

Elektrodynamik und Kausalität

Hendrik van Hees
<mailto:hees@itp.uni-frankfurt.de>
Institut für Theoretische Physik
Goethe-Universität Frankfurt
Max-von-Laue Str. 1
D-60438 Frankfurt am Main

08. Dezember 2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Klassische Dispersionstheorie	3
2.1	Kausalität der Wellenausbreitung	3
2.2	Numerische Resultate	7
2.3	Qualitatives Verständnis der Resultate	9
2.4	Genauere Berechnung des Sommerfeldschen Vorläufers	14
3	Wellenleiter im Vakuum	15
3.1	Die Maxwellgleichungen und Randbedingungen	16
3.2	Entwicklung der longitudinalen Feldanteile nach Eigenfunktionen	17
3.3	Zur vollständigen Bestimmung des elektrischen Feldes	19
3.4	Zur vollständigen Bestimmung des magnetischen Feldes	21
3.5	Zusammenfassung der erreichten Resultate	23
3.6	Wellenpakete	24

1 Einleitung

Zu Beginn des 20. Jh., als die spezielle Relativitätstheorie noch ein neues Spezialgebiet der theoretischen Physik darstellte, wurde oft das Phänomen der *anormalen Dispersion* als Beispiel für einen Widerspruch zu Einsteins Kausalitätsprinzip, demzufolge Signale sich nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können, angeführt.

Wie wir sehen werden, ergeben sich diese Vorstellungen aus der Anwendung der Sattelpunktsmethode zur genäherten Behandlung von Fourierintegralen, die es unter bestimmten Umständen erlaubt, das Fortschreiten eines elektromagnetischen Signals durch eine *frequenzunabhängige*

Gruppengeschwindigkeit und *Dämpfung* zu charakterisieren. Im Falle anomaler Dispersion sind aber die Voraussetzungen für die Güte dieser Näherung nicht erfüllt, so daß es nicht verwundern dürfte, daß das Einsteinsche Kausalitätsprinzip durch die exakten Maxwellgleichungen trotzdem stets erfüllt ist. Dies dürfte uns heute desto weniger wundern als wir die Elektrodynamik sogleich als Musterbeispiel einer *relativistischen Feldtheorie* kennenlernen.

Es sei gleich hier in der Einleitung betont, daß auch die Quantentheorie, entgegen fehlerhafter und irreführender Angaben in der Literatur, an dieser Feststellung nichts ändert. Auch letzteres ist schon in den Annahmen, die der relativistischen Quantenfeldtheorie, die naturgemäß allein auf die Fragestellung der relativistischen Kausalität angemessen angewendet werden kann, zugrundeliegen begründet. Daß die nichtrelativistische Quantentheorie Wirkungsausbreitungen mit beliebig großer Geschwindigkeit erlaubt, liegt natürlich darin begründet, daß die zugrundeliegenden Wellengleichungen hier von „Schrödingerscher“ Gestalt, also von parabolischer Form sind, im Gegensatz zu den relativistischen, die von „Klein-Gordonscher“ Form sind und also auch zu verschiedenen *Dispersionsrelationen* Anlaß geben.

Dieser FAQ-Artikel wurde zur Klärung einiger Aussagen in neueren Artikeln zu dem Thema verfaßt und sollen den Artikel [Wal99] mathematisch etwas ergänzen. Er bezieht sich insbesondere auf die Nimitzchen Untersuchungen mit Hohlleitern und der Behauptung, „superluminale Signalausbreitung“ beobachtet zu haben. Beispielfhaft seien nur zwei dieser Artikel zitiert, nämlich [Nim98, NH00], die die wesentlichen Argumente des Autors in klarer Weise zutage treten lassen. Wir werden gegen Ende des Artikels, wenn wir auf der Basis einiger herausgegriffener Beispiele aus der klassischen Maxwelltheorie ein vertieftes Verständnis der tatsächlichen Sachlage erreicht haben, einige der Behauptungen in diesen Artikeln näher analysieren.

