wollen nun in Analogie zur elektrostatischen Multipolentwicklung in Abschnitt 1.5.3 die Multipolentwicklung für das magnetostatische Feld besprechen. Es sei also die Stromdichte auf ein Gebiet innerhalb einer Kugel vom Radius R beschränkt, und wir suchen eine Entwicklung des magnetostatischen Feldes für große Entfernungen von dieser Quelle, also für $r = |\vec{x}| \gg R$.

Dazu bietet sich die in [CH10] besprochene Entwicklung nach den **Vektorkugelflächenfunktionen**

$$\vec{\Psi}_{lm}(\vartheta, \varphi) = r \vec{\nabla} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.6.30)$$

$$\vec{\Phi}_{lm}(\vartheta, \varphi) = \vec{r} \times \vec{\nabla} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.6.31)$$

$$\vec{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) = \vec{e}_r Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.6.32)$$

an. Wir haben dort gezeigt, daß diese Funktionen bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle \vec{V}_1 | \vec{V}_2 \rangle_{(S_2, \mathbb{C}^3)} = \int_{S_2} d\Omega \vec{V}_1^*(\vartheta, \varphi) \vec{V}_2(\vartheta, \varphi) \quad (1.6.33)$$

einen vollständigen Satz orthogonaler Funktionen für Vektorfelder bilden. Die Orthogonalität und Normierung der Vektorkugelfunktionen (1.6.30-1.6.32) ergeben sich dabei zu

$$\langle \vec{\Psi}_{lm} | \vec{\Psi}_{l'm'} \rangle_{(S_2, \mathbb{C}^3)} = l(l+1)\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \quad (1.6.34)$$

$$\langle \vec{\Phi}_{lm} | \vec{\Phi}_{l'm'} \rangle_{(S_2, \mathbb{C}^3)} = l(l+1)\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \quad (1.6.35)$$

$$\langle \vec{Y}_{lm} | \vec{Y}_{l'm'} \rangle_{(S_2, \mathbb{C}^3)} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \quad (1.6.36)$$

$$\langle \vec{\Psi}_{lm} | \vec{\Phi}_{l'm'} \rangle_{(S_2, \mathbb{C}^3)} = \langle \vec{\Psi}_{lm} | \vec{Y}_{l'm'} \rangle_{(S_2, \mathbb{C}^3)} = \langle \vec{\Phi}_{lm} | \vec{Y}_{l'm'} \rangle_{(S_2, \mathbb{C}^3)} = 0. \quad (1.6.37)$$

Weiter haben wir gesehen, daß sich jedes **quellenfreie Vektorfeld** \vec{B} ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) durch **zwei skalare Debye-Potentiale** ψ und χ in der Form

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{\nabla} \psi + \vec{\nabla} \times (\vec{x} \times \vec{\nabla} \chi) = i\vec{L}\psi + i\vec{\nabla} \times (\vec{L}\chi) \quad (1.6.38)$$

schreiben läßt. Dabei ist der „**Drehimpulsoperator**“¹⁰ durch

$$\vec{L} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla} \quad (1.6.39)$$

definiert. Die Debye-Potentiale sind bei vorgegebenem Vektorfeld \vec{B} bis auf rein radialsymmetrische Skalarfelder durch die Gleichungen

$$\vec{L}^2 \chi = -\vec{x} \cdot \vec{B}, \quad \vec{L}^2 \psi = -\vec{x} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (1.6.40)$$

eindeutig bestimmt.

Diese allgemeinen Sätze wenden wir nun auf das quellenfreie Vektorfeld \vec{B} an. Aus den magnetostatischen Maxwell-Gleichungen (1.6.2) folgt dann

$$-\vec{L}^2 \chi = \vec{x} \cdot \vec{B}, \quad -\vec{L}^2 \psi = \vec{x} \cdot \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{x} \cdot \vec{j}. \quad (1.6.41)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt für $r > R$, wo \vec{j} voraussetzungsgemäß verschwindet,

$$-\vec{L}^2 \psi = 0, \quad r > R, \quad (1.6.42)$$

mit der Lösung $\psi = 0$. Auf die erste Gleichung (1.6.41) wenden wir den Laplaceoperator an, der wegen (B.1.33) mit \vec{L}^2 vertauscht, d.h. es folgt unter Zuhilfenahme von (B.1.5), (B.1.9) und schließlich (B.1.12)

$$-\vec{L}^2 \Delta \chi = \Delta(\vec{r} \cdot \vec{B}) = \vec{r} \cdot \Delta \vec{B} = -\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{1}{c} \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{j}). \quad (1.6.43)$$

Wir benötigen also zunächst eine Greensche Funktion des Operators \vec{L}^2 . Es ist klar, daß dieser Operator kein auf dem ganzen Raum der quadratintegrablen Funktionen $L^2(\mathbb{R})$ Inverses haben kann, denn die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} sind Eigenfunktionen zum Eigenwert $l(l+1)$ mit $l \in \mathbb{N}_0$, d.h. es gilt

$$\vec{L}^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}. \quad (1.6.44)$$

Für $l = 0$ liegt also eine Eigenfunktion zum Eigenwert 0 vor, und damit kann \vec{L}^2 kein überall definiertes Inverses besitzen. Falls aber ein Skalarfeld Φ eine Multipolentwicklung besitzt, die keinen Term mit $l = 0$ enthält, so besitzt die Gleichung

$$\vec{L}^2 \Psi = \Phi \quad (1.6.45)$$

¹⁰Die Bezeichnung Drehimpulsoperator stammt aus der Quantentheorie. Dieser Operator erweist sich allerdings auch in der klassischen Feldtheorie als äußerst nützlich, so daß wir ihn auch hier in der Elektrodynamik bereits ausgiebig verwenden werden.

eine Lösung, die bis auf eine radialsymmetrische Funktion eindeutig bestimmt ist. Sei also

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Phi_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.6.46)$$

die Entwicklung von Φ nach Kugelflächenfunktionen, geschrieben in Kugelkoordinaten, so finden wir als eine Lösung der Gleichung (1.6.45)

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{l(l+1)} \Phi_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.6.47)$$

denn es ist \vec{L}^2 ein Differentialoperator, der nur Ableitungen nach ϑ und φ nicht aber nach r enthält, so daß wegen (1.6.44)

$$\vec{L}^2 \Psi(\vec{x}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{l(l+1)} \Phi_{lm}(r) \vec{L}^2 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Phi_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \Phi(\vec{x}) \quad (1.6.48)$$

gilt. Die Bedingung dafür, daß Φ tatsächlich keinen radialsymmetrischen Term beinhaltet, d.h. in seiner Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen der Term mit $l = 0$ fehlt, lautet nach den Orthonormalitäts- und Vollständigkeitseigenschaften der Kugelflächenfunktionen auf $L^2(S)$

$$\langle Y_{00} | \Phi \rangle_S |_{r=\text{const}} = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \Phi(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R}_{>0}. \quad (1.6.49)$$

Nun gilt aber für $\Phi = \vec{x} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{j})$

$$\langle Y_{00} | \Phi \rangle_S |_{r=\text{const}} = \frac{1}{r\sqrt{4\pi}} \int_{\partial K_r} d\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{j}) = \frac{1}{r\sqrt{4\pi}} \int_{K_r} d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{j}) = 0. \quad (1.6.50)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt den Gaußschen Satz und die Identität $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{j}) = 0$ angewandt. Wir können also (1.6.43) in der Form

$$\Delta \chi = \frac{1}{c} \mathbf{L}^{-2} \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{j}) \quad (1.6.51)$$

schreiben. Die Multipolentwicklung für χ können wir dann sofort aus der entsprechenden Lösung für den elektrostatischen Fall entnehmen. Wir schreiben sie in der Form

$$\chi = -\frac{1}{4\pi c} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{M_{lm}}{l} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}}. \quad (1.6.52)$$

Dabei wird die hier etwas willkürlich erscheinende Normierung der **magnetischen Multipolmomente** M_{lm} gleich noch gerechtfertigt werden. Um die M_{lm} zu bestimmen, müssen wir nur (1.5.79) auf die rechte Seite von (1.6.51) anwenden, wobei das gegenüber (1.5.5) geänderte Vorzeichen sowie der Zusatzfaktor $1/l$ zu beachten ist. Wir finden

$$\frac{M_{lm}}{l} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_{K_R} d^3\vec{x}' r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \mathbf{L}^{-2} \vec{x}' \cdot [\vec{\nabla}' \times \vec{j}(\vec{x}')]. \quad (1.6.53)$$

Da der Operator \mathbf{L}^{-2} hermitesch ist, folgt

$$\frac{M_{lm}}{l} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_{K_R} d^3\vec{x}' \frac{r'^l}{l(l+1)} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \vec{x}' \cdot [\vec{\nabla}' \times \vec{j}(\vec{x}')] \quad (1.6.54)$$

bzw.

$$M_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{1}{l+1} \int_{K_R} d^3\vec{x}' r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \vec{x}' \cdot [\vec{\nabla}' \times \vec{j}(\vec{x}')]. \quad (1.6.55)$$

Wie wir bereits in (1.6.50) gesehen haben, ist $M_{00} = 0$.

Um Anschluß an die in der Literatur üblichen Formen der Multipolentwicklung zu gewinnen, betrachten wir (1.6.38). Wegen $\psi = 0$ für $r = |\vec{x}| > R$ ist das Vektorpotential durch

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{\nabla} \chi = i\vec{L}\chi \quad (1.6.56)$$

gegeben. Da \vec{L} nur Ableitungsoperatoren bzgl. der Winkel beinhaltet, folgt aus der Definition (1.6.31)

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi c} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{M_{lm}}{l} \frac{\vec{\Phi}_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}}, \quad r > R. \quad (1.6.57)$$

Andererseits ist aber klar, daß im quellenfreien Raum $r > R$ wegen $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} = 0$ auch ein skalares Potential existieren muß. In der Tat erhält man nach einigen Umformungen mit Hilfe der Formeln (B.1.7) und den Definitionen der Vektorkugelfunktionen (1.6.30-1.6.32)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{\Phi}_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}} &= \frac{l}{r^{l+2}} \vec{\Psi}_{lm}(\vartheta, \varphi) - \frac{l(l+1)}{r^{l+2}} \vec{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) \\ &= \frac{l}{r^{l+1}} \vec{\nabla} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) + \vec{e}_r \frac{d}{dr} \left(\frac{l}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\ &= \vec{\nabla} \left(\frac{l}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \right). \end{aligned} \quad (1.6.58)$$

Setzen wir dies in (1.6.57) ein, finden wir

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \Phi_M(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \Phi_M(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi c} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{M_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1.6.59)$$

Dieses skalare Potential für das Magnetfeld besitzt (bis auf den Faktor $1/c$) genau die Form wie die entsprechende Multipolentwicklung des elektrostatischen Potentials (1.5.79). Der wichtigste Unterschied ist, daß der Term zu $l = 0$ fehlt. Dies muß auch so sein, da $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ist und daher M_{00} gerade der gesamten in der Kugel K_R befindlichen Magnetladung entspricht, und diese muß wegen der Quellenfreiheit des Magnetfeldes verschwinden. Ansonsten besitzen die Multipolfelder, beginnend mit dem Dipolfeld, dieselbe Form wie die analogen elektrostatischen Multipolfelder. Dies rechtfertigt auch die etwas willkürlich erscheinende Normierung in der Definition der magnetischen Multipolmomente in (1.6.55).

Der Vollständigkeit halber leiten wir die Multipolentwicklung auch noch über das Vektorpotential her. Wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ gibt es nämlich gemäß dem Helmholtzschen Zerlegungssatzes ein Vektorfeld \vec{A} , so daß

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.6.60)$$

Da \vec{A} für vorgegebenes \vec{B} nur bis auf ein Gradientenfeld bestimmt ist (**Eichinvarianz**), können wir noch eine Zusatzbedingung (**Eichbedingung**) fordern. Hier ist es besonders bequem die Quellenfreiheit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.6.61)$$

des Vektorpotentials zu verlangen. Diese Wahl der Eichung des Vektorpotentials nennt man **Coulomb-Eichung**. Schließlich folgt für die verbliebene magnetostatische Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} = \vec{j}. \quad (1.6.62)$$

Es ist klar, daß wir diese Gleichung mit Hilfe der Green-Funktion des Laplace-Operators sofort lösen könnten. Wie wir in Abschnitt 1.6.1 gesehen haben, führt dies zum **Biot-Savart-Gesetz**. Jetzt wollen wir aber die Multipolentwicklung herleiten, und da bietet sich wieder die Methode mit den Debye-Potentialen an. Wegen der Coulomb-Eichbedingung (1.6.61) gibt es nämlich wieder zwei Debye-Potentiale, so daß

$$\vec{A} = \vec{x} \times \vec{\nabla} \tilde{\psi} + \vec{\nabla} \times (\vec{x} \times \vec{\nabla} \tilde{\chi}). \quad (1.6.63)$$

Dabei haben wir $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\chi}$ geschrieben, um diese Debye-Potentiale des *Vektorpotentials* von denen des *Magnetfeldes* (1.6.38) zu unterscheiden.

Es gelten wieder die Gleichungen

$$\vec{L}^2 \tilde{\chi} = -\vec{x} \cdot \vec{A}, \quad \vec{L}^2 \tilde{\psi} = -\vec{x} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{x} \cdot \vec{B}. \quad (1.6.64)$$

Beide Gleichungen sind lösbar, da wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ Entwicklung der rechten Seiten der Gln. (1.6.64) mit $l = 1$ beginnen. Damit folgt

$$\tilde{\chi} = -\vec{L}^{-2} \vec{x} \cdot \vec{A}, \quad \tilde{\psi} = -\vec{L}^{-2} \vec{x} \cdot \vec{B}. \quad (1.6.65)$$

Wenden wir nun darauf den Laplace-Operator an, folgt nach einiger Rechnung

$$\Delta \tilde{\chi} = -\vec{L}^{-2} \Delta(\vec{x} \cdot \vec{A}) = -\vec{L}^{-2} \vec{x} \cdot \Delta \vec{A} = \frac{1}{c} \vec{L}^{-2} \vec{x} \cdot \vec{j} \quad (1.6.66)$$

und

$$\Delta \tilde{\psi} = -\vec{L}^{-2} \Delta(\vec{x} \cdot \vec{B}) = -\vec{L}^{-2} \Delta \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{L}^{-2} \vec{x} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{j}). \quad (1.6.67)$$

Da wir eigentlich nicht an der vollständigen Lösung für \vec{A} interessiert sind, sondern nur an $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ für $r > R$, wo voraussetzungsgemäß $\vec{j} = 0$ ist, interessiert sind, müssen wir nur $\tilde{\psi}$ berechnen, denn es ist

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{x} \times \vec{\nabla} \tilde{\chi})] = -\Delta(\vec{x} \times \vec{\nabla} \tilde{\chi}) = -\vec{x} \times \vec{\nabla} \Delta \tilde{\chi} = \frac{1}{c} \vec{x} \times \vec{\nabla} \vec{L}^{-2} \vec{x} \cdot \vec{j} = 0, \quad r > R. \quad (1.6.68)$$

Der weitere Rechenweg ist nun offensichtlich exakt gleich wie bei der Bestimmung von χ aus Gl. (1.6.51), denn offenbar ist gemäß (1.6.67) $\chi = \tilde{\psi}$, und das führt wieder auf (1.6.57).

1.7 Freie Elektromagnetische Wellen

Die Vorhersage elektromagnetischer Wellen durch Maxwell und ihr experimenteller Nachweis durch H. Hertz sind Meilensteine in der Physikgeschichte. So hat die auf den experimentellen Grundtatsachen, insbesondere Faradays Studien zu elektrischen und magnetischen Phänomenen sowie deren engem Zusammenhang, aufbauende Maxwellsche Theorie nicht nur elektrische und magnetische Phänomene durch ein in sich konsistentes dynamisches Gesamtmodell des Elektromagnetismus ersetzt sondern auch noch die Optik subsumiert, denn Licht ist nichts anderes als das sich im freien Raum ausbreitende elektromagnetische Feld. Der Feldbegriff selbst geht übrigens auf Faraday zurück, der aufgrund seiner Untersuchungen der elektromagnetischen Phänomene zu dem Schluß gekommen ist, daß eine „Nahwirkungstheorie“ der entsprechenden Kraftwirkungen der bis dahin vorherrschenden „Fernwirkungstheorie“ besser geeignet ist. Allerdings waren die Vorstellungen der Theoretiker des ausgehenden 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts noch in der Vorstellung von einem Äther verhaftet, der ein Medium sein sollte, in dem sich elektromagnetische Wellen und somit auch das Licht, ausbreiten sollten ähnlich wie Schallwellen in gewöhnlicher Materie. Erst der relativistische Standpunkt Einsteins hat das elektromagnetische Feld als eine eigene Entität erwiesen, die eine selbstständige von der Materie unabhängige Existenz besitzen kann, obgleich das Feld freilich durch ladungstragende Materie erst erzeugt werden kann.

In diesem Kapitel befassen wir uns zunächst mit der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen, wobei wir uns zunächst auf **harmonische Zeitabhängigkeiten** beschränken wollen. Diese Grundformen freier Felder sind allerdings als Idealisierung zu betrachten, die nur näherungsweise realisiert werden können, da wir es eigentlich stets mit der Emission zeitlich und räumlich begrenzter Signale zu tun haben. Allerdings können wir diese allgemeineren Wellenformen durch **Fourier-Entwicklung** auf die zeitlich harmonischen Felder zurückführen. Wir besprechen die Entwicklung des freien elektromagnetischen Feldes nach Fundamentallösungen, die aus der Separation der bei harmonischem Zeitansatz sich ergebenden **Helmholtz-Gleichung** in kartesischen, Kugel- und Zylinderkoordinaten, was zur entsprechend zur Entwicklung nach Orthonormalbasissystemen in Form von **ebenen, Kugel- und Zylinderwellen** führt. Dabei klären wir nebenher auch das Eigenwertproblem des Laplace-Operators in Kugel- und Zylinderkoordinaten. Denn Fall kartesischer Koordinaten haben wir ja schon in Abschnitt 1.5.2 besprochen, wodurch wir auf elegante Weise zum **Fourier-Integral** gelangt sind.

Nachdem wir dann die Grundformen der elektromagnetischen Wellen geklärt haben, wenden uns der Felderregung aus vorgegebenen zeitlich veränderlichen Ladungs- und Stromverteilungen zu und besprechen ausführlich die kausalen (retardierten) Lösungen für die elektromagnetischen Potentiale in verschiedenen Eichfixierungen (Lorenz- und Coulomb-Eichung).

1.7.1 Allgemeine Betrachtungen zu freien Feldern

Wir beginnen mit der Betrachtung der **freien Maxwell-Gleichungen**, indem wir von den **Wellengleichungen** (1.2.28) für verschwindende Ladungs- und Stromverteilungen (d.h. $j^\mu = 0$)

$$\square A^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial t^2} - \Delta A^\mu = 0. \quad (1.7.1)$$

ausgehen. Wir bemerken sogleich, daß diese Gleichungen nur dann Lösungen für die Potentiale eines freien elektromagnetischen Feldes sein können, wenn die ihrer Herleitung zugrundegelegte **Lorenz-Eichbedingung** (1.2.42)

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.7.2)$$

erfüllt ist.

Als erstes bemerken wir, daß diese Eichfixierungsbedingung für freie Felder noch weiter eingeschränkt werden kann, denn wir können offenbar eine Eichtransformation

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi \quad (1.7.3)$$

ausführen, ohne die Lorenz-Eichbedingung (1.7.2) zu stören, solange wir verlangen, daß $\square \chi = 0$ ist. Denn erfüllt A_μ (1.7.2), so gilt auch $\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu - \square \chi = 0$. Wir können also eine weitere Forderung an unsere Lösung stellen, und wie wir gleich sehen werden, ist eine sehr bequeme zusätzliche Eichfixierung durch

$$A^0 = \Phi = 0 \quad (1.7.4)$$

gegeben. Dies bricht nun zwar die Lorentz-Invarianz explizit, nicht aber die Invarianz unter Drehungen, denn insgesamt lautet unsere Eichfixierung nun

$$A^0 = 0, \quad \partial_\mu A^\mu = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (1.7.5)$$

Da diese Eichfixierung nur im ladungs- und stromverteilungsfreien Raum mit den Feldgleichungen für die Potentiale (1.2.28) verträglich ist, nennt (1.7.5) daher auch die **Strahlungseichung**. In Strahlungseichung erreichen wir, daß von den ursprünglich vier Komponenten A^μ nur noch zwei effektive Feldfreiheitsgrade übrig bleiben. Denn das Dreiervektorpotential \vec{A} ist gemäß (1.7.5) ein reines Wirbelfeld und damit z.B. durch die entsprechenden beiden **Debye-Potentiale** darstellbar, wie bereits im Spezialfall der Magnetostatik besprochen. Darauf kommen wir im nächsten Abschnitt ausführlicher zu sprechen.

Betrachten wir aber zunächst die Vereinfachungen, die sich ergeben, wenn wir uns auf **harmonische Zeitabhängigkeiten** beschränken. Da wir diese Fundamentallösungen der Wellengleichung lediglich dazu verwenden wollen, um die realistischere Wellenlösungen der Maxwell-Gleichungen im Sinne einer Fourier-Entwicklung, d.h. im hier betrachteten freien Raum i.a. als Fourier-Integral, zu gewinnen, können wir von dem komplexen Ansatz

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \vec{A}'(\vec{x}) \exp(-i\omega t) \quad (1.7.6)$$

ausgehen. Dabei ist offenbar \vec{A}' ein nur von den rein räumlichen Komponenten abhängiges Wirbelfeld, denn die Strahlungseichbedingung (1.7.5) verlangt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{x}) \exp(-i\omega t) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{x}) = 0. \quad (1.7.7)$$

Weiter ergibt die Wellengleichung

$$\square \vec{A}(t, \vec{x}) = -\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{A}'(\vec{x}) \exp(-i\omega t) = 0. \quad (1.7.8)$$

Dies bedeutet, daß \vec{A}' der **Helmholtz-Gleichung**

$$\Delta \vec{A}'(\vec{x}) = -k^2 \vec{A}'(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.7.9)$$

genügen muß. wir haben es also mit nichts anderem als vektorwertigen Eigenlösungen des Laplace-Operators zu tun, die gemäß (1.7.7) noch der Nebenbedingung unterliegen, ein reines Wirbelfeld zu sein.

Im folgenden besprechen wir nun die entsprechenden Entwicklungen nach geeigneten vollständigen Orthornormalsystemen (VONSen) von Lösungen dieser Gleichungen, indem wir entsprechende Separationsansätze in den drei wichtigsten Koordinatensystemen (kartesische, Kugel- und Zylinderkoordinaten) durchführen. Wir können dann allgemeine Lösungen der freien Maxwell-Gleichungen durch die entsprechenden Entwicklungen nach diesen VONSen gewinnen.

1.7.2 Ebene Wellen

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall der **kartesischen Koordinaten**. Für skalare Felder haben wir dies bereits in Abschnitt (1.5.2) getan. Die dortige Rechnung legt den Ansatz

$$\vec{A}'(\vec{x}) = \vec{\epsilon}(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (1.7.10)$$

nahe. Dabei ist $\vec{\epsilon}(\vec{k})$ ein Dreiervektor, den wir der Einfachheit halber zunächst reell wählen wollen. Wir werden gleich unten noch sehen, daß dies keine wesentliche Beschränkung bedeutet, da das elektromagnetische Vektorpotential reell ist. Offenbar wird die Helmholtz-Gleichung (1.7.10) für beliebige \vec{k} mit $\vec{k}^2 = k^2 = \omega^2/c^2$ erfüllt. Die Stellen konstanter Phase sind also durch die Gleichung $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} = \omega t - kx_k = \text{const}$ bestimmt. Dabei ist $x_k = \hat{k} \cdot \vec{x}$ mit $\hat{k} = \vec{k}/k$ gegeben. Die Flächen konstanter Phase der Welle breiten sich also entlang der Richtung \hat{k} mit der Geschwindigkeit $\omega/k = c$, also der Grenzgeschwindigkeit des Minkowski- raumes aus. Die Strahlungseichbedingung (1.7.7) ergibt für jedes $\vec{k} \in K_k$ die Einschränkung

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}) = 0, \quad (1.7.11)$$

d.h. die Wellen sind notwendig **transversal**. Die Ausbreitungsrichtung der Welle ist nämlich offenbar \vec{k} , und gemäß (1.7.11) besitzt \vec{A}' nur Komponenten senkrecht zu dieser Ausbreitungsrichtung. Zu jedem $\vec{k} \neq 0$ gibt es nun offenbar zwei linear unabhängige Lösungen von (1.7.11), nämlich zwei beliebige linear unabhängige Vektoren $\vec{\epsilon}_j$, die **Polarisationsvektoren**, die in der Ebene senkrecht zu \vec{k} stehen. Wir wählen der Einfachheit halber diese Vektoren als Einheitsvektoren, die ihrerseits aufeinander senkrecht stehen und mit $\hat{k} = \vec{k}/k$ ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden, d.h. wir wählen sie so, daß

$$\vec{\epsilon}_1(\vec{k}) \times \vec{\epsilon}_2(\vec{k}) = \hat{k} \quad (1.7.12)$$

ist.

Entsprechend können wir jede Lösung $\vec{A}(t, \vec{x})$ nach diesen **transversalen ebenen Wellenmoden** gemäß

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \vec{\epsilon}_j(\vec{k}) \left[\tilde{A}_j^{(+)}(\vec{k}) \exp(-i\omega_{\vec{k}} t) + \tilde{A}_j^{(-)}(\vec{k}) \exp(+i\omega_{\vec{k}} t) \right] \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (1.7.13)$$

entwickeln, wobei wir

$$\omega_{\vec{k}} = ck = c|\vec{k}| \quad (1.7.14)$$

gesetzt haben. Im zweiten Term können wir nun aber die Substitution $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ vornehmen. Wir können weiter den Polarisationsvektoren noch die Beziehungen

$$\vec{\epsilon}_1(-\vec{k}) = \vec{\epsilon}_1(\vec{k}), \quad \vec{\epsilon}_2(-\vec{k}) = -\vec{\epsilon}_2(\vec{k}) \quad (1.7.15)$$

aufzulegen. Dabei müssen wir für einen der beiden Vektoren das umgekehrte Vorzeichen wählen, damit diese Beziehungen mit der Konvention (1.7.12) kompatibel sind. Denn zusammen mit (1.7.15) folgt aus dieser Gleichung

$$\vec{\epsilon}_1(-\vec{k}) \times \vec{\epsilon}_2(-\vec{k}) = -\vec{\epsilon}_1(\vec{k}) \times \vec{\epsilon}_2(\vec{k}) = -\hat{k}. \quad (1.7.16)$$

Mit diesen Setzungen können wir (1.7.14) vermöge der Substitution $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ im zweiten Term auch

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{x}) &= \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \vec{\epsilon}_j(\vec{k}) \frac{1}{2} \left[\tilde{A}_j(\vec{k}) \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{x}) + \tilde{A}_j^*(\vec{k}) \exp(+i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{x}) \right] \\ &= \text{Re} \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \vec{\epsilon}_j(\vec{k}) \tilde{A}_j(\vec{k}) \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{x}) \end{aligned} \quad (1.7.17)$$

schreiben. Dabei haben wir gleich die Realität von \vec{A} berücksichtigt. Für die Feldstärkevektoren folgt wegen (1.2.9) und $A^0 = \Phi = 0$

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, \vec{x}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} i k \vec{\epsilon}_j(\vec{k}) \frac{1}{2} \left[\tilde{A}_j(\vec{k}) \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{x}) - \tilde{A}_j^*(\vec{k}) \exp(+i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{x}) \right],\end{aligned}\quad (1.7.18)$$

$$\begin{aligned}\vec{B}(t, \vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} i \vec{k} \times \vec{\epsilon}_j(\vec{k}) \frac{1}{2} \left[\tilde{A}_j(\vec{k}) \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{x}) - \tilde{A}_j^*(\vec{k}) \exp(+i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{x}) \right].\end{aligned}\quad (1.7.19)$$

Wir können also das elektromagnetische Feld auch durch die Koeffizienten

$$\tilde{E}_j(\vec{k}) = i k \tilde{A}_j(\vec{k}) \quad (1.7.20)$$

charakterisieren. Dann gilt

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, \vec{x}) &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \vec{\epsilon}_j(\vec{k}) \tilde{E}_j(\vec{k}) \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{x}), \\ \vec{B}(t, \vec{x}) &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \hat{k} \times \vec{\epsilon}_j(\vec{k}) \tilde{E}_j(\vec{k}) \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{x}),\end{aligned}\quad (1.7.21)$$

Um die Moden näher zu charakterisieren, betrachten wir eine einzelne **monochromatische Feldmode** für $\vec{k} = k \vec{e}_z$. Dann sind $\vec{\epsilon}_1 = \vec{e}_x$ und $\vec{\epsilon}_2 = \vec{e}_y$. Betrachten wir nun das zu einer solchen Feldmode gehörige elektromagnetische Feld. Die allgemeine Form ist

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} \hat{E}_x \exp(-i\phi_x) \\ \hat{E}_y \exp(-i\phi_y) \\ 0 \end{pmatrix} \exp[-ik(ct - z)] \right\} \quad \text{mit} \quad \tilde{E}_x, \tilde{E}_y \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (1.7.22)$$

Dabei haben wir die i.a. komplexen Koeffizienten \tilde{E}_j mit $j \in \{x, y\}$ in polarer Form geschrieben und (1.7.14) verwendet. In dieser Schreibweise ist die Bildung des Realteils einfach, und es gilt

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \hat{E}_x \cos[k(ct - z) + \phi_x] \\ \hat{E}_y \cos[k(ct - z) + \phi_y] \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7.23)$$

Um dieses Feld genauer zu analysieren, ist es aber zunächst einfacher, mit dem komplexen Feld weiter zu arbeiten. Dafür schreiben wir

$$\vec{E}_c = \hat{E}_c \exp[-ik(ct - z)] \quad \text{mit} \quad \hat{E}_c = \begin{pmatrix} \hat{E}_x \exp(-i\phi_x) \\ \hat{E}_y \exp(-i\phi_y) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7.24)$$

Wir führen nun neue Basisvektoren für die xy -Ebene ein, die die ebene Welle besonders einfach zu interpretieren gestatten. Dazu betrachten wir das i.a. komplexe Quadrat des komplexen Amplitudenvektors und definieren das Argument dieser komplexen Zahl als -2α , d.h. wir setzen

$$\hat{E}_c^2 = |\hat{E}_c|^2 \exp(-2i\alpha). \quad (1.7.25)$$

Schreiben wir nun

$$\hat{E}_c = \hat{\mathcal{E}}_c \exp(-i\alpha), \quad (1.7.26)$$

so ist $\hat{\mathcal{E}}_c^2 = |\hat{E}_c^2| \in \mathbb{R}_{>0}$ und wir können

$$\hat{\mathcal{E}}_c = \hat{E}_\xi \vec{e}_\xi \pm i \hat{E}_\eta \vec{e}_\eta \quad \text{mit} \quad \hat{E}_\xi, \hat{E}_\eta \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta \in \mathbb{R}^2 \quad (1.7.27)$$

setzen. Wir können weiter annehmen, daß die Vektoren \vec{e}_ξ und \vec{e}_η auf 1 normiert sind. Dann ist

$$\hat{\mathcal{E}}_c^2 = \hat{E}_\xi^2 - \hat{E}_\eta^2 \pm 2i \hat{E}_\xi \hat{E}_\eta \vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\eta. \quad (1.7.28)$$

Da dieser Ausdruck reell ist, müssen also die Einheitsvektoren \vec{e}_ξ und \vec{e}_η orthogonal zueinander sein. Wir wählen sie so, daß sie (als kartesische in der xy -Ebene liegende Basisvektoren betrachtet) zusammen mit \vec{e}_z ein Rechtssystem bilden, d.h. also so, daß

$$\vec{e}_\xi \times \vec{e}_\eta = \vec{e}_z \quad (1.7.29)$$

gilt. In dieser neuen Basis geschrieben nimmt die komplexe Amplitude des elektrischen Feldes also die Form

$$\hat{E}_c = \hat{\mathcal{E}}_c \exp(-i\alpha) = (\hat{E}_\xi \vec{e}_\xi \pm i \hat{E}_\eta \vec{e}_\eta) \exp(-i\alpha) \quad (1.7.30)$$

an, und das reelle physikalische Feld ist schließlich durch

$$\vec{E} = \text{Re } \vec{E}_c = \hat{E}_\xi \cos[k(ct - z) + \alpha] \vec{e}_\xi \pm \hat{E}_\eta \sin[k(ct - z) + \alpha] \vec{e}_\eta \quad (1.7.31)$$

gegeben. Dies bedeutet, daß für festes z der elektrische Feldvektor als Funktion der Zeit i.a. eine Ellipse in der xy -Ebene beschreibt, die entweder eine Rechts- (oberes Vorzeichen) oder Linksschraube (unteres Vorzeichen) beschreibt. Man bezeichnet diesen allgemeinen Fall daher als **elliptisch polarisierte elektromagnetische ebene Welle**. Unglücklicherweise nennt man aus historischen Gründen die rechtsschraubende (linksschraubende) elliptisch polarisierte Welle gerade umgekehrt linkselliptisch bzw. rechtselliptisch polarisiert, d.h. nach dem Drehsinn des elektrischen Feldstärkevektors als Funktion der Zeit, wenn man der Ausbreitungsrichtung der Welle entgegenguckt. Falls $\hat{E}_\xi = 0$ oder $\hat{E}_\eta = 0$, entartet die Ellipse zu einer Geraden, und es liegt eine **linear polarisierte Welle** vor. Falls $\hat{E}_\xi = \hat{E}_\eta$, wird die Ellipse zu einem Kreis, und man spricht von **zirkular polarisierten Wellen** und je nach Durchlaufsinne von linkszirkular (Rechtsschraube) bzw. rechtszirkular (Linksschraube) polarisierten elektromagnetischen Wellen.

Für das magnetische Feld gilt wegen (1.7.19)

$$\vec{B} = \vec{e}_z \times \vec{E} = \mp \hat{E}_\eta \sin[k(ct - z) + \alpha] \vec{e}_\xi + \hat{E}_\xi \cos[k(ct - z) + \alpha] \vec{e}_\xi. \quad (1.7.32)$$

Hier bedeutet das obere Vorzeichen ebenfalls eine Rechts- und das untere Vorzeichen eine Linksschraube. Das Magnetfeld besitzt also denselben Schraubensinn relativ zur Fortpflanzungsrichtung der Welle wie das elektrische Feld.

Wir betrachten nun die Impulsdichte der elektromagnetischen Welle (1.4.38)

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{c} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{E} \times (\vec{e}_z \times \vec{E}) = \frac{1}{c} [\vec{E}^2 \vec{e}_z - \vec{E}(\vec{e}_z \cdot \vec{E})] = \frac{1}{c} \vec{E}^2 \vec{e}_z. \quad (1.7.33)$$

Die Energiedichte ist gemäß (1.4.37)

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \vec{E}^2 = \hat{E}_\xi^2 + \hat{E}_\eta^2 = \text{const.} \quad (1.7.34)$$

Daraus wird klar, daß ebene harmonische Wellen in der Natur nicht vorkommen können, da die Gesamtenergie einer solchen Welle divergiert. Um die globalen Erhaltungsgrößen und damit die physikalische Natur der Wellen weiter studieren können, müssen wir realistischere **Wellenpakete** betrachten.

1.7.3 Wellenpakete

Realistische Wellen entstehen durch zeitlich begrenzte Vorgänge wie beim Einschalten eines Lasers¹¹. Sie sind wegen der endlichen Lichtgeschwindigkeit also auch räumlich begrenzt. Im folgenden betrachten wir eine Welle, die qualitativ dem Licht eines Lasers entspricht. Hierbei hat man es mit einer näherungsweise monochromatischen ebenen Welle zu tun, die in Ausbreitungsrichtung (wir wählen wieder die z -Richtung) sehr lang ist und in transversaler Richtung auf einen engen Bereich begrenzt ist, der jedoch immer noch groß gegenüber der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ ist. Dabei ist $k = \omega/c$ die Frequenz der Welle. In der Fourierentwicklung (1.7.21) entspricht dies der Situation, daß die $\tilde{E}_j(\vec{k})$ eng um einen Wert der Wellenzahl \vec{k} gepeakt ist.

Dann können wir für das komplexe Feld näherungsweise

$$\vec{E}_c = \hat{E}(\vec{x}) \exp[ik(z - ct)] \quad (1.7.35)$$

schreiben. Dabei ist die Einhüllende \hat{E} eine räumlich langsam veränderliche Funktion, d.h. wir setzen voraus, daß

$$\left| \frac{\partial}{\partial x^j} \hat{E}(\vec{x}) \right| \ll k |\hat{E}_0(\vec{x})|. \quad (1.7.36)$$

Das bedeutet, daß wir näherungsweise

$$\vec{E}_c \simeq \left[\hat{E}_x \vec{e}_x + \hat{E}_y \vec{e}_y + \frac{i}{k} (\partial_x \hat{E}_x + \partial_y \hat{E}_y) \vec{e}_z \right] \exp[ik(z - ct)] \quad (1.7.37)$$

setzen können, denn dann gilt wegen $|\partial_z E_{c;x,y}| \ll |k E_{c;x,y}|$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \simeq 0. \quad (1.7.38)$$

Das dazugehörige Magnetfeld erhalten in derselben Näherung daraus, daß näherungsweise $\vec{B} = \vec{e}_z \times \vec{E}$ gilt. Um das resultierende Feld divergenzfrei zu machen, müssen wir wieder die entsprechende Korrektur für die z -Komponenten mit den passenden Ableitungen der $E_{x,y}$ einsetzen. Dies ergibt

$$\vec{B}_c = \left[\hat{E}_x \vec{e}_y - \hat{E}_y \vec{e}_x + \frac{i}{k} (\partial_y \hat{E}_x - \partial_x \hat{E}_y) \vec{e}_z \right] \exp[ik(z - ct)]. \quad (1.7.39)$$

Wir interessieren uns nun insbesondere für die zirkular polarisierten Wellen, für die

$$\hat{E}_y = \pm i \hat{E}_x = \pm i \hat{E} \quad (1.7.40)$$

gilt. Dabei können wir o.B.d.A. $\hat{E} \in \mathbb{R}$ annehmen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{E}_c &\simeq \left[\hat{E}(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y) + \frac{i}{k} (\partial_x \hat{E} \pm i\partial_y \hat{E}) \vec{e}_z \right] \exp[ik(z - ct)], \\ \vec{B}_c &\simeq \left[\hat{E}(\vec{e}_y \mp i\vec{e}_x) + \frac{i}{k} (\partial_y \hat{E} \mp i\partial_x \hat{E}) \vec{e}_z \right] \exp[ik(z - ct)] = \mp i \vec{E}_c. \end{aligned} \quad (1.7.41)$$

Wir berechnen nun das Zeitmittel der Energie-Impuls-Dichten. Man zeigt durch eine einfache Rechnung, daß

$$\begin{aligned} \langle \epsilon \rangle &= \frac{1}{2} \langle (\text{Re } \vec{E}_c)^2 + (\text{Re } \vec{B}_c)^2 \rangle \simeq \hat{E}^2, \\ \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{c} \langle (\text{Re } \vec{E}_c) \times (\text{Re } \vec{B}_c) \rangle = \frac{1}{2c} \text{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^*) \simeq \frac{\hat{E}^2}{c} \vec{e}_z \pm \frac{\hat{E}}{2ck} (\vec{e}_x \partial_y \hat{E} - \vec{e}_y \partial_x \hat{E}). \end{aligned} \quad (1.7.42)$$

¹¹Auf die Funktionsweise eines Lasers können wir hier nicht genauer eingehen, da dazu die Quantentheorie erforderlich ist.

Dabei haben wir Größen der Ordnung $(\partial_{x,y}\hat{E})^2/k^2$ gegen solche in erster Ordnung dieser Größen vernachlässigt.

Nun wollen wir die z-Komponente der mittleren Drehimpulsdichte berechnen. Diese ist gemäß (1.4.68) und wegen $ck = \omega$ durch

$$\langle \mathcal{J}_z \rangle = \langle (\vec{x} \times \vec{\Pi})_z \rangle \simeq \mp \frac{\hat{E}}{\omega} (x \partial_x \hat{E} + y \partial_y \hat{E}) \quad (1.7.43)$$

gegeben. Nun berechnen wir die Gesamtdrehimpuls-z-Komponente. Dazu ist (1.7.43) über den ganzen Raum zu integrieren:

$$J_z = \mp \frac{1}{\omega} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \hat{E} (x \partial_x \hat{E} + y \partial_y \hat{E}) = \pm \frac{1}{\omega} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \hat{E}^2 \stackrel{(1.7.42)}{=} \pm \frac{\mathcal{E}}{\omega}. \quad (1.7.44)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt partiell integriert und beachtet, daß \hat{E} gemäß unserer Voraussetzungen im Unendlichen hinreichend schnell verschwindet. Weiter haben wir verwendet, daß aufgrund von (1.7.42) die mittlere Gesamtenergie des elektromagnetischen Feldes

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \hat{E}^2 \quad (1.7.45)$$

ist. Weiter berechnet man aus (1.7.42) für den Gesamtimpuls

$$\vec{P} = \frac{\mathcal{E}}{c} \vec{e}_z. \quad (1.7.46)$$

Dabei haben wir bei der Integration im zweiten Term $\hat{E} \partial_{x,y} \hat{E} = 1/2 \partial_{x,y} (\hat{E}^2)$ und das Verschwinden von \hat{E} im räumlich Unendlichen verwendet. Für den Energie-Impuls-Vierervektor $(p^\mu) = (\mathcal{E}/c, \vec{P})$ gilt also $p_\mu p^\mu = 0$. Dies entspricht der Energie-Impulsbeziehung eines masselosen (also stets relativistischen) Teilchens.

Betrachten wir (1.7.44), so folgt, daß die zirkular polarisierten Wellen **Polarisationszustände positiver bzw. negativer Helizität** sind. Dabei ist die **Helizität** durch die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf die Impulsrichtung des elektromagnetischen Feldes definiert, und das ist in unserer Konvention gerade J_z . Die links- bzw. rechtszirkular polarisierte Welle besitzt also positive bzw. negative Helizität, was mit der anschaulichen Bedeutung übereinstimmt, daß für diese Wellentypen der elektrische und magnetische Feldstärkevektor Rechts- bzw. Links-Schrauben bzgl. der Ausbreitungsrichtung der Welle beschreiben.

1.7.4 Skalare Kugelwellen

Wir wollen in diesem Abschnitt zunächst die Entwicklung der Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\phi = 0 \quad (1.7.47)$$

für ein Skalarfeld betrachten. Dies werden wir weiter unten für die vektoriellen Kugelwellenlösungen der freien Maxwell-Gleichungen benötigen. Dies beantwortet auch die entsprechende Frage nach den Eigenlösungen des Laplace-Operators bei Separation in Kugelkoordinaten aus Abschnitt 1.5.3.

Eine Schlüsselrolle zur Untersuchung der allgemeinen Lösung der Helmholtz-Gleichung kommt den **Green-Funktionen** zu. Betrachten wir die Helmholtz-Gleichung im Zusammenhang mit Lösungen der Wellengleichung mit harmonischer Zeitabhängigkeit $\Phi(t, \vec{x}) = \phi(\vec{x}) \exp(-i\omega t)$, sind wir hier insbesondere an der Green-Funktion interessiert, die asymptotisch **auslaufenden Kugelwellen** entspricht. Wir suchen also eine Lösung für die Gleichung

$$-(\Delta + k^2)G(\vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x}). \quad (1.7.48)$$

Aufgrund der Symmetrie unter Rotationen um den Ursprung, machen wir den Ansatz

$$G(\vec{x}) = \frac{g(r)}{4\pi r}, \quad r = |\vec{x}|. \quad (1.7.49)$$

Die Abspaltung des Faktors $1/(4\pi r)$ ist motiviert durch die Green-Funktion $1/(4\pi r)$ für den Operator $-\Delta$, denn die δ -Singularität rührt von den höchsten Ableitungen des jeweiligen Differentialoperators her. Mit dem Laplaceoperator in Kugelkoordinaten (B.1.18) gilt für $r \neq 0$

$$\Delta G(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r} g''(r) = -\frac{k^2}{4\pi r} \Rightarrow g(r) = A \exp(ikr) + B \exp(-ikr). \quad (1.7.50)$$

Die Forderung nach **auslaufenden Kugelwellen** verlangt $B = 0$. Bis jetzt haben wir also

$$G(\vec{x}) = A \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}. \quad (1.7.51)$$

Da für $k = 0$ die Green-Funktion für $-\Delta$ herauskommen muß, folgt $A = 1$, d.h.

$$G(\vec{x}) = \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}. \quad (1.7.52)$$

Nun betrachten wir die Entwicklung von $G(\vec{x} - \vec{x}')$ nach Kugelflächenfunktionen. Wegen der Vollständigkeit der Y_{lm} gilt wie bei den entsprechenden Betrachtungen in Abschnitt 1.5.3

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r, r') \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1.7.53)$$

Es ist klar, dass $R_l(r, r')$ sowohl bzgl. r als auch r' die Differentialgleichung für sphärische Besselfunktionen erfüllt, und wegen (1.7.52) gilt

$$G(\vec{x} - \vec{x}') \underset{r \rightarrow \infty}{\cong} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \quad (1.7.54)$$

$$G(\vec{x} - \vec{x}') \underset{k \rightarrow 0}{\cong} \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (1.7.55)$$

Daraus und aus der Symmetrie der Funktion unter Vertauschen von \vec{x} mit \vec{x}' folgt, daß $R_l(r, r') = A_l j_l(kr_<) h_l^{(1)}(kr_>)$ sein muß, wobei $r_< = \min(r, r')$ und $r_> = \max(r, r')$. Dabei ist j_l die eindeutig bestimmten sphärischen Besselfunktionen, die in $kr = 0$ keine Singularität aufweisen und $h_l^{(1)}$ die Hankelfunktion, die für große r die Asymptotenbedingung (1.7.54) erfüllt. Für $k \rightarrow 0$ müssen wir also bis auf das Vorzeichen auf (1.5.76) kommen. Verwenden wir die Asymptotik der sphärischen Besselfunktionen für kleine Argumente, resultiert dann $A_l = ik$, so daß schließlich

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = ik \sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr_<) h_l^{(1)}(kr_>) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.7.56)$$

resultiert. Eine etwas ausführlichere Darstellung dieser Betrachtungen findet sich wieder in [CH10].

Für das folgende wichtig ist noch die Darstellung **ebener Wellenlösungen** der Helmholtz-Gleichungen

$$f_{\vec{k}}(\vec{x}) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (1.7.57)$$

als Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen. Dazu setzen wir $\vec{k} = k\vec{n}'$ und betrachten (1.7.57) für $r' \rightarrow \infty$. Zunächst ist

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = |\vec{x} - r'\vec{n}'| = r' \sqrt{r^2/r'^2 - 2\vec{n}' \cdot \vec{r}/r' + 1} = r' - \vec{n}' \cdot \vec{r} + \mathcal{O}(r^2/r'). \quad (1.7.58)$$

Damit wird die linke Seite von (1.7.56)

$$G(\vec{x} - \vec{x}') \underset{r' \rightarrow \infty}{\cong} \frac{\exp(ikr')}{4\pi r'} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (1.7.59)$$

Für $r' \rightarrow \infty$ ist auf der rechten Seite $r_> = r'$ und $r_< = r$, und wir können die asymptotische Form der Hankelfunktion verwenden, d.h.

$$G(\vec{x} - \vec{x}') \underset{kr \rightarrow \infty}{\cong} ik \sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr) (-i)^{l+1} \frac{\exp(ikr')}{r'} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1.7.60)$$

Damit folgt nach einfachen Umformungen

$$\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) = 4\pi k \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l j_l(kr) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1.7.61)$$

Bildet man das konjugiert Komplexe dieser Gleichung folgt schließlich

$$\begin{aligned} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) &= 4\pi k \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(kr) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta', \varphi') Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \\ &= 4\pi k \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(kr) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.7.62)$$

Die letztere Identität folgt aus $Y_{l,-m}^* = (-1)^m Y_{lm}$.

1.7.5 Vektorielle Kugelwellen

Um die Entwicklung freier elektromagnetischer Wellen nach **Kugelflächenfunktionen** zu erhalten, betrachten wir zunächst ein beliebiges Vektorfeld $\vec{A}(\vec{x})$. So wie die Kugelflächenfunktionen als simultane Eigenlösungen für die Operatoren \vec{L}^2 und L_3 angesehen werden können, wobei der **Drehimpulsoperator** $\vec{L} = -i\vec{r} \times \vec{\nabla}$ auf **skalare** Felder wirkt, können wir die entsprechenden Entwicklungen für **Vektorfelder** erhalten, indem wir nach den simultanen Eigenfunktionen für \vec{J}^2 und J_3 fragen, wobei \vec{J} der Drehimpulsoperator in seiner Anwendung auf Vektorfelder ist [Fra50]. Dabei ist der Drehimpulsoperator dadurch definiert, daß $i\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{J}$ infinitesimale Drehungen erzeugt. Für ein Vektorfeld gilt unter Drehungen

$$\vec{A}'(\vec{x}') = \hat{D}(\delta\vec{\varphi})\vec{A}[\hat{D}(-\delta\vec{\varphi})\vec{x}'] = [1 - \delta\vec{\varphi} \times + \delta\vec{\varphi} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla})]\vec{V}(\vec{x}) = (1 + i\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{J})\vec{A}(\vec{x}). \quad (1.7.63)$$

Daraus liest man

$$\mathbf{J}_i \vec{A} = i\vec{e}_i \times \vec{A} - i\vec{r} \times \vec{\nabla}_i \vec{A}. \quad (1.7.64)$$

Wir können den ersten Anteil als **Spin-** und den zweiten Anteil als **Bahndrehimpuls** auffassen, wobei dies im Falle elektromagnetischer Wellen nicht allzu wörtlich im quantenmechanischen Sinne zu verstehen ist. Es ist dabei

$$\mathbf{S}_i \vec{A} = i\vec{e}_i \times \vec{A}, \quad \mathbf{L}_i \vec{A} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})_i \vec{A}. \quad (1.7.65)$$

1.7. Freie Elektromagnetische Wellen

Zunächst stellen wir durch direktes Nachrechnen fest, daß wie zu erwarten die \mathbf{J}_i die Drehimpulsalgebra erfüllen, d.h. für die Wirkung auf Vektorfelder gelten die Kommutatorrelationen

$$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i\epsilon_{ijk} \mathbf{J}_k. \quad (1.7.66)$$

Ebenso gelten diese Relationen für $\vec{\mathbf{S}}$ und $\vec{\mathbf{L}}$:

$$[\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j] = i\epsilon_{ijk} \mathbf{S}_k, \quad [\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = i\epsilon_{ijk} \mathbf{L}_k. \quad (1.7.67)$$

Außerdem kommutieren Spin- und Bahndrehimpulskomponenten

$$[\mathbf{S}_i, \mathbf{L}_j] = 0. \quad (1.7.68)$$

Da \mathbf{S}_i die Darstellung des Drehimpulses zu $l = 1$ repräsentiert und \mathbf{L}_i die direkte Summe aller ganzzahligen Darstellungen mit $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$, besitzt $\vec{\mathbf{J}}^2$ nach den bekannten Regeln für die Drehimpulsaddition die Eigenwerte $j(j+1)$ mit $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ und zu jedem j der Operator \mathbf{J}_3 die Werte $j_3 \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$. Ferner weist man durch Anwendung der Standardformeln für die üblichen Vektordifferentialoperatoren nach, daß

$$\mathbf{J}_i \text{rot} = \text{rot} \mathbf{J}_i. \quad (1.7.69)$$

Schließlich gilt für die Anwendung auf Skalarfelder

$$\mathbf{J}_i \vec{\mathbf{L}}\phi = \vec{\mathbf{L}}\mathbf{L}_i\phi \quad (1.7.70)$$

und

$$\mathbf{J}_i \vec{x}\phi = \vec{x}\mathbf{L}_i\phi \quad (1.7.71)$$

sowie

$$\mathbf{J}_i \vec{\nabla}\phi = \vec{\nabla}\mathbf{L}_i\phi. \quad (1.7.72)$$

Damit sind in der Tat die drei Vektorkugelflächenfunktionen (1.6.30-1.6.32), deren Indizes wir lediglich an unseren Fall angepaßt in

$$\vec{\Psi}_{jj_3}(\vartheta, \varphi) = r \vec{\nabla} Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi), \quad (1.7.73)$$

$$\vec{\Phi}_{jj_3}(\vartheta, \varphi) = \vec{r} \times \vec{\nabla} Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi), \quad (1.7.74)$$

$$\vec{Y}_{jj_3}(\vartheta, \varphi) = \vec{e}_r Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi) \quad (1.7.75)$$

umbennen, simultane Eigenfunktionen zu $\vec{\mathbf{J}}^2$ und \mathbf{J}_3 zu den Eigenwerten $j(j+1)$ bzw. j_3 mit $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ und $j_3 \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$.

Wir behaupten nun, dass wir jede **quellenfreie Lösung der vektoriellen Helmholtz-Gleichung**, also jedes Vektorfeld, das

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (1.7.76)$$

$$-(\Delta + k^2)\vec{A} = 0 \quad (1.7.77)$$

erfüllt, nach den Funktionen

$$\vec{A}_{jj_3}^{(\text{TE})} = \vec{\mathbf{L}} R_{jj_3}^{(\text{TE})}(r) Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi) = \vec{\mathbf{L}} u_{jj_3}^{(\text{TE})}, \quad (1.7.78)$$

$$\vec{A}_{jj_3}^{(\text{TM})} = \frac{1}{k} \text{rot} \vec{\mathbf{L}} R_{jj_3}^{(\text{TM})}(r) Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{k} \text{rot} \vec{\mathbf{L}} u_{jj_3}^{(\text{TM})} \quad (1.7.79)$$

gemäß

$$\vec{A} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_3=-j}^j (\vec{A}_{jj_3}^{(\text{TE})} + \vec{A}_{jj_3}^{(\text{TM})}) \quad (1.7.80)$$

entwickelt werden kann. Dabei sind die R_{jj_3} beliebige sphärische Zylinderfunktionen, also Linearkombinationen von $j_j(kr)$ und $n_j(kr)$ bzw. $h_l^{(1)}(kr)$ und $h_l^{(2)}(kr)$. Es ist klar, daß all diese Funktionen (1.7.76) und (1.7.77) erfüllen. Wichtig ist hierbei, daß die kugelsymmetrische Lösung, also $R_0(r)$ nicht zu der obigen Summe beiträgt. In der Tat ist $\vec{\mathbf{L}}R_0(r) \equiv 0$.

Betrachten wir \vec{A} als das elektromagnetische Vektorpotential in Strahlungseichung, gilt $\vec{E} = i\omega\vec{A}$ und $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$. Daraus ergeben sich die Bezeichnungen TE (transversal elektrisch) und TM (transversal magnetisch), denn offenbar ist $\vec{x} \cdot \vec{E}^{(\text{TE})} = 0$ und $\vec{x} \cdot \vec{B}^{(\text{TM})} = 0$, d.h. die Transversalität bezieht sich auf im Zusammenhang mit sphärischen Wellenlösungen auf den Ortsvektor.

Es verbleibt nur noch zu zeigen, daß man alle simultanen Lösungen nach diesem Satz von Funktionen entwickeln kann. Dazu müssen wir offenbar nur zeigen, daß wir die links- bzw. rechts zirkular polarisierten ebenen Wellen \vec{A}_R und \vec{A}_L , d.h.

$$\vec{A}_{L/R} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\vec{\epsilon}_1(\vec{k}) \pm i\vec{\epsilon}_2(\vec{k})] \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = \vec{\epsilon}_{R/L}(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (1.7.81)$$

mit den transversalen Polarisationsvektoren $\vec{\epsilon}_{1/2}(\vec{k})$, die in (1.7.11) und (1.7.12) definiert wurden, in Form einer Multipolentwicklung dargestellt können. Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \text{rot} \vec{A}_{L/R} &= -[\vec{\epsilon}_1(\vec{k}) \pm i\vec{\epsilon}_2(\vec{k})] \times \nabla \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \\ &= i\vec{k} \times [\vec{\epsilon}_1(\vec{k}) \pm i\vec{\epsilon}_2(\vec{k})] \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \\ &= ik[\vec{\epsilon}_2(\vec{k}) \mp i\vec{\epsilon}_1(\vec{k})] \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \\ &= \pm k[\vec{\epsilon}_1(\vec{k}) \pm i\vec{\epsilon}_2(\vec{k})] \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \\ &= \pm \sqrt{2} k \vec{A}_{L/R}. \end{aligned} \quad (1.7.82)$$

Wir definieren nun für ein beliebiges quellenfreies Vektorfeld \vec{A} , das die Helmholtz-Gleichung (1.7.77) erfüllt, die links- bzw. rechtszirkularen Anteile

$$\vec{A}_{L/R} = \frac{1}{2k} (k \pm \text{rot}) \vec{A}. \quad (1.7.83)$$

Für diese gilt wegen $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$, der Quellenfreiheit und (1.7.77) in der Tat

$$(\text{rot} \mp k) \vec{A}_{L/R} = 0. \quad (1.7.84)$$

Für die sphärischen links- und rechtszirkularen Moden (1.7.78) ist offenbar

$$\vec{A}_{jj_3}^{(L/R)} = (k\vec{\mathbf{L}} \pm \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{L}}) u_{jj_3} \quad (1.7.85)$$

mit simultanen Eigenfunktionen u_{jj_3} von Δ , $\vec{\mathbf{L}}^2$ und \mathbf{L}_3 zu den Eigenwerten $-k^2$, $j(j+1)$ bzw. j_3 . Dann folgt wegen $\vec{\mathbf{L}} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{L}}) u_{jj_3} = 0$

$$\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{A}_{jj_3}^{(L/R)} = k\vec{\mathbf{L}}^2 u_{jj_3} = kj(j+1)u_{jj_3} \Rightarrow u_{jj_3} = \frac{1}{kj(j+1)} \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{A}_{jj_3}^{(L/R)}. \quad (1.7.86)$$

1.7. Freie Elektromagnetische Wellen

Setzen wir dies in (1.7.84) ein, erhalten wir schließlich

$$\vec{A}_{jj_3}^{(L/R)} = \frac{1}{kj(j+1)} (k\vec{L} \pm \vec{\nabla} \times \vec{L}) \vec{L} \cdot \vec{A}_{jj_3}^{(L/R)}. \quad (1.7.87)$$

Sei nun wieder \vec{A} ein beliebige quellenfreie Lösung der Helmholtz-Gleichung. Dieses Feld können wir nun nach den links- und rechtszirkularen Anteilen $\vec{A}_{L/R}$ zerlegen. Wir beweisen am Ende dieses Abschnitts, dass dann allgemein

$$(k\vec{L} \pm \vec{\nabla} \times \vec{L}) \vec{L} \cdot \vec{A}_{L/R} = k\vec{J}^2 \vec{A}_{L/R} \quad (1.7.88)$$

gilt. Diese Gleichung können wir dann in der Tat nach $\vec{A}_{L/R}$ auflösen, denn für die besagten Felder ist \vec{J}^2 invertierbar. Dazu bemerken wir, daß das skalare Feld $\vec{L} \cdot \vec{A}_{L/R}$ der Helmholtzgleichung genügt, da $\Delta \vec{L} = \vec{L} \Delta$ gilt. Folglich läßt sich dieses Feld nach Kugelwellen entwickeln:

$$\vec{L} \cdot \vec{A}_{L/R} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j_3=-j}^j R_{jj_3}^{(L/R)}(r) Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi). \quad (1.7.89)$$

Für die Umkehrbarkeit von \vec{J}^2 ist es nun wichtig, daß $R_{00}^{(L/R)} = 0$ ist. Das ergibt sich aus

$$\vec{L} \cdot \vec{A}_{L/R} = -i(\vec{x} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A}_{L/R} = -i\vec{x} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}_{L/R}) = \mp ik\vec{x} \cdot \vec{A}_{L/R}. \quad (1.7.90)$$

Aus $\text{div} \vec{A}_{L/R} = 0$ folgt nämlich mit dem Stokesschen Satz

$$0 = \int_{K_r} d^3x \text{div} \vec{A}_{L/R} = \int_{\partial K_r} d^2\vec{f} \cdot \vec{A}_{L/R} = \int_{\partial K_1} d^2f r \vec{r} \cdot \vec{A}_{L/R}. \quad (1.7.91)$$

Andererseits folgt aus der Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen auf $L^2(S_1)$ wegen $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$

$$R_{00}^{(L/R)}(r) = \int_{\partial K_r} d^2f \vec{L} \cdot \vec{A}_{L/R} Y_{00}^* = \mp \frac{ik}{\sqrt{4\pi}} \int_{\partial K_1} d^2f r \vec{r} \cdot \vec{A}_{L/R} = 0. \quad (1.7.92)$$

Es ist also in der Tat

$$\vec{L} \cdot \vec{A}_{L/R} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_3=-j}^j R_{jj_3}^{(L/R)}(r) Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi). \quad (1.7.93)$$

Setzen wir diese Entwicklung in (1.7.88) ein und wenden den inversen Operator von \vec{J}^2 , den wir mit \vec{J}^{-2} bezeichnen wollen, an, so folgt aus $\vec{J}^{-2} \vec{L} = \vec{L} \vec{J}^{-2}$ und $\vec{J}^{-2} \text{rot} = \text{rot} \vec{J}^{-2}$

$$\vec{A}_{L/R} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_3=-j}^j \frac{1}{kj(j+1)} (k\vec{L} \pm \text{rot} \vec{L}) R_{jj_3}^{(L/R)}(r) Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi). \quad (1.7.94)$$

Damit ist die Vollständigkeit des Funktionensystems (1.7.78-1.7.79) gezeigt. Für das Feld ergibt sich demnach schließlich

$$\vec{A} = \vec{A}_L + \vec{A}_R = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_3=-j}^j \frac{1}{kj(j+1)} \left\{ k\vec{L} [R_{jj_3}^{(L)}(r) + R_{jj_3}^{(R)}(r)] + \text{rot} \vec{L} [R_{jj_3}^{(L)}(r) - R_{jj_3}^{(R)}(r)] \right\} Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi). \quad (1.7.95)$$

Es ist aus der obigen Betrachtung auch klar, wie man die Koeffizienten R_{jj_3} für ein gegebenes Feld erhält. Nachdem nun aber die Darstellbarkeit der quellenfreien Lösungen der Helmholtz-Gleichung als Entwicklungen nach dem Funktionensystem (1.7.78-1.7.79) klar ist, können wir die allgemeine Lösung auch in die Form

$$\vec{A} = i\vec{L}\psi + \text{irot}(\vec{L}\chi) = \vec{x} \times \vec{\nabla}\psi + \text{rot}(\vec{x} \times \vec{\nabla}\chi) \quad (1.7.96)$$

bringen, wobei die Faktoren i Konvention sind, um mit reellen Differentialoperatoren auszukommen. Es ist also

$$i\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_3=-j}^j \frac{1}{j(j+1)} [R_{jj_3}^{(L)}(r) + R_{jj_3}^R(r)] Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi), \quad (1.7.97)$$

$$i\chi = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_3=-j}^j \frac{1}{kj(j+1)} [R_{jj_3}^{(L)}(r) - R_{jj_3}^R(r)] Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi). \quad (1.7.98)$$

Wir können die Koeffizienten für ψ und χ aber auch einfacher direkt aus dem Ansatz (1.7.95) gewinnen, denn offenbar ist

$$U := i\vec{L} \cdot \vec{A} = \vec{r} \cdot \text{rot} \vec{A} = -\vec{L}^2 \psi, \quad W = i\vec{r} \cdot \vec{A} = -\vec{L}^2 \chi. \quad (1.7.99)$$

Da nämlich voraussetzungsgemäß sowohl \vec{A} als auch $\text{rot} \vec{A}$ quellenfrei sind und die Helmholtzgleichung erfüllen, kann man wieder U und W in Multipole mit $j \neq 0$ entwickeln,

$$U = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_3=-j}^j U_{jj_3}(r) Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi), \quad W = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_3=-j}^j W_{jj_3}(r) Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi), \quad (1.7.100)$$

und folglich auf (1.7.99) $-\vec{L}^{-2}$ anwenden, was sofort die Debye-Potentiale

$$\psi = -\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_3=-j}^j \frac{1}{j(j+1)} U_{jj_3}(r) Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi), \quad \chi = -\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_3=-j}^j \frac{1}{j(j+1)} W_{jj_3}(r) Y_{jj_3}(\vartheta, \varphi), \quad (1.7.101)$$

liefert.

Beweis von (1.7.88)

Wir tragen nun noch den entscheidenden Beweis der Beziehung (1.7.88) nach. Dazu müssen wir uns nur mit dem zweiten Term näher beschäftigen, also $\pm \text{rot} \vec{L}(\vec{L} \cdot \vec{A}_{L/R})$. Aus (1.7.90) folgt

$$\pm \vec{L} \cdot \vec{A}_{L/R} = -ik\vec{x} \cdot \vec{A}_{L/R}. \quad (1.7.102)$$

Nun gilt

$$-\text{irot} \vec{L}(\vec{r} \cdot \vec{A}_{L/R}) = \vec{p} \times \vec{L}(\vec{r} \cdot \vec{A}_{L/R}), \quad \vec{p} = -i\vec{\nabla}, \quad (1.7.103)$$

wobei \vec{p} der Impulsoperator in der Ortsdarstellung der Quantenmechanik ist. Nun zeigt man aufgrund der Kommutatorrelationen $[\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_j] = i\delta_{ij}$ nach einiger Rechnung

$$\vec{p} \times \vec{L} = 2i\vec{p} - \vec{L} \times \vec{p}, \quad (1.7.104)$$

und damit wird aus (1.7.103)

$$-\text{irot} \vec{L}(\vec{r} \cdot \vec{A}_{L/R}) = 2i\vec{p}(\vec{r} \cdot \vec{A}_{L/R}) - \vec{L} \times \vec{p}(\vec{r} \cdot \vec{A}_{L/R}). \quad (1.7.105)$$

Durch direkte Rechnung zeigt man weiter, daß

$$\vec{\mathbf{p}}(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{A}}_{L/R}) = -i\vec{\mathbf{A}}_{L/R} - ir_i \vec{\nabla} A_{L/Ri} \quad (1.7.106)$$

gilt. Dann können wir, ebenfalls durch eine längere direkte Rechnung,

$$\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{A}}_{L/R} = -ix_i \vec{\nabla} A_{L/Ri} \quad (1.7.107)$$

beweisen. Setzen wir also (1.7.106) und (1.7.107) in (1.7.105) ein, folgt nach einigen Umformungen

$$-i\text{rot } \vec{\mathbf{L}}(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{A}}_{L/R}) = 3i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{A}}_{L/R} + 2\vec{\mathbf{A}}_{L/R} - \vec{\mathbf{L}} \times (\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{A}}_{L/R}). \quad (1.7.108)$$

Der letzte Term läßt sich weiter durch eine längere direkte Rechnung unter Verwendung der Kommutatorrelationen $[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = i\epsilon_{ijk} \mathbf{L}_k$ in

$$\vec{\mathbf{L}} \times (\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{A}}_{L/R}) = \vec{\mathbf{L}}(\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{A}}_{L/R}) - \vec{\mathbf{L}}^2 \vec{\mathbf{A}}_{L/R} + i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{A}}_{L/R} \quad (1.7.109)$$

umformen. Damit wird aus (1.7.108)

$$-i\text{rot } \vec{\mathbf{L}}(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{A}}_{L/R}) = \vec{\mathbf{L}}^2 \vec{\mathbf{A}}_{L/R} + 2i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{A}}_{L/R} + 2\vec{\mathbf{A}}_{L/R} - \vec{\mathbf{L}}(\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{A}}_{L/R}) \quad (1.7.110)$$

und schließlich

$$(k\vec{\mathbf{L}} \pm \text{rot } \vec{\mathbf{L}})\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{A}}_{L/R} = \vec{\mathbf{L}}^2 \vec{\mathbf{A}}_{L/R} + 2i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{A}}_{L/R} + 2\vec{\mathbf{A}}_{L/R}. \quad (1.7.111)$$

Nun ist schließlich noch

$$(\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}})\vec{\mathbf{A}}_{L/R} = \mathbf{L}_i \mathbf{S}_i \vec{\mathbf{A}}_{L/R} = i\mathbf{L}_i \vec{\mathbf{e}}_i \times \vec{\mathbf{A}}_{L/R} = i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{A}}_{L/R}. \quad (1.7.112)$$

Da $[\mathbf{L}_i, \mathbf{S}_j] = 0$ ist, folgt schließlich $\vec{\mathbf{J}}^2 = \vec{\mathbf{L}}^2 + 2\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}} + \vec{\mathbf{S}}^2$ und wegen $\vec{\mathbf{S}}^2 = 2$ aus (1.7.111) die Behauptung (1.7.88).

1.7.6 Multipolentwicklung des elektromagnetischen Feldes

Wir wenden nun die obigen Überlegungen auf das freie elektromagnetische Feld im Vakuum an, wobei wir wieder harmonische Zeitabhängigkeit, also $\vec{\mathbf{E}}(t, \vec{\mathbf{x}}) \rightarrow \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}) \exp(-i\omega t)$ und $\vec{\mathbf{B}}(t, \vec{\mathbf{x}}) \rightarrow \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}}) \exp(-i\omega t)$, voraussetzen. Weiter setzen wir wieder $k = \omega/c$. Die Maxwell-Gleichungen lauten dann

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = ik\vec{\mathbf{B}}, \quad (1.7.113)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = -ik\vec{\mathbf{E}}, \quad (1.7.114)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0, \quad (1.7.115)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0. \quad (1.7.116)$$

Dabei müssen wir offenbar nur eines der Felder bestimmen, da dann (1.7.113) bzw. (1.7.114) das jeweils andere Feld festlegt. Es ist auch klar, daß (1.7.115) und (1.7.116), also die Quellenfreiheit sowohl des elektrischen als auch des magnetischen Feldes, durch (1.7.113) bzw. (1.7.114) automatisch garantiert werden. Wie wir in Abschnitt 1.8.4 sehen werden, empfiehlt es sich bei Vorhandensein von Quellen mit der Berechnung von $\vec{\mathbf{B}}$ zu beginnen, da dieses Feld quellenfrei ist und daher immer noch eine Darstellung mit Debye-Potentialen erlaubt.

Im hier erörterten quellenfreien Fall gelten für das \vec{B} -Feld alle Eigenschaften der im vorigen Abschnitt betrachteten quellenfreien vektoriellen Lösungen der Helmholtz-Gleichung, denn bildet man die Rotation der Gl. (1.7.114), erhält man unter Verwendung von (1.7.113) und (1.7.116)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\Delta \vec{B} = -ik \vec{\nabla} \times \vec{E} = k^2 \vec{B}, \quad (1.7.117)$$

d.h. \vec{B} erfüllt die Helmholtz-Gleichung und ist wegen (1.7.116) quellenfrei. Damit existieren Debye-Potentiale wie in (1.7.96) angegeben,

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{TE}} + \vec{B}_{\text{TM}} = \vec{r} \times \vec{\nabla} \psi + \vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{\nabla} \chi). \quad (1.7.118)$$

Die Lösung, die dem physikalischen Fall von durch in begrenzten Raumbereichen lokalisierten Ladungs- und Stromverteilungen ist dann außerhalb dieser Stromverteilungen durch (1.7.101) gegeben, wobei die Funktionen U_{j_3} und W_{j_3} proportional zu den sphärischen Hankel-Funktionen erster Art, also $h_j^{(1)}(kr)$ sind, da diese die eindeutigen Lösungen sind, die der Ausstrahlungsbedingung entsprechen, sich also asymptotisch für $kr \gg 1$ wie $\exp(+ikr)$ verhalten. Die entsprechenden Koeffizienten werden mit zunächst willkürlich erscheinend Vorfaktoren versehen und definieren die **elektrischen und magnetischen sphärischen Multipolmomente**.

1.8 Felder zeitabhängiger Ladungs- und Stromverteilungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Erzeugung des elektromagnetischen Feldes aufgrund der Anwesenheit vorgegebener Ladungs- und Stromverteilungen.

1.8.1 Die retardierten Potentiale (Lorenz-Eichung)

Wir gehen von der Wellengleichung für das **Viererpotential in Lorenz-Eichung** (1.1.28) aus. Da die vier Feldkomponenten in dieser Eichung separieren, benötigen wir einfach die **Green-Funktion** für den d'Alembert-Operator, also

$$\square_x G(x, x') = \delta^{(4)}(x - x'). \quad (1.8.1)$$

Kennen wir eine solche Funktion, können wir offenbar (1.2.28) einfach durch

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' G(x, x') j^\mu(x') \quad (1.8.2)$$

lösen. Allerdings entsprechen nicht beliebige Lösungen der Gleichung für die Green-Funktion (1.8.1) unserer physikalischen Intention einer **kausalen Lösung**, denn die Integration über $x'^0 = ct'$ entspricht einer Zeitintegration über alle Zeiten. Zur Zeit t sollten nur die Ladungs- und Stromdichtekomponenten zu Zeiten $t' < t$ zum elektromagnetischen Feld (bzw. dem Viererpotential) beitragen und nicht zukünftige Ladungs- und Stromverteilungen. Wir suchen also die spezielle Lösung $G_{\text{ret}}(x, x')$, die **retardierte Green-Funktion** von (1.8.1), für die

$$G_{\text{ret}}(x, x') = 0 \quad \text{für} \quad x'^0 > x^0 \quad (1.8.3)$$

gilt.

Da weiter die rechte Seite von (1.8.1) nur von der Differenz $x - x'$ der beiden Vierervektoren abhängt, machen wir den Ansatz

$$G_{\text{ret}}(x, x') \equiv G_{\text{ret}}(x - x') \quad (1.8.4)$$

Offenbar folgt aus (1.8.1)

$$\square G_{\text{ret}}(x) = \delta^{(4)}(x). \quad (1.8.5)$$

1.8. Felder zeitabhängiger Ladungs- und Stromverteilungen

Um eine Lösung für diese Gleichung zu finden, schreiben wir sie als Fourier-Transformation bzgl. der Raumkomponenten. Die Zeitkomponente behalten wir bei, um die Bedingung (1.8.3) auf natürliche Weise berücksichtigen zu können. Wir werden weiter unten in diesem Abschnitt noch eine zweite Methode zur Berechnung der retardierten Green-Funktion vorstellen, wo auch bzgl. der Zeitabhängigkeit eine Fourier-Transformation angesetzt wird. Wir schreiben also zunächst

$$G_{\text{ret}}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} g(x^0, \vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (1.8.6)$$

Setzen wir diesen Ansatz in (1.8.5) ein, erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} g(x^0, \vec{k}) + \vec{k}^2 g(x^0, \vec{k}) \right] = \delta^4(x) = \delta(x^0) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (1.8.7)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die bekannte Fourier-Darstellung der Dirac-Distribution $\delta^{(3)}(\vec{x})$ verwendet. Wegen der Eindeutigkeit der Fourier-Transformation gilt also

$$\ddot{g}(x^0, \vec{k}) + \vec{k}^2 g(x^0, \vec{k}) = \delta(x^0). \quad (1.8.8)$$

Dabei bezeichnen wir die Ableitung nach x^0 mit einem Punkt.

Außer für $x^0 = 0$, folgt

$$g(x^0, \vec{k}) = A \cos(\omega x^0) + B \sin(\omega x^0) \quad \text{mit} \quad \omega = |\vec{k}| \quad (1.8.9)$$

mit Konstanten A und B , die für $x^0 < 0$ und $x^0 > 0$ unterschiedlich gewählt werden müssen, so daß zum einen die δ -Singularität in (1.8.8) zum anderen die Bedingung (1.8.3) erfüllt ist. Für $x^0 < 0$ haben wir also $A = B = 0$ zu setzen. Damit g stetig bei $x^0 = 0$ ist und folglich erst die erste Ableitung einen Sprung und die zweite Ableitung die δ -Singularität in (1.8.8) enthält, folgt $A = 0$ auch für $x^0 > 0$. Um auch B zu bestimmen, integrieren wir (1.8.8) über ein infinitesimales Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$. Da g stetig ist, verschwindet der zweite Term auf der linken Seite im Limes $\epsilon \rightarrow +0$, und es folgt die Bedingung

$$\dot{g}(0^+, \vec{k}) = 1 \Rightarrow \omega B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{\omega} \quad (1.8.10)$$

und schließlich

$$g(x^0, \vec{k}) = \Theta(x^0) \frac{\sin(Kx^0)}{K} \quad \text{mit} \quad K = |\vec{k}|. \quad (1.8.11)$$

Setzen wir dies nun in (1.8.6) ein, können wir das Integral in Kugelkoordinaten mit der Polarachse in Richtung von \vec{x} exakt auswerten. Zunächst ergibt sich

$$G_{\text{ret}}(x) = \frac{\Theta(x^0)}{(2\pi)^3} \int_0^\omega dK \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi K^2 \sin \vartheta \frac{\sin(Kx^0)}{K} \exp(iKr \cos \vartheta). \quad (1.8.12)$$

Das Integral über φ ergibt einen Faktor 2π , da der Integrand nicht von φ abhängt. Zur Integration über ϑ führt die Substitution $u = \cos \vartheta$, $du = d\vartheta \sin \vartheta$ zum Ziel. Dies liefert schließlich

$$G_{\text{ret}}(x) = \frac{\Theta(x^0)}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dK \sin(Kx^0) \sin(Kr) = \frac{\Theta(x^0)}{4\pi^2 r} \int_{\mathbb{R}} dK \sin(Kx^0) \sin(Kr). \quad (1.8.13)$$

Drückt man die Sinusfunktionen durch Exponentialfunktionen aus, finden wir schließlich

$$G_{\text{ret}}(x) = \frac{\Theta(x^0)}{4\pi r} \delta(x^0 - r) = \frac{1}{4\pi r} \delta(x^0 - r) = \frac{1}{4\pi r c} \delta(t - r/c). \quad (1.8.14)$$

Im letzten Schritt haben wir die Funktion noch als Funktion von $t = x^0/c$ ausgedrückt. Dabei konnten wir die Θ -Funktion weglassen, da stets $r \geq 0$ ist. Setzen wir dies in (1.8.2) ein, erhalten wir schließlich die **retardierten Potentiale**

$$A_{\text{ret}}^\mu(x) = \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x' \frac{\delta(x^0 - x'^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} j^\mu(x'). \quad (1.8.15)$$

Führen wir die x'^0 -Integration aus, erhalten wir schließlich

$$A_{\text{ret}}^\mu(x) = \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} j^\mu(x^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}'). \quad (1.8.16)$$

Die physikalische Bedeutung wird klarer, wenn wir die Feldgrößen als Funktion von $t = x^0/c$ betrachten. Dann ergibt sich

$$A_{\text{ret}}^\mu(x) = \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}} dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \frac{\delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} j^\mu(t', \vec{x}') \quad (1.8.17)$$

bzw. nach Ausführung des Zeitintegrals zur Ausintegration der δ -Distribution

$$A_{\text{ret}}^\mu(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} j^\mu\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}'\right). \quad (1.8.18)$$

Dies zeigt, daß zu den retardierten Potentialen zur Zeit t am Punkt \vec{x} die jeweiligen Quellen am Punkt \vec{x}' zu dem um die Lichtlaufzeit $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$ früheren Zeitpunkt beitragen. Dies ist konsistent mit der Kausalstruktur des Minkowskiraumes: Signale können sich mit einer maximalen Geschwindigkeit von c ausbreiten. Diese „Grenzgeschwindigkeit“ stimmt im Rahmen der Maxwell-Theorie mit der Lichtgeschwindigkeit überein.

Wegen der prinzipiellen Wichtigkeit der Technik der Green-Funktionen leiten wir die retardierte Green-Funktion nochmals auf etwas anderem Wege her. Dazu machen wir zur Lösung von (1.8.5) den Ansatz als vierdimensionales kovariantes Fourier-Integral

$$G_{\text{ret}}(x) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{G}_{\text{ret}}(k) \exp(-ik \cdot x). \quad (1.8.19)$$

Dies in (1.8.5) eingesetzt, liefert die rein algebraische Gleichung

$$k^2 \tilde{G}_{\text{ret}}(k) = -1 \Rightarrow \tilde{G}_{\text{ret}}(k) = -\frac{1}{k^2}. \quad (1.8.20)$$

Dies ist auf den ersten Blick eine sehr viel einfachere Lösung als unser Ansatz mit dem rein räumlichen Fourier-Integral (1.8.6). Allerdings haben wir nun bei der Rücktransformation (1.8.19) in den Raum-Zeit-Bereich das Problem, wie wir mit den beiden Singularitäten bei $k^0 = \pm K$ (mit $K = |\vec{k}|$) verfahren sollen. Die Antwort ergibt sich aus der Kausalitätsbedingung (1.8.3), also das Verschwinden von $G_{\text{ret}}(x)$ für $x^0 < 0$.

Wir können nämlich dem Fourier-Integral (1.8.19) mit (1.8.20) dadurch einen Sinn geben, daß wir das k^0 -Integral als Integral in der komplexen k^0 -Ebene lesen und den Integrationsweg entlang der reellen Achse in der Nähe der Polstellen bei $k^0 = \pm K$ deformieren. Weiter beachten wir, daß wir uns den Integrationsweg durch einen Halbkreis mit unendlich großem Radius geschlossen denken dürfen, wenn wir beachten, daß stets $\text{Re}(-ik^0 x^0) < 0$ ist, d.h. wir müssen den Integrationsweg für $x^0 < 0$ in der oberen Halbebene ($\text{Im } k^0 > 0$) und für $x^0 > 0$ in der unteren Halbebene ($\text{Im } k^0 < 0$) schließen. Dann können wir den Residuensatz auf das k^0 -Integral von (1.8.19) anwenden. Dabei besagt die Retardierungsbedingung (1.8.6), daß wir die Integrationswege so deformieren müssen, daß beide Pole $k^0 = \pm K$ beim Schließen der Kontur in der oberen Halbebene ausgeschlossen sind (vgl. Abb. 1.2). Die Residuen sind

$$\text{Res}_{k^0 \rightarrow K} \frac{\exp(-ik \cdot x)}{k^2} = \frac{\exp(-iKx^0)}{2K}, \quad \text{Res}_{k^0 \rightarrow -K} \frac{\exp(-ik \cdot x)}{k^2} = -\frac{\exp(+iKx^0)}{2K}. \quad (1.8.21)$$

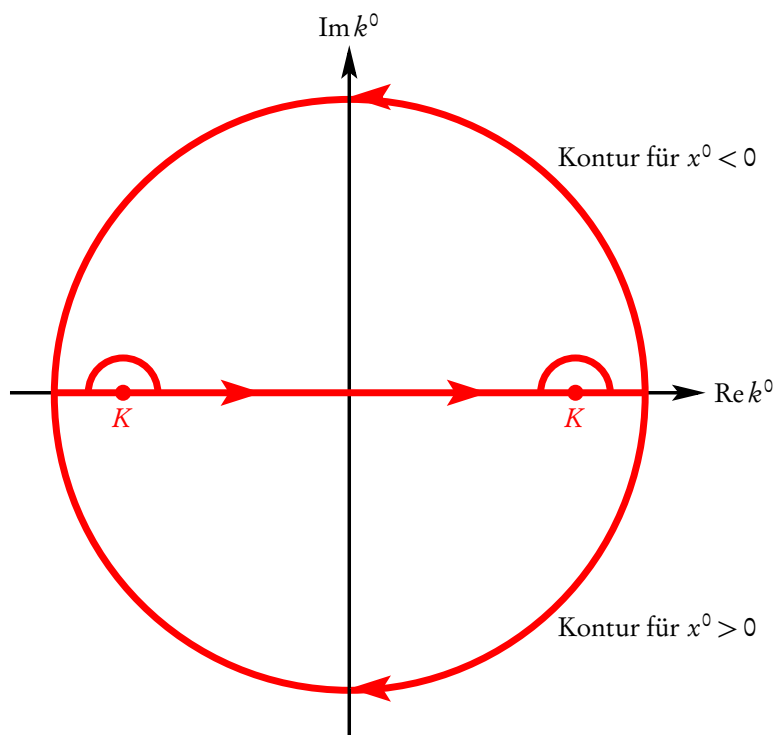


Abbildung 1.2: Die Kontur zur Berechnung des k^0 -Integrals in (1.8.19) in der komplexen k^0 -Ebene. Den Radius der großen Halbkreise hat man sich ins Unendliche ausgedehnt zu denken, und beide Konturen umlaufen die Singularitäten bei $k^0 = \pm K$ vermöge der kleinen Halbkreise. Durch diese Wahl der Umgehung der Singularitäten erhält man eindeutig die Lösung der die Green-Funktion definierenden Gleichung (1.8.1) mit der Kausalitätsbedingung (1.8.3). Wählt man andere Konturen, die die Singularitäten anders umgehen, erhält man andere Green-Funktionen, die sich von der retardierten um eine Lösung der homogenen Wellengleichung unterscheiden. Bei unserer Vorzeichenkonvention des Exponenten in Fourier-Transformationen erhält man retardierte Lösungen der entsprechenden Wellengleichungen, wenn die Funktionen bzgl. k^0 in der oberen Halbebene analytisch sind. Man kann daher auch statt der Umgehung der Singularitäten mit den kleinen Halbkreisen die Singularitäten infinitesimal in die untere Halbebene verschieben. In unserem Fall wäre also $\tilde{G}_{\text{ret}}(k) = 1/[(k^0 + i0^+)^2 - \vec{k}^2]$ zu schreiben.

Unter Berücksichtigung, daß die Integrationskontur für $x^0 > 0$ im mathematisch negativen Sinne durchlaufen wird, erhalten wir mit dem Residuensatz also

$$G_{\text{ret}}(x) = \Theta(x^0) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\sin(Kx^0)}{K} \exp(+i\vec{k} \cdot \vec{x}), \quad (1.8.22)$$

und dies stimmt mit (1.8.6) mit (1.8.11) überein.

Als letztes müssen wir überprüfen, ob die nun gefundene Lösung (1.8.18) auch die Lorenz-Eichbedingung $\partial_\mu A_{\text{ret}}^\mu = 0$ erfüllt, denn unsere Lösung garantiert bisher nur, daß (1.1.28) erfüllt ist. Die Potentiale liefern aber nur dann gültige Lösungen der vier Maxwell-Gleichungen (1.1.34-1.1.37) in Form der Felder

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} A^0, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.8.23)$$

wenn die Lorenz-Eichbedingung erfüllt ist. Um dies zu zeigen, verwenden wir am einfachsten (1.8.15). Of-

fenbar gilt

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu A_{\text{ret}}^\mu &= \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' j^\mu(x') \partial_\mu \frac{\delta(x^0 - x'^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
 &= -\frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' j^\mu(x') \partial'_\mu \frac{\delta(x^0 - x'^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
 &= \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' \partial'_\mu j^\mu(x') \frac{\delta(x^0 - x'^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.
 \end{aligned} \tag{1.8.24}$$

Im letzten Schritt haben wir partiell integriert. Nun ist die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ eine notwendige Integrabilitätsbedingung für die Maxwell-Gleichung, und (1.8.24) zeigt, daß die retardierten Potentiale genau dann gemäß (1.8.23) die vier Maxwell-Gleichungen zu vorgegebenen Quellen ρ und \vec{j} lösen, wenn diese Kontinuitätsgleichung erfüllt ist, und das war zu zeigen.

Wir bemerken noch, daß unsere Argumentation, die retardierten Lösungen für die Potentiale (bzw. das Vierer-Potential) auszuwählen, nicht gänzlich zwingend ist, denn die Potentiale sind keine beobachtbaren Feldgrößen. Sie sind nur bis auf eine Eichtransformation durch die physikalischen Felder \vec{E} und \vec{B} (bzw. dazu äquivalent in relativistisch kovarianter Weise als antisymmetrischer Faraday-Tensor geschrieben $F_{\mu\nu}$) bestimmt. Es ist jedoch auch klar, daß unsere retardierten Potentiale automatisch auch retardierte physikalische Felder liefern, wie wir im nächsten Abschnitt explizit nachrechnen wollen.

1.8.2 Das retardierte elektromagnetische Feld

Zur Berechnung des elektromagnetischen Feldes (\vec{E}, \vec{B}) aus den nunmehr gefundenen retardierten Potentialen in Lorenz-Eichung mit Hilfe von (1.8.23) bietet es sich wieder an, zunächst mit Hilfe der δ -Distribution (1.8.18) auf ein vierdimensionales Integral umzuschreiben:

$$A_{\text{ret}}^\mu(x) = \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}} dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \delta(t' - t + R/c) \frac{j^\mu(x')}{R} \quad \text{mit} \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad R = |\vec{R}|. \tag{1.8.25}$$

Gemäß (1.8.23) benötigen wir die folgenden Ableitungen

$$\begin{aligned}
 \partial_t \vec{A}(x) &= \int_{\mathbb{R}} dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \partial_t \delta(t' - t + R/c) \frac{j^\mu(x')}{4\pi c R} \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \partial_{t'} \delta(t' - t + R/c) \frac{j^\mu(x')}{4\pi c R} \\
 &= + \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \left[\frac{j^\mu(x')}{4\pi c R} \right]_{t'=t_{\text{ret}}} \quad \text{mit} \quad t_{\text{ret}} = t - \frac{R}{c}.
 \end{aligned} \tag{1.8.26}$$

Weiter folgt wegen $\vec{\nabla}_{\vec{x}} R = \vec{R}/R$ und der Kettenregel

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} A^0(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \left[\partial'_t \delta(t' - t + R/c) \frac{\vec{R}}{cR^2} - \delta(t' - t + R/c) \frac{\vec{R}}{R^3} \right] \rho(x') \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \left[\frac{\vec{R}}{cR^2} \dot{\rho}(x') + \frac{\vec{R}}{R^3} \rho(x') \right]_{t'=t_{\text{ret}}}.
 \end{aligned} \tag{1.8.27}$$

Damit folgt

$$\vec{E}(x) = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} A^0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \left[\frac{\vec{R}}{R^3} \rho(x') + \frac{\vec{R}}{cR^2} \dot{\rho}(x') - \frac{\dot{\vec{j}}(x')}{c^2 R} \right]_{t'=t_{\text{ret}}}. \tag{1.8.28}$$

Genauso ergibt sich

$$\vec{B}(x) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(x) = \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \left[\vec{j}(x') \times \frac{\vec{R}}{R^3} + \dot{\vec{j}}(x') \times \frac{\vec{R}}{cR^2} \right]_{t'=t_{\text{ret}}} . \quad (1.8.29)$$

Die retardierten Felder gemäß (1.8.28) und (1.8.29) werden oft als **Jefimenko-Gleichungen** bezeichnet, obwohl sie für harmonisch zeitabhängige Felder bereits spätestens 1912 von **Schott** angegeben wurden [Jef66, Sch12] (zitiert nach [Zan12]).

Wir bemerken, daß wir mit (1.8.28) und (1.8.29) tatsächlich eine Lösung aller vier Maxwell-Gleichungen erreicht haben. Dies ergibt sich direkt aus unserer Herleitung, deren wesentliche Argumentationsschritte die folgenden sind: Wir faßten zuerst die homogenen Maxwell-Gleichungen (1.1.36) und (1.1.37) als Nebenbedingungen zur Lösung der inhomogenen Gleichungen (1.1.34) und (1.1.35) auf, die wir durch Einführung des skalaren und eines Vektorpotentials (bzw. in relativistischer Sprache des Vierervektorpotentials) identisch erfüllen können. Die sechs Feldkomponenten \vec{E} und \vec{B} werden dadurch auf die vier Komponenten des Viererpotentials reduziert und sind daraus gemäß (1.8.23) gegeben. Dabei hat sich gezeigt, daß umgekehrt die physikalischen Felder \vec{E} und \vec{B} das Viererpotential nicht eindeutig bestimmen sondern nur bis auf eine **Eichtransformation** (1.2.14) festliegt. Dies ermöglichte uns die Einführung einer Zwangsbedingung für das Viererpotential, die diese Freiheit der „Eichung“ ausnützt. Hier erwies sich die **Lorenz-Eichbedingung** (1.2.17) als besonders bequem, weil sie dann auf eine Entkopplung der vier Komponenten des Potentials führt und damit schließlich zur einfachen Wellengleichung (1.2.28), die wir schließlich in diesem Abschnitt mit Hilfe der **retardierten Green-Funktion** gelöst haben. Wir haben dann gezeigt, daß aufgrund der als Konsistenzbedingung für die Gültigkeit der beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen (1.1.34) und (1.1.35) zu fordernden **Kontinuitätsgleichung** (1.1.40) diese Lösungen die Lorenz-Eichbedingung erfüllen. Folglich sind schließlich auch die vier Maxwell-Gleichungen für die Felder erfüllt: Die homogenen Maxwell-Gleichungen werden identisch für jedes Viererpotentialfeld erfüllt, wenn die Feldkomponenten daraus durch (1.8.23) berechnet werden. Die beiden inhomogenen Gleichungen folgen schließlich durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke für \vec{E} und \vec{B} und die Ausnutzung der als erfüllt bewiesenen Lorenz-Eichbedingung.

Die Schott-Jefimenko-Gleichungen (1.8.28) und (1.8.29) zeigen schließlich, daß das elektromagnetische Feld kausal ausschließlich mit den Ladungs- und Stromverteilungen verknüpft ist, während die zuweilen behauptete Generierung einzelner Feldkomponenten aus anderen Feldkomponenten (z.B. die Interpretation des Faradayschen Induktionsgesetzes im Sinne einer Erzeugung eines elektrischen Wirbelfeldes aufgrund eines zeitlich veränderlichen Magnetfeldes) nicht im Sinne einer kausalen Verknüpfung behauptet werden kann.

1.8.3 Das Anfangswertproblem

Die eben gefundene retardierte Lösung für das Viererpotential in Lorenz-Eichung 1.8.18 bzw. für das elektromagnetische Feld (1.8.28) und (1.8.29) ist nur eine **partikuläre Lösung** der entsprechenden inhomogenen Wellengleichungen. Aus Abschnitt D.2 wissen wir, daß das Viererpotential bei vorgegebenen Anfangsbedingungen

$$A^\mu(0, \vec{x}) = a^\mu(\vec{x}), \quad \partial_0 A^\mu(0, \vec{x}) = b^\mu(\vec{x}) \quad (1.8.30)$$

eindeutig lösbar ist, und diese Lösung durch (D.2.11) gegeben ist.

Allerdings ist wegen der Eichabhängigkeit des Vektorpotentials eine Vorgabe von Anfangsbedingungen problematisch. Vielmehr erwarten wir, daß eine Vorgabe der Anfangsbedingungen für das elektromagnetische Feld ausreichen sollte. Dies ist in der Tat der Fall. Geben wir also

$$\vec{E}(0, \vec{x}) = \vec{E}_0(\vec{x}), \quad \vec{B}(0, \vec{x}) = \vec{B}_0(\vec{x}) \quad (1.8.31)$$

vor. Wir suchen dann Lösungen der Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.8.32)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_0 \vec{B} = 0, \quad (1.8.33)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (1.8.34)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_0 \vec{E} = \frac{1}{c} \vec{j} \quad (1.8.35)$$

Demnach folgt aus dem Faradayschen Gesetz (1.8.33)

$$\partial_0 \vec{B}(0, \vec{x}) = -\vec{\nabla} \times \vec{E}(0, \vec{x}) = -\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 \quad (1.8.36)$$

und aus dem Maxwell-Ampéreschen Gesetz (1.8.35)

$$\partial_0 \vec{E}(0, \vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{B}_0(\vec{x}) - \frac{1}{c} \vec{j}(0, \vec{x}). \quad (1.8.37)$$

Es ist klar, daß dabei \vec{E}_0 und \vec{B}_0 mit den übrigen Maxwell-Gleichungen (1.8.32) und (1.8.34) kompatibel sein muß. Die vorgegebenen Funktionen \vec{E}_0 und \vec{B}_0 müssen demnach nur noch die Einschränkungen von erfüllen, d.h. (1.8.32) und (1.8.34)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \rho(0, \vec{x}), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0(\vec{x}) = 0. \quad (1.8.38)$$

Dann können wir (D.2.11) anwenden, denn wir können für die Felder \vec{E} und \vec{B} inhomogene Wellengleichungen herleiten. Bilden wir dazu zuerst (1.8.33) die Rotation zunächst

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \partial_0 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} + \partial_0 \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0. \quad (1.8.39)$$

Leiten wir andererseits (1.8.35) nach x^0 ab, folgt

$$\partial_0 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \partial_0^2 \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_0 \vec{j}. \quad (1.8.40)$$

Setzen wir dies und in (1.8.40) ein und verwenden noch (1.8.32), folgt

$$\square \vec{E} = -\vec{\nabla} \rho - \frac{1}{c} \partial_0 \vec{j}. \quad (1.8.41)$$

Ebenso können wir durch Bilden der Rotation von (1.8.35) und Ableiten von (1.8.33) nach der Zeit das elektrische Feld eliminieren und erhalten

$$\square \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \vec{j}. \quad (1.8.42)$$

Nun läßt sich das Anfangswertproblem direkt mittels (D.2.11) lösen. Verwendet man die unauintegrierte Form (D.2.8), kann man durch geeignete partielle Integrationen leicht zeigen, daß der erste Term wieder zu den Jefimenko-Gleichungen (1.7.5) führt, wobei die Zeitintegration aber nur über das Intervall $[0, t + 0^+]$ zu nehmen ist. Dies liefert die Lösung für die Maxwell-Gleichungen mit Quellen und homogenen Randbedingungen $\vec{E}_1(0, \vec{x}) = \vec{B}_1(0, \vec{x}) = 0$ (d.h. das „Einschaltproblem“, wo Ladungs- und Stromverteilungen zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet werden und vorher noch kein elektromagnetisches Feld vorhanden war). Die Terme in (D.2.8) bzw. (D.2.11), die die Anfangsbedingungen beinhalten, liefern hingegen Lösungen der homogenen Wellengleichung mit $\vec{E}(0, \vec{x}) = \vec{E}_0(\vec{x})$ und $\vec{B}(0, \vec{x}) = \vec{B}_0(\vec{x})$ und den durch (1.8.36) und (1.8.37) angegebenen Anfangswerten für $\partial_0 \vec{E}(0, \vec{x})$ und $\partial_0 \vec{B}(0, \vec{x})$.

Vielfach einfacher ist es allerdings, zunächst das Viererpotential zu berechnen. Dabei gilt es, zunächst die entsprechenden Anfangsbedingungen festzulegen. Dabei ist zu beachten, daß die Lorenz-Eichbedingung $\partial_\mu A^\mu =$

1.8. Felder zeitabhängiger Ladungs- und Stromverteilungen

0 erfüllt sein muß. Es ist auch hier klar, daß wir die Lösung in einen Anteil mit Quellen und homogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} A_1^\mu(x) &= \int_0^{x_0+i0^+} dx'^0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' G_{\text{ret}}(x-x') \frac{j^\mu(x')}{c} \\ &= \int_{|\vec{x}'-\vec{x}| \leq x^0} d^3\vec{x}' \frac{j^\mu(x^0-|\vec{x}'-\vec{x}|, \vec{x}')}{4\pi c |\vec{x}'-\vec{x}|} \end{aligned} \quad (1.8.43)$$

und einen homogenen Anteil, der die Anfangsbedingungen berücksichtigt, aufteilen können. Wir bemerken, daß (1.8.43), wie in (1.8.24) gezeigt, die Lorenz-Eichbedingung erfüllt, d.h. wir suchen als zweiten Anteil des Viererpotentials A_2^μ , das

$$\square A_2^\mu = 0 \quad (1.8.44)$$

sowie die Anfangsbedingungen für \vec{E} und \vec{B} erfüllt. Da wir für $A^\mu = A_1^\mu + A_2^\mu$ die Lorenz-Eichbedingung fordern und da A_1^μ diese erfüllt, muß auch $\partial_\mu A_2^\mu = 0$ gelten. Nun legt aber diese Eichbedingung die Potentiale nur teilweise fest, ist erfüllt nämlich A_2^μ die Lorenz-bedingung können wir immer noch ein Gradientenfeld eines Skalarfelds addieren, das selbst die homogene Wellengleichung erfüllt. Für den Fall des quellenfreien Feldes (1.8.44) können wir daher als Zusatzforderung

$$A_2^0 = 0 \quad (1.8.45)$$

verlangen, denn wenn A_2^μ die homogene Wellengleichung (1.8.44) erfüllt, können wir χ so wählen, daß

$$A_2^0 = A_2^0 - \partial^0 \chi = 0 \quad (1.8.46)$$

gilt, z.B.

$$\chi(x) = \int_0^{x^0} dx'^0 A_2^0(x'^0, \vec{x}) + \tilde{\chi}(\vec{x}), \quad (1.8.47)$$

wobei $\tilde{\chi}$ eine beliebige Funktion von \vec{x} ist, denn es gilt dann

$$\begin{aligned} \square \chi(x) &= \partial_0 A_2^0(x) + \int_0^{x^0} dx'^0 \Delta A_2^0(x'^0, \vec{x}) + \Delta \tilde{\chi}(\vec{x}) \\ &= \partial_0 A_2^0(x) + \int_0^{x^0} dx'^0 \partial_0'^2 A_2^0(x'^0, \vec{x}) + \Delta \tilde{\chi}(\vec{x}) \\ &= \partial_0 A_2^0(0, \vec{x}) + \Delta \tilde{\chi}(\vec{x}), \end{aligned} \quad (1.8.48)$$

und wir können offenbar

$$\tilde{\chi}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \frac{\partial_0 A_2^0(0, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (1.8.49)$$

setzen, so daß in der Tat

$$\square \chi(x) = 0 \quad (1.8.50)$$

gilt. Wir dürfen also o.b.d.A. annehmen, daß (1.8.45) erfüllt ist. Da zugleich auch die Lorenz-Eichbedingung weiterhin gilt, folgt

$$A_2^0 = 0, \quad \partial_\mu A_2^\mu = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_2 = 0. \quad (1.8.51)$$

Für den entsprechenden quellenfreien Anteil des elektromagnetischen Feldes gilt also

$$\vec{E}_2 = -\partial_0 \vec{A}_2, \quad \vec{B}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_2. \quad (1.8.52)$$

Daraus lassen sich nun unter der Vorgabe der Anfangsbedingungen

$$\vec{E}_2(0, \vec{x}) = \vec{E}_0(\vec{x}), \vec{B}_2(0, \vec{x}) = \vec{B}_0(\vec{x}) \quad (1.8.53)$$

die Anfangsbedingungen für \vec{A}_2 gewinnen. Offenbar gilt

$$\partial_0 A_2(0, \vec{x}) = -\vec{E}_2(0, \vec{x}) = -\vec{E}_0(\vec{x}). \quad (1.8.54)$$

Bilden wir die Rotation von (1.8.52) folgt zusammen mit der Nebenbedingung (1.8.51)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B}_2(0, \vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{B}_0(\vec{x}) \\ &= \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}_2(0, \vec{x})] \\ &= \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_2(0, \vec{x})] - \Delta \vec{A}_2(0, \vec{x}) \\ &= -\Delta \vec{A}_2(0, \vec{x}), \end{aligned} \quad (1.8.55)$$

und wie wir von der Magnetostatik wissen, wird diese Gleichung durch

$$\vec{A}_2(0, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{B}_0(\vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (1.8.56)$$

erfüllt, und wegen $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) = 0$ gilt auch die Nebenbedingung (1.8.51). Damit sind aber die benötigten Anfangsbedingungen für \vec{A}_2 bestimmt, und wir können (D.2.11) für ein quellenfreies Feld also $J = 0$ verwenden:

$$\vec{A}_2(x) = \int_{S_1} d^2\Omega_R \frac{1}{4\pi} \left\{ x^0 \partial_0 \vec{A}_2(0, \vec{x} + x^0 \vec{e}_R) + \partial_0 [x^0 \vec{A}_2(0, \vec{x} + x^0 \vec{e}_R)] \right\}. \quad (1.8.57)$$

Damit ist das Anfangswertproblem vollständig gelöst.

1.8.4 Die Multipolmomente des elektromagnetischen Feldes

Nun sind wir auch in der Lage, die Multipolmomente des allgemeinen elektromagnetischen Feldes aus den vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen zu bestimmen (vgl. Abschnitt 1.7.6). Wir gehen also vom Ansatz (1.7.118) aus und nehmen an, daß die Ladungs- und Stromverteilung auf einen Bereich $r < R$ beschränkt ist, d.h. es sei $\rho(t, \vec{x}) = \vec{j}(t, \vec{x}) = 0$ für $r = |\vec{x}| \geq R$.

Die Maxwell-Gleichungen für harmonisch zeitabhängige Felder mit der Kreisfrequenz $\omega = ck$ lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (1.8.58)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} + ik\vec{E} = \frac{1}{c} \vec{j}, \quad (1.8.59)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.8.60)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} - ik\vec{B} = 0. \quad (1.8.61)$$

Da wir nur an den Feldern in der quellenfreien Region $r > R$ interessiert sind, genügt es, zunächst \vec{B} zu berechnen. Dann ist wegen (1.8.59) und $\vec{j}(t, \vec{x}) = 0$ für $r > R$ das elektrische Feld durch

$$\vec{E} = \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad r > R \quad (1.8.62)$$

bestimmt.

Wir können uns also zunächst vollständig auf die Berechnung des Magnetfeldes konzentrieren, und wegen (1.8.60) gilt die Darstellung mittels der Debye-Potentiale (1.7.118) auch bei Anwesenheit von Quellen:

$$\vec{B} = \vec{x} \times \vec{\nabla} \psi + \vec{\nabla} \times (\vec{x} \times \vec{\nabla} \chi). \quad (1.8.63)$$

Bilden wir weiter die Rotation von (1.8.59), folgt mit (1.8.61) die inhomogene Wellengleichung

$$-(\Delta + k^2)\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{\nabla} \times \vec{j}. \quad (1.8.64)$$

Weiter gelten für die Debye-Potentiale die Gleichungen (1.7.99) für $\vec{A} = \vec{B}$, d.h.

$$\chi = -\vec{L}^{-2}\vec{x} \cdot \vec{B}, \quad \psi = -\vec{L}^{-2}\vec{x} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \quad (1.8.65)$$

Wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ gilt weiter $\Delta(\vec{x} \cdot \vec{B}) = \vec{x} \cdot \Delta\vec{B}$. Außerdem ist $(\Delta + k^2)\vec{x} \times \vec{\nabla} = i(\Delta + k^2)\vec{L} = i\vec{L}(\Delta + k^2)$ und damit

$$-(\Delta + k^2)\chi = +\vec{L}^{-2}(\Delta + k^2)(\vec{x} \cdot \vec{B}) = -\frac{1}{c}\vec{L}^{-2}\vec{x} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{j}), \quad (1.8.66)$$

$$-(\Delta + k^2)\psi = (\Delta + k^2)\vec{L}^{-2}(\vec{x} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{L}^{-2}\vec{x} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{j})]. \quad (1.8.67)$$

Dabei haben wir jeweils im letzten Schritt (1.8.65) angewandt. Die Multipolentwicklung für die Debye-Potentiale ergibt sich also durch Anwendung der entsprechenden Darstellung (1.7.56) der Green-Funktion des Helmholtz-Operators. Da $\vec{\nabla} \times \vec{j}$ bzw. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{j})$ als Rotationen von Vektorfeldern quellenfrei sind, beginnt die Entwicklung der Ausdrücke $\vec{x} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{j})$ und $\vec{x} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{j})]$ stets mit $l = 1$, so daß \vec{L}^{-2} tatsächlich angewendet werden darf.

Wir betrachten zunächst (1.8.66) und finden nach einiger Rechnung

$$\chi(\vec{x}) = -\frac{ik}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{l(l+1)} h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \int_{K_R} d^3x' j_l(kr') Y_{lm}(\vartheta', \varphi') \vec{x}' \cdot [\vec{\nabla}' \times \vec{j}(\vec{x}')]. \quad (1.8.68)$$

Wir definieren nun die **magnetischen Multipolmomente** mit einer Normierungskonvention derart, daß im entsprechenden Limes wieder die statischen Multipolmomente entstehen, wie wir gleich nachweisen werden:

$$M_{lm} = \frac{(2l+1)!}{2^l(l+1)!k^l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_{K_R} d^3x' \vec{x}' \cdot [\vec{\nabla}' \times \vec{j}(\vec{x}')] j_l(kr') Y_{lm}(\vartheta', \varphi'). \quad (1.8.69)$$

Setzt man dies in (1.8.68) ein, ergibt sich

$$\chi(\vec{x}) = -\frac{ik}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{2^l(l-1)!k^l}{(2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} M_{lm} h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1.8.70)$$

Eine statische Näherung ergibt nur Sinn, falls $kR < kr \ll 1$ erfüllbar ist. In diesem Fall können wir die Entwicklung für die Hankel-Funktion in (1.8.70) für kleine Argumente (vgl. wieder [CH10])

$$h_l^{(1)}(kr) \underset{kr \rightarrow 0}{\cong} \frac{-i(2l)!}{2^l l! (kr)^{l+1}} \quad (1.8.71)$$

verwenden. Setzen wir dies in (1.8.70) ein, folgt nach einigen Vereinfachungen

$$\chi(\vec{x}) \underset{kr \ll 1}{\cong} -\frac{1}{4\pi c} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{M_{lm}}{l} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}}, \quad (1.8.72)$$

was in der Tat mit dem statischen Resultat (1.6.52) übereinstimmt.

Es ist zu erwarten, daß im gegebenen Fall der Ausdruck (1.8.69) ebenfalls näherungsweise mit dem statischen Ergebnis (1.6.53) übereinstimmt. Wegen $kR \ll 1$ können wir nämlich in (1.8.69) für $j_l(kr)$ ebenfalls die asymptotische Näherung für kleine Argumente

$$j_l(kr) \underset{kr \rightarrow 0}{\cong} = \frac{2^l l! (kr)^l}{(2l+1)!} \quad (1.8.73)$$

verwenden. Durch Einsetzen in (1.8.69) und Vereinfachung des entstehenden Ausdrucks finden wir

$$\frac{M_{lm}}{l} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_{K_R} d^3 \vec{x}' r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \mathbf{L}^{-2} \vec{x}' \cdot [\vec{\nabla}' \times \vec{j}(\vec{x}')], \quad (1.8.74)$$

also tatsächlich (1.6.53).

Aus (1.8.67) ergibt die analoge Argumentation, daß

$$\psi(\vec{x}) = -\frac{ik}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{l(l+1)} h_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \int_{K_R} d^3 x' j_l(kr') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \vec{x}' \cdot [\vec{\nabla}' \times (\vec{\nabla}' \times \vec{j}(\vec{x}'))]. \quad (1.8.75)$$

Auch hier wählen wir wieder eine auf den ersten Blick umständliche Normierung der entsprechenden Multipolmomente:

$$Q_{lm} = \frac{i(2l+1)!}{c 2^l (l+1)! k^{l+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_{K_R} d^3 r' j_l(kr') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \vec{x}' \cdot [\vec{\nabla}' \times (\vec{\nabla}' \times \vec{j}(\vec{x}'))]. \quad (1.8.76)$$

Dann wird (1.8.75) zu

$$\psi(\vec{x}) = -\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{2^l k^{l+2} (l-1)!}{(2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Q_{lm} h_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1.8.77)$$

Falls die „Nahfeldnäherung“ anwendbar ist, d.h. falls $kR < kr \ll 1$ ist, können wir wieder die asymptotische Form (1.8.71) der Hankel-Funktion in (1.8.77) einsetzen. Dann ergibt sich nach einigen Vereinfachungen des Vorfaktors

$$\psi(\vec{x}) \underset{kr \ll 1}{\cong} = \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Q_{lm}}{l} \frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}. \quad (1.8.78)$$

Nun ist im magnetostatischen Fall $\psi = 0$ (was ja schon aus (1.8.78) hervorgeht, wenn man weiß, daß die $Q_{lm} \neq 0$ für $k \rightarrow 0$ werden, wie wir gleich noch sehen werden), d.h. um die Analogie zum statischen Limes zu finden, müssen wir den aus (1.8.78) herrührenden Teil des elektrischen Feldes betrachten.

Zunächst ist wegen (1.8.63) allgemein klar, daß den beiden Debye-Potentialen die transversal magnetischen bzw. transversal elektrischen Feldanteile gemäß (1.7.118) entsprechen:

$$\vec{B}_{\text{TM}} = \vec{x} \times \vec{\nabla} \psi, \quad \vec{B}_{\text{TE}} = \vec{\nabla} \times (\vec{x} \times \vec{\nabla} \chi). \quad (1.8.79)$$

Aus (1.8.62) folgt für die entsprechende Zerlegung des elektrischen Feldes für $r > R$

$$\vec{E}_{\text{TM}} = \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times (\vec{x} \times \vec{\nabla} \psi), \quad (1.8.80)$$

$$\vec{E}_{\text{TE}} = -\frac{i}{k} \Delta (\vec{x} \times \vec{\nabla} \chi) = +ik (\vec{x} \times \vec{\nabla} \chi), \quad r > R. \quad (1.8.81)$$

1.8. Felder zeitabhängiger Ladungs- und Stromverteilungen

Dabei haben wir im letzten Schritt von (1.8.67) und $\vec{j} = 0$ für $r \geq R$ Gebrauch gemacht. Setzen wir nun in (1.8.81) die Nahfeldnäherung (1.8.78) für ψ ein, folgt

$$\vec{E}_{\text{TM}} \underset{kr \ll 1}{\cong} -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Q_{lm}}{l} \vec{x} \times \vec{\nabla} \frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}. \quad (1.8.82)$$

Dies ist exakt die zum magnetostatischen Ausdruck (1.6.57) und (1.6.59) analoge Gleichung. Dieselbe Rechnung wie dort führt dann darauf, daß (1.8.82) ein Gradientenfeld ist mit

$$\vec{E}_{\text{TM}} \underset{kr \ll 1}{\cong} -\vec{\nabla} \Phi_E, \quad \Phi_E \underset{kr \ll 1}{\cong} \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Q_{lm} \frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}. \quad (1.8.83)$$

Dies entspricht in der Tat exakt der elektrostatischen Multipolentwicklung (1.5.79). Der einzige wichtige Unterschied ist, daß der Term $l = 0$ verschwindet. In der Tat gibt es den radialsymmetrischen Term $l = 0$ nur für statische Felder, also $k = 0$, d.h. verschwindet die Gesamtladung nicht, $Q \neq 0$, so bewirkt diese lediglich ein statisches Coulombfeld $\vec{E} = Q\vec{e}_r/(4\pi r^2)$. Dieses Feld ist ggf. zu (1.8.82) zu addieren.

Um zu sehen, daß für $kR \ll 1$ die Q_{lm} näherungsweise den elektrostatischen Multipolmomenten (1.5.78) entsprechen, müssen wir (1.8.76) zum einen mit der asymptotischen Formel (1.8.73) vereinfachen und zum anderen den Integranden mit Hilfe der Ladungsverteilung ρ ausdrücken. Für letzteres bemerken wir, daß die Kontinuitätsgleichung für harmonisch zeitabhängige Felder durch

$$-ick\rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = ick\rho \quad (1.8.84)$$

gegeben ist. Dazu betrachten wir den in (1.8.76) auftretenden Ausdruck

$$\vec{x} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{j})] = \vec{x} \cdot \vec{\nabla} (ick\rho) - \vec{x} \cdot \Delta \vec{j} = ickr \partial_r \rho - \vec{x} \cdot \Delta \vec{j}. \quad (1.8.85)$$

Nun ist

$$\Delta(\vec{x} \cdot \vec{j}) = 2ick\rho + \vec{x} \cdot \Delta \vec{j}, \quad (1.8.86)$$

und folglich ergibt sich für (1.8.85) schließlich

$$\vec{x} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{j})] = ickr \partial_r \rho + 2ick\rho - \Delta(\vec{x} \cdot \vec{j}) = \frac{ick}{r} \partial_r (r^2 \rho) - \Delta(\vec{x} \cdot \vec{j}). \quad (1.8.87)$$

Setzt man dies in (1.8.76) ein, kann man nach Umschreiben des Volumenintegrals in Kugelkoordinaten im ersten Term partiell bzgl. r integrieren und im zweiten Term ebenfalls durch partielle Integration den Laplaceoperator auf die Bessel- bzw. Kugelflächenfunktion überwälzen. Wegen $\Delta'[j_l(kr')Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi')] = -k^2 j_l(kr')Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi')$ folgt dann

$$Q_{lm} = \frac{i(2l+1)!}{c2^l(l+1)!k^{l+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_{K_R} d^3 r' [ick\rho(\vec{x}') \partial_{r'} [r' j_l(kr')] + k^2 j_l(kr') \vec{x}' \cdot \vec{j}(\vec{x}')] Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'). \quad (1.8.88)$$

Verwendet man hierin wieder die führende Näherung für $j_l(kr')$ für $kr' < kR \ll 1$, ergibt sich in der Tat für den ersten Term der elektrostatische Multipolkoeffizient, und der zweite Term ist um $\mathcal{O}(kR)$ kleiner, d.h. wir haben

$$Q_{lm} \underset{kR \ll 1}{\cong} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_{K_R} d^3 r' r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \rho(\vec{x}'), \quad (1.8.89)$$

was mit (1.5.78) übereinstimmt.

Wenden wir uns nun den Multipolentwicklungen der Felder (1.8.79-1.8.81) zu. Gemäß (1.8.63) benötigen wir in für die Ableitungen der Debye-Potentiale nach einigen Umformungen die Formeln

$$\vec{x} \times \vec{\nabla} [h_l^{(1)}(kr)Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] = h_l^{(1)}(kr)\vec{\Phi}_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.8.90)$$

$$\vec{\nabla} \times \left\{ \vec{x} \times \vec{\nabla} [h_l^{(1)}(kr)Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] \right\} = -\frac{1}{r} \left[\partial_r [r h_l^{(1)}(kr)] \vec{\Psi}_{lm}(\vartheta, \varphi) + l(l+1) h_l^{(1)}(kr) \vec{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) \right]. \quad (1.8.91)$$

Dabei haben wir die Definitionen (1.6.30-1.6.32) für die vektoriellen Kugelflächenfunktionen verwendet. Wenden wir diese Formeln auf (1.8.79-1.8.81) erhalten wir für die transversal magnetischen bzw. transversal elektrischen Feldanteile für $r > R$

$$\vec{B}_{\text{TM}}(\vec{x}) = -\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{2^l(l-1)!k^{l+2}}{(2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Q_{lm} h_l^{(1)}(kr) \vec{\Phi}_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.8.92)$$

$$\vec{E}_{\text{TM}}(\vec{x}) = i \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{2^l(l-1)!k^{l+1}}{(2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Q_{lm} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r h_l^{(1)}(kr)] \vec{\Psi}_{lm}(\vartheta, \varphi) + \frac{l(l+1)}{r} h_l^{(1)}(kr) \vec{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) \right\}, \quad (1.8.93)$$

$$\vec{B}_{\text{TE}}(\vec{x}) = i \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{2^l(l-1)!k^{l+1}}{c(2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} M_{lm} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r h_l^{(1)}(kr)] \vec{\Psi}_{lm}(\vartheta, \varphi) + \frac{l(l+1)}{r} h_l^{(1)}(kr) \vec{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) \right\}, \quad (1.8.94)$$

$$\vec{E}_{\text{TE}}(\vec{x}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{2^l(l-1)!k^{l+2}}{c(2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} M_{lm} h_l^{(1)}(kr) \vec{\Phi}_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1.8.95)$$

Wir können nun, unabhängig von der Ausdehnung der Quelle immer die Fernfeldnäherung $r \gg R$ mit $kr \gg 1$ betrachten. Dann kann man die asymptotische Entwicklung der sphärischen Bessel-Funktionen

$$h_l^{(1)}(kr) = \frac{(-i)^{l+1}}{kr} \exp(ikr) + \mathcal{O}(1/r^2) \quad (1.8.96)$$

in (1.8.92-1.8.95) sowie die daraus folgende Formel

$$\frac{1}{r} [r h_l^{(1)}(kr)] = \frac{(-i)^l}{r} \exp(ikr) + \mathcal{O}(1/r^2). \quad (1.8.97)$$

Setzt man dies in (1.8.92-1.8.95) ein und beachtet noch die aus den Definitionen der vektoriellen Kugelflächenfunktionen (1.6.30-1.6.32) folgenden Beziehungen

$$\vec{e}_r \times \vec{\Phi}_{lm}(\vartheta, \varphi) = -\vec{\Psi}_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad \vec{e}_r \times \vec{\Psi}_{lm}(\vartheta, \varphi) = \vec{\Phi}_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.8.98)$$

ergibt sich

$$\vec{E}_{\text{TM}}(\vec{x}) \underset{kr \rightarrow \infty}{\cong} -\frac{\exp(ikr)}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{2^l(-i)^{l+1}(l-1)!k^{l+1}}{(2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Q_{lm} \vec{\Psi}_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.8.99)$$

$$\vec{E}_{\text{TE}}(\vec{x}) \underset{kr \rightarrow \infty}{\cong} -\frac{\exp(ikr)}{cr} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{2^l((l-1)!k^{l+1}(-i)^{l+1})}{(2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} M_{lm} \vec{\Phi}_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.8.100)$$

$$\vec{B}'_{\text{TM}}(\vec{x}) \underset{kr \rightarrow \infty}{\cong} \vec{e}_r \times \vec{E}_{\text{TM}}(\vec{x}), \quad \vec{B}'_{\text{TE}}(\vec{x}) \underset{kr \rightarrow \infty}{\cong} \vec{e}_r \times \vec{E}'_{\text{TE}}(\vec{x}). \quad (1.8.101)$$

1.8.5 Die Potentiale in Coulomb-Eichung

1.9 Klassische geladene Teilchen

Mit diesem Abschnitt schließen wir die Betrachtungen der mikroskopischen Elektrodynamik ab, indem wir das schwierige Problem einer vollständig selbstkonsistenten Lösung der Bewegung geladener klassischer Punktteilchen und der durch sie erzeugten elektromagnetischen Felder studieren.

1.9.1 Liénard-Wiechert-Potentiale

1.9.2 Synchrotronstrahlung

1.9.3 Strahlungsrückwirkung

1. Das elektromagnetische Feld im Vakuum

Kapitel 2

Elektromagnetismus in kontinuierlichen Medien

2.1 Elektrische Leitfähigkeit

2.1.1 Randwertaufgaben der Elektrostatik (leitende Medien)

2.2 Elektrische Polarisierbarkeit

2.2.1 Randwertaufgaben der Elektrostatik (Dielektrika)

2.3 Magnetische Polarisierbarkeit

2.4 Phänomenologische Theorie der Supraleitung

2.5 Wellenleiter

2.6 Hohlraumresonatoren

2. Elektromagnetismus in kontinuierlichen Medien

Kapitel 3

Optik

- 3.1 Streutheorie und Beugung
- 3.2 Klassische Dispersionstheorie
- 3.3 Brechungs- und Reflexionsgesetz
- 3.4 Kristalloptik
- 3.5 Strahlenoptik

3. Optik

Anhang A

Einheitensysteme in der Elektrodynamik

Die Frage nach der Wahl des Einheitensystems in der Elektrodynamik ist in didaktischer Hinsicht schwierig zu beantworten. Auf der einen Seite sollte das Internationale Einheitensystem (SI-Einheiten) verwendet werden, da diese in der Experimentalphysik und Technik eingesetzt werden und den internationalen gesetzlichen Richtlinien entsprechen. Andererseits erschweren die SI-Einheiten das Verständnis der begrifflichen Basis des elektromagnetischen Feldes. Daher habe ich mich in diesem Manuskript für das **rationalisierte Gaußsche Maßsystem**, also **Heaviside-Lorentz-Einheiten** entschieden, da sie die einfachste und durchsichtigste Wahl darstellen. Sie sind vornehmlich in der theoretischen Hochenergiephysik verbreitet. Zudem ist die Umrechnung zwischen SI- und Heaviside-Lorentz-Einheiten relativ unkompliziert.

A.1 SI-Einheiten

Heaviside-Lorentz- und SI-Einheiten stimmen überein soweit es die drei Basiseinheiten der Mechanik, also Zeit, Länge und Masse betrifft. Die Zeiteinheit ist die Sekunde und über die Frequenz der elektromagnetischen Strahlung von einem Hyperfeinübergang in Cäsium definiert und gehört vermöge von „Atomuhren“ zu den am genauesten darstellbaren Einheiten. Die Längeneinheit ist der Meter und durch Festlegung der Grenzggeschwindigkeit der Relativitätstheorie, die empirisch äußerst präzise mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit übereinstimmt, festgelegt, und zwar ist

$$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s.} \quad (\text{A.1.1})$$

Dieser Wert ist aufgrund der Definition der Längeneinheit exakt. Die Basiseinheit der Masse ist das Kilogramm, welches noch immer durch das in Paris aufbewahrte „Urkilogramm“, einen Zylinder aus einer Platin-Iridium-Legierung, realisiert ist.

In SI-Einheiten wird für die Elektrodynamik als vierte Basiseinheit das Ampère als Einheit der elektrischen Stromstärke eingeführt, und zwar über eine recht abstrakte Definition, die allerdings theoretisch sehr einfach verständlich ist, und zwar betrachtet man zwei parallele sehr lange und sehr dünne Drähte im Abstand von 1 m. Durch diese fließt definitionsgemäß ein Strom von 1 A, wenn die zwischen ihnen wirkende Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ N beträgt.

Betrachten wir dazu das Problem, das Magnetfeld eines unendlich langen geraden von einem Gleichstrom durchflossenen Drahtes, der auf der z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems verläuft, zu berechnen. Da das Problem offensichtlich zylindersymmetrisch ist, verwenden wir Zylinderkoordinaten und erwarten, daß das Magnetfeld die Form

$$\vec{B}(\vec{x}) = B(r)\vec{e}_\varphi \quad (\text{A.1.2})$$

besitzt. Die Stromdichte für diesen Fall lautet

$$\vec{j} = \vec{e}_z I \delta^{(2)}(\vec{x}_\perp). \quad (\text{A.1.3})$$

Da Zylinderkoordinaten entlang der z-Achse singular sind, können wir diese Stromdichte nicht in Zylinderkoordinaten ausdrücken. Nun lautet im SI-Einheiten das Ampéresche Durchflutungsgesetz für den statischen Fall

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (\text{A.1.4})$$

Dabei ist μ_0 eine willkürliche Konstante, die aus der obigen Definition für die Stromeinheit Amp/ere folgt. Für $r \neq 0$ ergibt sich unter Verwendung der Rotation in Zylinderkoordinaten (B.1.23) für den Ansatz (A.1.2)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{e}_z \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rB(r)] = 0, \quad r > 0 \quad (\text{A.1.5})$$

Integration liefert

$$B(r) = \frac{C}{r}, \quad (\text{A.1.6})$$

Integrieren wir (A.1.4) über eine senkrecht zur z-Achse gelegene Kreisscheibe K mit Ursprung auf der z-Achse und verwenden den Gaußschen Satz, erhalten wir mit (A.1.3)

$$\int_{\partial K} d\vec{x} \cdot \vec{B} = 2\pi C = \frac{1}{\mu_0} \int_K d^2\vec{f} \cdot \vec{j} = \mu_0 I. \quad (\text{A.1.7})$$

Daraus ergibt sich

$$\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (\text{A.1.8})$$

Betrachten wir nun einen zweiten vom Strom I' durchflossenen Draht parallel zu dem ersten im Abstand R . Die Kraftdichte aufgrund der Anwesenheit des Magnetfeldes vom ersten Draht ist in SI-Einheiten

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = \vec{e}_z \frac{I'}{r} \delta(r-R) \delta(\varphi) \times \vec{e}_\varphi B(r) = \frac{\mu_0 I' I}{2\pi R^2} \delta(r-R) \delta(\varphi). \quad (\text{A.1.9})$$

Integrieren wir dies über einen den zweiten Draht umschließenden Zylinder der Länge L , erhalten wir die auf das in ihm enthaltene Leiterstück wirkende Kraft zu

$$\vec{F} = -\frac{I' I L}{2\pi \mu_0 R} \vec{e}_r. \quad (\text{A.1.10})$$

Setzen wir nun entsprechend der Definition der Stromeinheit Ampère $I = I' = 1 \text{ A}$ und $R = L = 1 \text{ m}$, so folgt

$$F = |\vec{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{A}^2 \stackrel{!}{=} 2 \cdot 10^{-7} \text{N} \Rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}. \quad (\text{A.1.11})$$

Im SI benötigen wir aus dimensionellen Gründen auch im Gaußschen Gesetz eine weitere Konstante ϵ_0

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (\text{A.1.12})$$

Dabei wird die elektrische Ladung in der Einheit **Coulomb** mit $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$ gemessen. Daß die „Vakuumkonstanten“ μ_0 und ϵ_0 im Ampéreschen Gesetz im Zähler beziehentlich im Gaußschen Gesetz im Nenner zu stehen kommen, ist historisch bedingt. Die **Maxwell-Gleichungen** lauten in SI-Einheiten ausgedrückt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (\text{A.1.13})$$

Dabei enthält der „Verschiebungsstrom“ im Maxwell-Ampère-Gesetz (3. Gleichung) einen aus Dimensionsgründen einen zusätzlichen Faktor $\epsilon_0 \mu_0$. Um Anschluß an die physikalische Bedeutung dieser Größe zu erhalten, betrachten wir das freie elektromagnetische Feld in SI-Einheiten. Setzen wir also $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$

A.2. Umrechnung zwischen Heaviside-Lorentz- und SI-Einheiten

und bilden wir die Rotation der ersten Gleichung erhalten wir unter Verwendung der dritten und vierten Gleichung

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\Delta \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (\text{A.1.14})$$

Vergleichen wir dies mit der Wellengleichung

$$\square \vec{E} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = 0, \quad (\text{A.1.15})$$

erhalten wir die Beziehung

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\text{A}^2}{\text{N}} \simeq 8.854188 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{Nm}^2}. \quad (\text{A.1.16})$$

Für das elektrostatische Coulomb-Feld einer Punktladung Q erhält man aus der Spezialisierung der Maxwell-Gleichungen auf diesen Fall das Potential

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}|}. \quad (\text{A.1.17})$$

Es besitzt die Dimension $\text{Nm}/\text{C} = \text{J}/\text{C} = \text{V}$ (Volt). Die Kraft zwischen zwei Punktladungen ist entsprechend

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (\text{A.1.18})$$

Man erhält folgerichtig die korrekte Dimension Newton für die elektrostatische Coulomb-Kraft und gehen daher nicht weiter darauf ein (siehe z.B. [Jac83]).

A.2 Umrechnung zwischen Heaviside-Lorentz- und SI-Einheiten

Aufgrund der Zurückführung der Definitionen der Einheiten für die elektromagnetischen Größen, ist die Umrechnung von einem Einheitensystem zum anderen leicht möglich. Wir betrachten hier die Umrechnung zwischen Heaviside-Lorentz- (HL) und SI-Einheiten (SI). Größen, die dimensionell nur von den drei mechanischen Basiseinheiten Meter, Kilogramm und Sekunde abhängen, besitzen in beiden Einheitensystemen die gleiche Dimension. Der Hauptunterschied der HL-Einheiten zu den SI-Einheiten besteht darin, daß im HL-System keine spezielle Einheit für die elektrische Ladung bzw. Stromstärke eingeführt wird.

Aus dem Coulomb-Gesetz im SI-System (A.1.18) im Vergleich zum HL-System erhalten wir für den Zusammenhang zwischen den Ladungsgrößen in beiden Systemen

$$\frac{Q_{\text{SI}}^2}{\epsilon_0} = Q_{\text{HL}}^2 \Rightarrow Q_{\text{SI}} = \sqrt{\epsilon_0} Q_{\text{HL}}. \quad (\text{A.2.1})$$

Die Dimension der Ladung im HL-System ist also $m\sqrt{\text{N}}$. Entsprechend gilt für die Umrechnung elektrischer Feldstärken, des skalaren Potentials des elektromagnetischen Feldes sowie Ladungs- und Stromdichten und Strömen

$$\vec{E}_{\text{SI}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \vec{E}_{\text{HL}}, \quad \Phi_{\text{SI}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \Phi_{\text{HL}}, \quad \rho_{\text{SI}} = \sqrt{\epsilon_0} \rho_{\text{HL}}, \quad \vec{j}_{\text{SI}} = \sqrt{\epsilon_0} \vec{j}_{\text{HL}}, \quad I_{\text{SI}} = \sqrt{\epsilon_0} I_{\text{HL}}. \quad (\text{A.2.2})$$

Beim Magnetfeld ist zu beachten, daß das Ampèresche Durchflutungsgesetz für den statischen Fall

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_{\text{HL}} = \frac{1}{c} \vec{j}_{\text{HL}} \quad (\text{A.2.3})$$

lautet und entsprechend für die Kraftdichte einer Stromdichte

$$\vec{f} = \frac{1}{c} \vec{j}_{\text{HL}} \times \vec{B}_{\text{HL}} = \vec{j}_{\text{SI}} \times \vec{B}_{\text{SI}} = \sqrt{\epsilon_0} \vec{j}_{\text{HL}} \times \vec{B}_{\text{SI}}. \quad (\text{A.2.4})$$

Da die Kraftdichte in beiden Einheitensystemen gleich ist, ergibt sich daraus

$$\vec{B}_{\text{SI}} = \frac{1}{\sqrt{c^2 \epsilon_0}} \vec{B}_{\text{HL}} \stackrel{(\text{A.1.16})}{=} \sqrt{\mu_0} \vec{B}_{\text{HL}}. \quad (\text{A.2.5})$$

In vielen Lehrbüchern wird auch das ursprüngliche Gaußsche Maßsystem (G) verwendet, das sich vom HL-System lediglich durch Faktoren 4π bzw. $\sqrt{4\pi}$ unterscheidet. Das Coulomb-Gesetz lautet z.B. in G-Einheiten

$$\vec{F} = \frac{Q_{1\text{G}} Q_{2\text{G}}}{r^2} \Rightarrow Q_{\text{HL}} = \sqrt{4\pi} Q_{\text{G}}. \quad (\text{A.2.6})$$

Entsprechend treten im G-System in den Maxwell-Gleichungen zusätzliche gegenüber denen im HL-System geschriebenen Faktoren 4π auf:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{G}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_{\text{G}}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{\text{G}} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}_{\text{G}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_{\text{G}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{G}}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\text{G}} = 4\pi \rho_{\text{G}}. \quad (\text{A.2.7})$$

In diesem Manuskript verwenden wir allerdings dieses nichtrationalisierte Einheitensystem nicht.

Anhang B

Formelsammlung

Hier fassen wir die wichtigsten Formeln zusammen, die öfter gebraucht werden. Genauere Erklärungen finden sich in [CH10].

B.1 Vektoranalysis im euklidischen \mathbb{R}^3

Hier stellen wir nur einige öfter gebrauchte Formeln zusammen. Eine ausführliche Behandlung der Vektoranalysis findet sich [Hee05, CH10, Hee00, Hee14].

B.1.1 Dreidimensionale Vektoranalysis (kartesische Koordinaten)

Für den euklidischen dreidimensionalen Raum verwenden wir i.a. nur koordinaten oder krummlinige Orthonormalkoordinaten. Dreidimensionale Vektoren werden stets mit einem über das Symbol gesetzten Pfeil gekennzeichnet. Die kartesischen Koordinaten eines Vektors \vec{x} bezeichnen wir mit x_j mit $j \in \{1, 2, 3\}$ oder $j \in \{x, y, z\}$. Über gleichnamige Indizes wird stets summiert (Einsteinsche Summenkonvention im Ricci-Kalkül) und formal nicht zwischen ko- und kontravarianten Komponenten unterschieden, was solange unnötig ist als wir in Orthonormalkoordinaten arbeiten, wo die metrische Fundamentalf orm durch $g_{jk} = \delta_{jk}$ gegeben ist.

Die **Differentialoperatoren** (Gradient, Rotation und Divergenz) mit Hilfe des **Nabla-Symbols** geschrieben. So bezeichnet $\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$ den Gradienten eines Skalarfeldes. In kartesischen Koordinaten gilt

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi = \vec{e}_i \partial_i \Phi. \quad (\text{B.1.1})$$

Rotation und Divergenz eines Vektorfeldes sind durch

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_j A_j \quad (\text{B.1.2})$$

definiert. Oft kommt auch die Richtungsableitung eines Vektorfeldes \vec{A} in Richtung von \vec{B} vor:

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \vec{e}_j B_j \partial_j A_i. \quad (\text{B.1.3})$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln, die man mit Hilfe des Ricci-Kalküls in kartesischen Koordinaten leicht

nachrechnet

$$\vec{\nabla}(\Phi\Psi) = \Psi\vec{\nabla}\Phi + \Phi\vec{\nabla}\Psi, \quad (\text{B.1.4})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}, \quad (\text{B.1.5})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}), \quad (\text{B.1.6})$$

$$\vec{\nabla} \times (\Phi\vec{A}) = \Phi(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \times \vec{\nabla}\Phi, \quad (\text{B.1.7})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (\text{B.1.8})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi\vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\Phi + \Phi\vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (\text{B.1.9})$$

Der **Laplace-Operator** ist durch

$$\Delta\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \partial_i \partial_i \Phi \quad (\text{B.1.10})$$

definiert. In kartesischen Koordinaten gilt für ein Vektorfeld

$$\Delta\vec{A} = \Delta(\vec{e}_i A_i) = \vec{e}_i \Delta A_i, \quad (\text{B.1.11})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}. \quad (\text{B.1.12})$$

B.1.2 Dreidimensionale Vektoranalysis (Kugelkoordinaten)

Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) definieren wir bzgl. kartesischer Koordinaten durch

$$\begin{aligned} \vec{x} &= r[\sin \vartheta (\vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi)] + r \cos \vartheta \vec{e}_3 \\ &= r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \vartheta \in (0, \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi). \end{aligned} \quad (\text{B.1.13})$$

Man beachte, daß die Kugelkoordinaten entlang der 3-Achse ($\vartheta = 0, \pi$ oder $r = 0$) singulär sind. Die orthogonale Koordinatenbasis ist durch

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.14})$$

gegeben. Durch Kugelkoordinaten ausgedrückt lauten die Differentialoperatoren

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad (\text{B.1.15})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta A_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (\text{B.1.16})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \vec{e}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (\sin \vartheta A_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] + \vec{e}_\vartheta \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right] \\ &\quad + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.1.17})$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.18})$$

B.1.3 Dreidimensionale Vektoranalysis (Zylinderkoordinaten)

Zylinderkoordinaten (r, φ, z) definieren wir bzgl. kartesischer Koordinaten durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.1.19})$$

Die Zylinderkoordinaten sind entlang der 3-Achse singularär ($r = 0$). Die orthonormale Koordinatenbasis ist durch

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.20})$$

gegeben. Die Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten lauten

$$\vec{\nabla} \Phi = \text{grad} \Phi = \vec{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{B.1.21})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (\text{B.1.22})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{rot} \vec{A} = \vec{e}_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\varphi \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] + \vec{e}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right], \quad (\text{B.1.23})$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (\text{B.1.24})$$

B.1.4 Der Drehimpulsoperator

Auch in der klassischen Feldtheorie erweisen sich der Impuls- und der Drehimpulsoperator der Quantentheorie

$$\vec{\mathbf{p}} = -i\vec{\nabla}, \quad \vec{\mathbf{L}} = \vec{x} \times \vec{\mathbf{p}} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla} \quad (\text{B.1.25})$$

als äußerst nützlich. Daher betrachten wir einige Beziehungen dieser Operatoren in ihrer Anwendung auf Skalarfelder. Zunächst gelten für die Komponenten die **Kommutatorrelationen**

$$[x_j, \mathbf{p}_k] = i\delta_{jk}. \quad (\text{B.1.26})$$

Dies beweist man durch Anwendung des Kommutators auf ein beliebiges Skalarfeld ψ . Offenbar gilt

$$\mathbf{p}_k x_j \psi = -i\partial_k (x_j \psi) = -i(\delta_{jk} + x_j \partial_k) \psi = -i\delta_{jk} \psi + x_j \mathbf{p}_k \psi. \quad (\text{B.1.27})$$

Daraus folgt durch einfache Umstellung

$$[x_j, \mathbf{p}_k] \psi = (x_j \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_k x_j) \psi = i\delta_{jk} \psi, \quad (\text{B.1.28})$$

und das ist die Aussage von (B.1.26). Nun kann man sofort nachrechnen, daß für drei beliebige Operatoren $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ die Identitäten

$$[\mathbf{AB}, \mathbf{C}] = \mathbf{A}[\mathbf{B}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]\mathbf{B}, \quad [\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} \quad (\text{B.1.29})$$

gelten. Aus diesen Beziehungen folgen durch einfache Rechnungen die Kommutatorrelationen

$$[x_j, \mathbf{L}_k] = i\epsilon_{jkl}x_l, \quad (\text{B.1.30})$$

$$[\mathbf{p}_j, \mathbf{L}_k] = i\epsilon_{jkl}\mathbf{p}_l, \quad (\text{B.1.31})$$

$$[\mathbf{L}_j, \mathbf{L}_k] = i\epsilon_{jkl}\mathbf{L}_l, \quad (\text{B.1.32})$$

$$[\mathbf{L}_j, \vec{x}^2] = [\mathbf{L}_j, \vec{\mathbf{p}}^2] = [\mathbf{L}_j, \vec{\mathbf{L}}^2] = 0. \quad (\text{B.1.33})$$

Im folgenden verwenden wir auch einen beliebigen abstrakten Vektoroperator $\vec{\mathbf{V}}$, von dem wir nur annehmen, daß er die Kommutatorrelationen

$$[\mathbf{V}_j, \mathbf{L}_k] = i\epsilon_{jkl}\mathbf{V}_l \Rightarrow [\mathbf{L}_j, \mathbf{V}_k] = i\epsilon_{jkl}\mathbf{V}_l \quad (\text{B.1.34})$$

erfüllt. Das ist insbesondere der Fall für \vec{x} , $\vec{\mathbf{p}}$ und $\vec{\mathbf{L}}$.

Oft benötigen wir auch die folgenden Formeln, die man mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (B.1.30-B.1.33) unter Zuhilfenahme von (B.1.29) nachrechnet:

$$\vec{x} \cdot \vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{x} = 0, \quad (\text{B.1.35})$$

$$\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{p}} = 0, \quad (\text{B.1.36})$$

$$\vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{V}}, \quad (\text{B.1.37})$$

$$\vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{L}} = 2i\vec{\mathbf{V}} - \vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{V}}, \quad (\text{B.1.38})$$

$$\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{L}} = i\vec{\mathbf{L}}, \quad (\text{B.1.39})$$

$$(\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{V}}) \times \vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}^2 \vec{\mathbf{V}} - \vec{\mathbf{L}}(\vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\mathbf{L}}) + i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{V}}, \quad (\text{B.1.40})$$

$$\vec{\mathbf{L}} \times (\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{V}}) = (\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{V}})\vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{L}}^2 \vec{\mathbf{V}} + i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{V}}, \quad (\text{B.1.41})$$

$$\vec{\mathbf{L}} \cdot (\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{V}}) = i\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{V}}, \quad (\text{B.1.42})$$

$$\vec{x} \times \vec{\mathbf{L}} = \vec{x}(\vec{x} \cdot \vec{\mathbf{p}}) - \vec{x}^2 \vec{\mathbf{p}} \quad (\text{B.1.43})$$

$$\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{p}} = (\vec{x} \cdot \vec{\mathbf{p}})\vec{\mathbf{p}} - \vec{x}\vec{\mathbf{p}}^2, \quad (\text{B.1.44})$$

$$\vec{\mathbf{V}}^2 \vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{V}}^2, \quad (\text{B.1.45})$$

$$[\vec{\mathbf{L}}^2, \vec{\mathbf{V}}] = i(\vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{V}}) = -2\vec{\mathbf{V}} - 2i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{V}} = 2i\vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{L}} + 2\vec{\mathbf{V}}, \quad (\text{B.1.46})$$

$$\vec{\mathbf{L}}^2 (\vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{L}}) = -(\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{p}})\vec{\mathbf{L}}^2, \quad (\text{B.1.47})$$

$$\vec{\mathbf{L}}^2 (\vec{x} \times \vec{\mathbf{L}}) = -(\vec{\mathbf{L}} \times \vec{x})\vec{\mathbf{L}}^2. \quad (\text{B.1.48})$$

B.2 Vektoranalysis im Minkowskiraum

Die relativistische Physik läßt sich am bequemsten im **manifest kovarianten Formalismus** im Minkowskiraum formulieren, obwohl zuweilen praktische Anwendungen meist mittels der dreidimensionalen Vektoranalysis behandelt werden. Es ist daher wichtig, je nach Problemstellung zwischen beiden Schreibweisen wechseln zu können.

Der Minkowskiraum ist ein **vierdimensionaler pseudoeuklidischer reeller Vektorraum**. Vektoren notieren wir als einfache Symbole. Bzgl. beliebiger pseudoorthonormaler Basen besitzt die pseudometrische Fundamentalform die Komponenten

$$(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (\text{B.2.1})$$

und die **kontravarianten Vektorkomponenten** werden mit oberen griechischen Indizes notiert:

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2.2})$$

Das Viererprodukt zweier Vektoren ist durch

$$x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (\text{B.2.3})$$

gegeben. Die **kovarianten Komponenten** von Vektoren erhält man durch „Indexziehen“ mittels der Fundamentalform

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu, \quad x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu. \quad (\text{B.2.4})$$

Der Vierergradient eines Viererskalars ist durch

$$\partial_\mu \Phi = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi \quad (\text{B.2.5})$$

gegeben. Dabei ist es wichtig auf die *Indexstellung* zu achten, denn die Ableitung nach kontravarianten Vektorkomponenten bilden ein kovariantes Vektorfeld und umgekehrt.

Der **d'Alembert-Operator** ist das vierdimensionale Analogon zum Laplaceoperator in der dreidimensionalen Vektoranalysis:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}. \quad (\text{B.2.6})$$

Bzgl. **eigentlichere Lorentztransformationen**, also linearen Abbildungen

$$x \mapsto x' = \Lambda x, \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (\text{B.2.7})$$

die die Bedingungen

$$\Lambda \eta \Lambda^t = \eta, \quad \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \quad \text{und} \quad \det \Lambda = +1 \quad (\text{B.2.8})$$

erfüllen, verhält sich ∂_μ angewandt auf Viererskalar-, Vierervektor- und Vierertensorfelder wie ein kovarianter Vektor, d.h. die partiellen Ableitungen der ko- oder kontravarianten Feldkomponenten liefern die Komponenten eines neuen um eine Stufe höheren Tensorfeldes, z.B. bildet für ein Vierervektorfeld A^μ der Ausdruck $B_\nu^\mu = \partial_\nu A^\mu$ die Komponenten eines Tensorfeldes zweiter Stufe. Entsprechen kann man durch **Verjüngen**, also „Überschieben“ mit der Fundamentalform die Divergenz eines Tensors berechnen. So ist $B_\mu^\mu = \partial_\mu A^\mu$ ein Viererskalarfeld.

Weiter bildet das **Levi-Civita-Symbol**

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3), \\ -1 & \text{falls } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B.2.9})$$

die kontravarianten Komponenten eines vollständig antisymmetrischen Tensors vierter Stufe. Es ist wichtig zu bemerken, daß wegen $\det \eta = -1$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \eta_{\rho\gamma} \eta_{\sigma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det \eta \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{B.2.10})$$

gilt.

B. Formelsammlung

Nützliche Rechenregeln sind

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho'\sigma'} = - \sum_{P \in S_3} \sigma(P) \delta_{P(\nu')}^\nu \delta_{P(\rho')}^\rho \delta_{P(\sigma')}^\sigma, \quad (\text{B.2.11})$$

wobei P sämtliche Permutationen der drei Indizes ν' , ρ' und σ' durchläuft. Weiteres Kontrahieren dieser Beziehung liefert suzessive

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho'\sigma'} = -2(\delta_{\rho'}^\rho \delta_{\sigma'}^\sigma - \delta_{\sigma'}^\sigma \delta_{\rho'}^\rho), \quad (\text{B.2.12})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma'} = -6\delta_{\sigma'}^\sigma, \quad (\text{B.2.13})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24. \quad (\text{B.2.14})$$

Das **Hodge-Dual** vollständig antisymmetrischer Tensoren wird kovariant definiert (mit den entsprechenden Konsequenzen hinsichtlich der Vorzeichen!), d.h.

$$(\dagger\Phi)_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Phi, \quad (\text{B.2.15})$$

$$(\dagger A)_{\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\mu, \quad (\text{B.2.16})$$

$$(\dagger F)_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.2.17})$$

$$(\dagger G)_\sigma = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G^{\mu\nu\rho}, \quad (\text{B.2.18})$$

$$(\dagger H) = \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} H^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{B.2.19})$$

Dabei sind sämtliche Tensoren als vollständig antisymmetrisch unter Vertauschung ihrer Indizes vorausgesetzt. Die entsprechenden Definitionen lauten exakt analog für vollständig kovariante Tensorindizes, nur daß dann entsprechend der kontravariante Levi-Civita-Tensor zu verwenden ist. Mit diesen Konventionen gilt dann für beliebige vollständig antisymmetrische Tensoren

$$\dagger\dagger T = -T. \quad (\text{B.2.20})$$

Zum Beweis dieser Beziehung benötigt man lediglich (B.2.12-B.2.14). Z.B. gilt für den Fall eines antisymmetrischen Tensors zweiter Stufe

$$\begin{aligned} (\dagger\dagger F)^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} (\dagger F)_{\rho\sigma} = \frac{1}{4} \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} \\ &\stackrel{(\text{B.2.12})}{=} -\frac{1}{2} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) = -F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.2.21})$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die vorausgesetzte Antisymmetrie des Tensors F benutzt.

Weiter können wir in Analogie zur dreidimensionalen Vektoranalysis invariante Integrale definieren. Offenbar ist das Vierervolumenelement

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (\text{B.2.22})$$

ein Skalar unter eigentlichen Lorentztransformationen, da für diese $d^4x' = \det \hat{\Lambda} d^4x = d^4x$ gilt.

Weiter kann man dreidimensionale Hyperflächen $x = x(u, v, w)$ betrachten. Offenbar sind die entsprechenden Oberflächenvektoren

$$d^3\sigma_\alpha = -du dv dw \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} \frac{\partial x^\delta}{\partial w}. \quad (\text{B.2.23})$$

Das $---$ -Zeichen ist dabei (B.2.10) geschuldet. Im folgenden benötigen wir insbesondere das vierdimensionale Analogon des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{V^{(4)}} d^4x \partial_\mu A^\mu = \int_{\partial V^{(4)}} d^3\sigma_\mu V^\mu. \quad (\text{B.2.24})$$

B.2. Vektoranalysis im Minkowskiraum

Dabei ist $\partial V^{(4)}$ der Rand des vierdimensionalen Volumens $V^{(4)}$, und wie im Dreidimensionalen ist die Orientierung der Hyperflächenelemente $d^3\sigma_\alpha$ so zu wählen, daß sie aus dem Vierervolumen hinausweisen. Der Beweis erfolgt analog wie im Dreidimensionalen (vgl. [Hee05]).

B. Formelsammlung

Anhang C

Orthogonale Funktionensysteme

In diesem Anhang stellen wir die wichtigsten orthogonalen Funktionensysteme zusammen, die in der klassischen Feldtheorie ebenso benötigt werden wie in der Quantentheorie. Die Vorgehensweise bedient sich der selbstadjungierten Operatoren im Hilbert-Raum L^2 der quadratintegrierbaren Funktionen, also im wesentlichen quantenmechanischer Methoden. Allerdings stellt dieser Zugang die bequemste Methode der Herleitung der benötigten Eigenschaften der diversen orthogonalen Funktionensysteme dar.

C.1 Der Hilbert-Raum L^2

C.2 Fourier-Reihen und -Integrale

C.3 Kugelflächenfunktionen

Zu den Kugelflächenfunktionen gelangt man am einfachsten, indem man das quantenmechanische Eigenwertproblem für den Drehimpuls betrachtet. Die Drehimpulskomponenten sind dabei definiert als die Erzeugenden infinitesimaler Drehungen. Dazu betrachten wir ein skalares Feld $\Phi(\vec{x})$. Eine infinitesimale Drehung wird definiert durch einen infinitesimalen $\delta\vec{\varphi}$, wobei $\delta\varphi = |\delta\vec{\varphi}|$ der infinitesimale Drehwinkel ist und die Richtung des infinitesimalen Drehvektors die Richtung der Drehachse im Sinne der Rechten-Hand-Regel angibt: Streckt man den Daumen der rechten Hand in Richtung des Drehvektors, ergeben die gekrümmten Finger die Drehrichtung. Eine infinitesimale Drehung ist dann durch

$$\vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{x} \quad (\text{C.3.1})$$

gegeben. Dass hier in der Tat eine infinitesimale Drehung vorliegt, ergibt sich daraus, dass für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{x}'^2 = \vec{x}^2 + 2\vec{x} \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{x}) + (\delta\vec{\varphi} \times \vec{x})^2 = \vec{x}^2 + \mathcal{O}(\delta\varphi^2), \quad (\text{C.3.2})$$

d.h. in linearer Ordnung bleiben die Längen beliebiger Vektoren erhalten, d.h. es liegt in der Tat eine Drehung vor.

Die inverse Transformation ist durch

$$\vec{x} = \vec{x}' - \delta\vec{\varphi} \times \vec{x}' + \mathcal{O}(\delta\varphi^2). \quad (\text{C.3.3})$$

In der Tat ist

$$\delta\vec{\varphi} \times \vec{x}' = \delta\vec{\varphi} \times (\vec{x} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{x}) = \delta\vec{\varphi} \times \vec{x} + \mathcal{O}(\delta\varphi^2), \quad (\text{C.3.4})$$

was (C.3.3) beweist.

Das Skalarfeld transformiert sich nun gemäß

$$\Phi'(\vec{x}') = \Phi(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}' - \delta\vec{\varphi} \times \vec{x}') = \Phi(\vec{x}') - (\delta\vec{\varphi} \times \vec{x}') \cdot \vec{\nabla}\Phi(\vec{x}') = \Phi(\vec{x}') - \delta\vec{\varphi} \cdot (\vec{x}' \times \vec{\nabla})\Phi(\vec{x}'). \quad (\text{C.3.5})$$

Definieren wir also die infinitesimalen Erzeugenden der Drehung $\vec{\mathbf{L}}$ so, dass

$$\delta\Phi(\vec{x}) = -i\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{L}}\Phi(\vec{x}), \quad (\text{C.3.6})$$

folgt

$$\vec{\mathbf{L}} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla}. \quad (\text{C.3.7})$$

Verwenden wir den „Impulsoperator“

$$\vec{\mathbf{p}} = -i\vec{\nabla}, \quad (\text{C.3.8})$$

folgt in Analogie zur klassischen Mechanik

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{x} \times \vec{\mathbf{p}}. \quad (\text{C.3.9})$$

Dabei bedeutet der Operator \vec{x} einfach die Multiplikation einer Funktion mit \vec{x} , d.h. $\vec{x}\Phi(\vec{x}) = \vec{x}\Phi(\vec{x})$.

Aus den Kommutatorregeln für die Komponenten des Orts- und Impulsoperators

$$[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k] = 0, \quad [\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = 0, \quad [\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k] = i\delta_{jk} \quad (\text{C.3.10})$$

ergeben sich nach einiger Rechnung für die Drehimpulskomponenten

$$\mathbf{L}_j = \epsilon_{jkl} \mathbf{x}_k \mathbf{p}_l \quad (\text{C.3.11})$$

die Kommutatorregeln

$$[\mathbf{L}_j, \mathbf{L}_k] = i\epsilon_{jkl} \mathbf{L}_l. \quad (\text{C.3.12})$$

Wollen wir nun Eigenfunktionen der Drehimpulskomponenten berechnen, ist klar, dass es keine simultanen vollständigen Funktionensysteme für auch nur zwei verschiedene Drehimpulskomponenten geben kann, weil diese untereinander nicht kommutieren. Wir können also nur einen vollständigen Satz für eine Drehimpulskomponente angeben. Dafür wählt man gewöhnlich \mathbf{L}_3 , und zwar aus dem Grunde, dass für die Standardkugelkoordinaten die 3-Achse als Polarachse ausgezeichnet ist.

Als weiteren mit dem Drehimpuls zusammenhängenden Operator betrachten wir das Betragsquadrat $\vec{\mathbf{L}}^2 = \mathbf{L}^2$ des Drehimpulses. Wir können leicht zeigen, dass dieser Operator mit allen drei Drehimpulskomponenten vertauscht:

$$[\mathbf{L}^2, \mathbf{L}_k] = [\mathbf{L}_j \mathbf{L}_j, \mathbf{L}_k] = \mathbf{L}_j [\mathbf{L}_j, \mathbf{L}_k] + [\mathbf{L}_j, \mathbf{L}_k] \mathbf{L}_j = i\epsilon_{jkl} (\mathbf{L}_j \mathbf{L}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{L}_j) = 0. \quad (\text{C.3.13})$$

Also können wir \mathbf{L}^2 und \mathbf{L}_3 simultan diagonalisieren.

Außerdem sind die drei Drehimpulskomponenten selbstadjungierte Operator auf L^2 , denn

$$\vec{\mathbf{L}}^\dagger = \vec{\mathbf{p}}^\dagger \times \vec{\mathbf{x}}^\dagger = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{L}}. \quad (\text{C.3.14})$$

Dabei gilt die letztere Gleichung, weil die im Kreuzprodukt auftretenden Operatorprodukte immer Orts- und Impulsvektorkomponenten in verschiedenen Richtungen beinhalten und diese gemäß (C.3.10) kommutieren. Damit bilden die simultanen Eigenfunktionen von \mathbf{L}^2 und \mathbf{L}_z ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbert-Raum L^2 . Wir zeigen nun, dass in Kugelkoordinaten die Drehimpulskomponenten nur von den Winkeln

C.4. Sphärische Bessel-Funktionen

(ϑ, φ) und Winkelableitungen abhängen, d.h. das besagte Orthonormalsystem gestattet die Entwicklung beliebiger auf der durch (ϑ, φ) Einheitskugeloberfläche Ω definierten Funktionen. Dabei ist das Skalarprodukt entsprechend dem Skalarprodukt für $L^2(\mathbb{R}^3)$ -Funktionen für Funktionen $f_1(\vartheta, \varphi)$ und $f_2(\vartheta, \varphi)$ durch

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi f_1^*(\vartheta, \varphi) f_2(\vartheta, \varphi) \quad (\text{C.3.15})$$

definiert.

In der Tat folgt mit (B.1.15) für beliebige Funktionen $\Phi(\vec{x})$

$$\vec{A} = \vec{L}\Phi = -i\vec{x} \times \vec{\nabla}\Phi = -i\vec{e}_r \times \left(\vec{e}_\vartheta \partial_\vartheta \Phi + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\varphi \Phi \right) = -i \left(\vec{e}_\varphi \partial_\vartheta \Phi - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\varphi \Phi \right). \quad (\text{C.3.16})$$

Nun gilt für ein beliebiges Vektorfeld

$$\vec{J} \cdot \vec{A} = -i(\vec{x} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} = -i\vec{x} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -i \frac{1}{\sin \vartheta} \left[\partial_\vartheta (\sin \vartheta A_\varphi) - \partial_\varphi A_\vartheta \right], \quad (\text{C.3.17})$$

wobei wir im letzten Schritt (B.1.16) verwendet haben. Setzen wir hierin (C.3.16) ein, erhalten wir

$$\mathbf{L}^2 \Phi = \vec{L} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \left[\partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \Phi) + \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\varphi^2 \Phi \right]. \quad (\text{C.3.18})$$

Wir bemerken für die spätere Verwendung noch die wichtige Formel

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \partial_r^2 (r\Phi) - \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2 \Phi. \quad (\text{C.3.19})$$

Schließlich benötigen wir noch die kartesischen Komponenten von \vec{L} . Diese erhalten wir aus (C.3.16) mit

$$\vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3.20})$$

Dies in (C.3.16) eingesetzt liefert schließlich

$$\vec{L}\Phi = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \Phi = -i \begin{pmatrix} -\sin \varphi \partial_\vartheta \Phi - \cot \vartheta \cos \varphi \partial_\varphi \Phi \\ \cos \varphi \partial_\vartheta \Phi - \cot \vartheta \sin \varphi \partial_\varphi \Phi \\ \partial_\varphi \Phi \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3.21})$$

C.4 Sphärische Bessel-Funktionen

C.5 Zylindrische Bessel-Funktionen

C. Orthogonale Funktionensysteme

Anhang D

Partielle Differentialgleichungen

In diesem Anhang stellen wir einige mathematische Grundlagen zu den in der Elektrodynamik auftretenden partiellen Differentialgleichungen auf. Dabei sind von besonderer Bedeutung die Laplace- und Poisson-Gleichungen für die Elektro- und die Magnetostatik sowie die Wellengleichung für zeitabhängige Felder.

D.1 Laplace- und Poisson-Gleichung

D.2 Die Wellengleichung

Wir betrachten die (inhomogene) Wellengleichung zunächst für Felder im ganzen Raum, d.h. ohne Randbedingungen bis auf die, daß wir annehmen, daß die Felder im Unendlichen zu jeder Zeit „hinreichend schnell“ verschwinden. Dies werden wir im folgenden noch zu präzisieren haben.

Es genügt für diesen Anhang ein einzelnes skalares Feld $\phi(x)$ zu behandeln, und wir bedienen uns im folgenden der relativistisch kovariant Schreibweise. Die Wellengleichung können wir in der Form

$$\square\phi = \partial_\mu\partial^\mu\phi = \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\phi = J \quad (\text{D.2.1})$$

schreiben. Dabei ist J eine vorgegebene Funktion. Wir wollen im folgenden eine Lösung für das **Anfangswertproblem** herleiten, d.h. wir suchen eine Lösung der Wellengleichung (D.2.1) für vorgegebene Anfangswerte

$$\phi(t=0, \vec{x}) = a(\vec{x}), \quad \partial_t\phi(t, \vec{x})|_{t=0} = b(\vec{x}). \quad (\text{D.2.2})$$

Wir wollen sowohl zeigen, daß eine Lösung unter geeigneten Voraussetzungen an die vorgegebenen Funktionen J , a und b stets existiert und eindeutig ist.

Wie bei der Laplace- und Poisson-Gleichung sind dabei die auf den vierdimensionalen Minkowskiraum verallgemeinerten Greenschen Integralsätze und eine Green-Funktion des d'Alembertoperators Δ entscheidet. Für die Greensche Funktion verwenden wir sowohl aus physikalischen wie Bequemlichkeitsgründen die **retardierte Green-Funktion**, die wir im Haupttext in Abschnitt 1.8.1 ausführlich besprochen haben:

$$G_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c|\vec{x}|} \delta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right). \quad (\text{D.2.3})$$

Wie wir dort gezeigt haben, erfüllt sie die Gleichung

$$\square G_{\text{ret}} = \delta^{(4)}(x) = \frac{1}{c} \delta(t) \delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (\text{D.2.4})$$

D. Partielle Differentialgleichungen

und die Retardierungsbedingung $G_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = 0$ für $t < 0$.

Um das Anfangswertproblem (D.2.2) zu lösen, nehmen wir an, wir hätten eine Lösung des Anfangswertproblems (D.2.1, D.2.2) gefunden und wenden den vierdimensionalen Gaußschen Satz im Minkowski-Raum auf das Vektorfeld

$$V^\mu(x') = \phi(x') \partial'^\mu G_{\text{ret}}(x - x') - G_{\text{ret}}(x - x') \partial'^\mu \phi(x') \quad (\text{D.2.5})$$

an. Das Vierervolumen $V^{(4)}$ sei durch den räumlich unendlich ausgedehnten Hyperzylinder, der durch $0 \leq t' \leq t + 0^+$ definiert ist, gegeben.

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \partial'_\mu V^\mu(x') &= \phi(x') \square' G_{\text{ret}}(x - x') - G_{\text{ret}}(x - x') \square' \phi(x') \\ &= \phi(x') \delta^{(4)}(x - x') - G_{\text{ret}}(x - x') J(x'), \end{aligned} \quad (\text{D.2.6})$$

wobei wir im letzten Schritt (D.2.4) bzw. (D.2.1) verwendet haben. Integrieren wir also (D.2.6) über $V^{(4)}$ und verwenden (B.2.24), erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi(x) - \int_{V^{(4)}} d^4x G_{\text{ret}}(x - x') J(x') \\ = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' [\phi(x') \partial'_0 G_{\text{ret}}(x - x') - G_{\text{ret}}(x - x') \partial'_0 \phi(x')]_{x'^0=0}. \end{aligned} \quad (\text{D.2.7})$$

Dabei trägt die obere Deckfläche des Hyperzylinders bei $x'^0 = x^0 + 0^+$ nichts zur rechten Seite bei, weil dort sowohl $G_{\text{ret}}(x - x') = 0$ als auch $\partial'_0 G_{\text{ret}}(x - x') = 0$ sind. Setzen wir nun die Anfangsbedingungen (D.2.2) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_{V^{(4)}} d^4x G_{\text{ret}}(x - x') J(x') - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' [a(\vec{x}') \partial'_0 G_{\text{ret}}(x - x') - G_{\text{ret}}(x - x') b(\vec{x}')] \\ &= \int_{V^{(4)}} d^4x G_{\text{ret}}(x - x') J(x') + \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' [a(\vec{x}') \partial'_0 G_{\text{ret}}(x - x') + G_{\text{ret}}(x - x') b(\vec{x}')]_{x'^0=0}. \end{aligned} \quad (\text{D.2.8})$$

Wir können nun die Integrale unter Verwendung der expliziten Form der retardierten Green-Funktion (D.2.3) auswerten. Beim Vierervolumenintegral führen wir die x'^0 -Integration aus, wobei wir darauf zu achten haben, daß das Integral über das Intervall $[0, x^0 + 0^+]$ erfolgt. Es ergibt sich schließlich

$$\int_{V^{(4)}} d^4x G_{\text{ret}}(x - x') J(x') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \Theta(x^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|) \frac{J(x^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (\text{D.2.9})$$

In dem dreidimensionalen Volumenintegral in (D.2.8) substituieren wir $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{R}$, d.h. $d^3\vec{x}' = d^3\vec{R}'$ und führen Kugelkoordinaten für \vec{R} ein. Dann erhalten wir für das erste Integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dR \int_{S_1} d^2\Omega_R R^2 a(\vec{x} + \vec{R}) \partial_0 \frac{\delta(x^0 - R)}{4\pi R} &= - \int_0^\infty dR \int_{S_1} d^2\Omega_R \frac{R}{4\pi} a(\vec{x} + \vec{R}) \partial_R \delta(x^0 - R) \\ &= \int_{S_1} d^2\Omega_R \partial_0 \frac{x^0 a(\vec{x} + x^0 \vec{e}_R)}{4\pi}, \end{aligned} \quad (\text{D.2.10})$$

wobei S_1 die Einheitssphäre um $\vec{R} = 0$ bezeichnet. Geht man analog für das zweite dreidimensionale Volumenintegral in (D.2.8) vor, folgt schließlich

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_{|\vec{x}' - \vec{x}| \leq x^0} d^3\vec{x}' \frac{J(x^0 - |\vec{x}' - \vec{x}|, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &\quad + \int_{S_1} d^2\Omega_{\vec{R}} \frac{1}{4\pi} \{x^0 b(\vec{x} + x^0 \vec{e}_R) + \partial_0 [x^0 a(\vec{x} + x^0 \vec{e}_R)]\}. \end{aligned} \quad (\text{D.2.11})$$

D.2. Die Wellengleichung

Daß dies tatsächlich (D.2.1) erfüllt, weist man am besten über die unintegrierte Form (D.2.8) nach. Anwenden des D'Alembert-Operators auf den ersten Term liefert im Integranden $\delta^{(4)}(x - x')J(x')$, und für $x^0 > 0$ erhält man in der Tat $J(x)$. Der zweite Term liefert 0, da wegen $x^0 > 0$ die Greenfunktion mitsamt ihren Ableitungen bei x'^0 identisch verschwindet. Die Anfangsbedingungen sind offenbar auch erfüllt, denn für $x^0 = 0$ verschwindet der erste Term, da dort die Kugel, über die integriert wird zu einem Punkt zusammenschrumpft. Im zweiten Integral trägt für $x^0 \rightarrow 0^+$ nur der zweite Term beim und nach Ausführen der x^0 -Ableitung mittels Produktregel, erhält man

$$\phi(x^0 = 0, \vec{x}) = \int_{S_1} d^2\Omega_R \frac{1}{4\pi} a(\vec{x}) = a(\vec{x}). \quad (\text{D.2.12})$$

Für die x^0 -Ableitung bemerken wir, daß vom ersten Term in derselben Rechnung für $x^0 \rightarrow 0^+$ wie eben $b(\vec{x})$ resultiert. Für den zweiten Term müssen wir den Integranden genauer betrachten:

$$\begin{aligned} \partial_0^2 [x^0 a(\vec{x} + x^0 \vec{e}_R)] &= 2\partial_0 a(\vec{x} + x^0 \vec{e}_R) + x^0 \partial_0^2 a(\vec{x} + x^0 \vec{e}_R) \\ &= 2\vec{e}_R \cdot \nabla a(\vec{x} + x^0 \vec{e}_R) + x^0 \partial_0^2 a(\vec{x} + x^0 \vec{e}_R) \\ &\stackrel{x^0 \rightarrow 0^+}{=} 2\vec{e}_R \cdot \nabla a(\vec{x}). \end{aligned} \quad (\text{D.2.13})$$

Nun ist aber, \vec{e}_R in kartesischen Koordinaten ausgedrückt,

$$\int_{S_1} d^2\Omega_R \vec{e}_R = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\vartheta \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \int_{-1}^1 du \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{D.2.14})$$

Dabei haben wir im letzten Schritt $u = \cos\vartheta$ substituiert. Schließlich ergibt sich

$$\partial_0 \phi(0, \vec{x}) = b(\vec{x}), \quad (\text{D.2.15})$$

d.h. die Randbedingungen sind erfüllt.

Die Verwendung der retardierten Green-Funktion in der obigen Rechnung erscheint nun zwar bequem und physikalisch einleuchtend, ist aber doch willkürlich. Wir zeigen nun, daß andererseits die Lösung eindeutig ist. Seien dazu ϕ_1 und ϕ_2 zwei Lösungen des Anfangswertproblems (D.2.1). Dann gilt für $w = \phi_1 - \phi_2$ offenbar

$$\square w = 0, \quad w(0, \vec{x}) = \partial_0 w(0, \vec{x}) = 0. \quad (\text{D.2.16})$$

Betrachten wir nun den Ausdruck

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left\{ [\partial_0 w(x)]^2 + [\vec{\nabla} w(x)]^2 \right\} \quad (\text{D.2.17})$$

und bilden die Zeitableitung, ergibt sich

$$\partial_0 \epsilon(x) = \partial_0 w(x) \partial_0^2 w(x) + \vec{\nabla} w(x) \cdot \partial_0 \vec{\nabla} w(x). \quad (\text{D.2.18})$$

Integrieren wir dies über den ganzen Raum $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} [\partial_0 w(x) \partial_0^2 w(x) + \vec{\nabla} w(x) \cdot \vec{\nabla} \partial_0 w(x)] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \partial_0 w(x) \square w(x) = 0. \quad (\text{D.2.19})$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt den zweiten Term partiell integriert und angenommen, daß $w(x)$ im räumlich unendlichen schneller als $1/|\vec{x}|$ verschwindet, so daß keine Oberflächenintegrale beim partiellen Integrieren übrig bleiben. Im letzten Schritt haben wir $\square w = 0$ verwendet. Damit ist also

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \epsilon(x) = \text{const.} \quad (\text{D.2.20})$$

D. Partielle Differentialgleichungen

Für $x^0 = 0$ folgt mit den Anfangsbedingungen (D.2.16), daß dieses Integral folglich identisch verschwindet. Da $\epsilon(x) \geq 0$ folgt schließlich $\nabla w = \partial_0 w = 0$, d.h. $w = \text{const}$ und wiederum wegen der Anfangsbedingungen (D.2.16) $w = 0$, d.h. es folgt für die beiden Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 des Anfangswertproblems (D.2.1-D.2.2) notwendig $\phi_1 = \phi_2$, d.h. das Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar, und die Lösung ist durch (D.2.11) gegeben.

D.2. Die Wellengleichung

D. Partielle Differentialgleichungen

Literaturverzeichnis

- [Bec82] R. Becker, *Electromagnetic Fields and Interactions*, Dover Publications, Mineola, NY (1982).
- [CH10] W. Cassing, H. v. Hees, *Mathematische Methoden für Physiker*, Universität Gießen (2010).
<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/maphy.pdf>
- [Ein05] A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. d. Phys. **322**, 891 (1905).
<https://doi.org/10.1002/andp.19053221004>
- [Fra50] W. Franz, *Multipolstrahlung als Eigenwertproblem*, Zeitschrift für Physik **127**, 363 (1950).
<https://doi.org/10.1007/BF01329833>
- [Hee00] H. v. Hees, *Differentialgeometrie und Physik* (2000).
<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/faq-pdf/geo.pdf>
- [Hee05] H. v. Hees, *Klassische Vektoranalysis*, FAQ der Newsgroup de.sci.physik (2005).
<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/faq-pdf/vekanal.pdf>
- [Hee08] H. van Hees, *Klassische Mechanik* (2008).
<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/faq-pdf/mech.pdf>
- [Hee14] H. van Hees, *Mathematische Ergänzungen zu Theoretische Physik 1* (2014).
<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/math-erg1-ws14/matherg1.pdf>
- [Jac83] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, 2. Aufl., Walter de Gruyter (1983).
- [Jef66] O. D. Jefimenko, *Electricity and Magnetism*, Appleton-Century-Croft, New York (1966).
- [LL92] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, Bd. 2 von *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Akademie Verlag, Berlin (1992).
- [Min10] H. Minkowski, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, Math. Ann. **68**, 472 (1910).
<https://doi.org/10.1007/BF01455871>
- [Mon04] G. Monsivais, *The relativistic Ampère–Maxwell law in integral form*, Am. Jour. Phys. **72**, 1178 (2004).
<https://doi.org/10.1119/1.1764558>
- [Roh07] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai (2007).
- [Sch12] G. A. Schott, *Electromagnetic Radiation*, Cambridge University Press, Cambridge (1912).
- [Sch10] F. Scheck, *Klassische Feldtheorie*, Bd. 3 von *Theoretische Physik*, 3. Aufl., Springer, Heidelberg, Dordrecht, London, New York (2010).
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-03962-1>

Literaturverzeichnis

- [SDM⁺98] J. Schwinger, et al., *Classical Electrodynamics*, The Perseus Books Group (1998).
- [Som01] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik III, Elektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M. (2001).
- [Zan12] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo, Delhi, Mexico City (2012).