Zur Historie dieser durch die obigen qualitativen Betrachtungen an sich unnötigen Betrachtungen sei bemerkt, daß bereits im Jahre 1907 Sommerfeld auf eine Anfrage W. Wiens hin, die den Zusammenhang zwischen anomaler Dispersion und die Gültigkeit der Einsteinkausalität betraf, dieselbe korrekt beantwortet und die strikte Gültigkeit der Einsteinkausalität auch für den Fall anomaler Dispersion festgestellt hat. Nachdem Wien in einer Replik auf diesen Beweis eine physikalisch einfache und einsichtige Erklärung verlangt hatte, kamen diese Untersuchungen nach meinem Verständnis bereits im Jahre 1912 durch A. Sommerfeld [Som12, Som14] die endgültige Erklärung vollkommen zum Abschluß. Brillouin hat schließlich im Jahre 1914 in einer genaueren Untersuchung das Einsetzen des Signals im dispergierenden Medium vollständig beschrieben [Bri14]. Insbesondere in dieser Arbeit Brillouins findet sich eine meisterhafte Anwendung der Sattelpunktmethode auf die genannten Probleme und der Nachweis, daß der im Falle von anomaler Dispersion zu vermeintlichen Überlichtgeschwindigkeiten Anlaß gebende Begriff der Gruppengeschwindigkeit seinen physikalischen Gehalt einbüßt.

Diese Rechnungen werden wir im folgenden jedoch durch numerische Studien des exakten Problems ergänzen können und die Näherungsmethoden dafür stark vereinfachen und durch beinahe qualitative Methoden ersetzen. Der interessierte Leser kann aber auch ohne Bedenken auf die genannten historischen Artikel verwiesen werden, weil sie auch angesichts des Fortschritts von bald 100 Jahren ihre vollständige Gültigkeit bewahrt haben. In vereinfachter Form finden sie sich auch in Sommerfelds Vorlesungen [Som78] und allen hinreichend tiefgehenden modernen Darstellungen der klassischen Elektrodynamik wie [Jac83].

Wir fassen in diesem Artikel die grundlegende Analysis Sommerfelds und Brillouins zusammen, wobei wir uns vollständig auf die klassische Maxwellsche Elektrodynamik beschränken wollen.

Wir wollen anhand einfacher numerischer Beispiele zeigen, daß auch bei anomaler Dispersion

keine Verletzung der Einsteinkausalität vorliegt. Dabei wird auch eines der immer wieder zitierte Experimente Nimitz', nämlich die Ausbreitung von Signalen entlang eines Wellenleiters im Bereich evaneszenter Moden vollständig durchgerechnet.

Wir beginnen in Abschnitt 2 mit einer kurzen Zusammenfassung der Dispersionstheorie in homogenen und isotropen Medien, wobei wir die Ausbreitung eines Wellenpaketes betrachten, das senkrecht auf einen mit dem dispergierenden Medium gefüllten Halbraum trifft. Wir sehen dabei von den Effekten endlicher Relaxationszeiten des Mediums vollständig ab, d.h. wir vernachlässigen die Relaxationszeit des Mediums gegenüber den typischen Perioden der sich in ihm ausbreitenden elektromagnetischen Wellen.

In Abschnitt 3 zeigen wir schließlich, daß das Problem des Nimitz'schen Wellenleiters mathematisch vollkommen analog zu den hierbei gewonnenen Erkenntnissen ist, daß daher also auch hier keinerlei Verletzung der Einsteinkausalität vorliegen kann. Hierzu werden tiefere analytische Methoden der Fourieranalysis und der elementaren Theorie des Funktionenhilbertraums L^2 benötigt. Der Leser, der nur am physikalisch-mathematischen Prinzip des Arguments interessiert ist, kann sich aber mit dem Lesen von Abschnitt 2 und den Anhängen begnügen.

In den Anhängen sollen noch einige sehr allgemeine und so stark wie möglich vereinfachte Anmerkungen zum Begriff der Gruppengeschwindigkeit gegeben werden.

2 Klassische Dispersionstheorie

In diesem Abschnitt soll die Theorie der Ausbreitung von Signalen in dispergierenden Medien so elementar wie möglich dargestellt werden. Wir bedienen uns rationalisierter Heaviside-Lorentz-Einheiten für die elektromagnetischen Größen und setzen die Vakuumlichtgeschwindigkeit 1. In diesem Einheitensystem besitzen die makroskopischen elektromagnetischen Felder \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{D} , \mathbf{H} , die gleiche Dimension, wie es sich für diese relativistisch zu zwei antisymmetrischen Tensorfeldern zweiter Stufe zusammengefaßten Größen gehört. Im Vakuum gilt $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, die Dielektrizitätszahl und Permeabilitätszahl des Vakuums sind also $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$.

2.1 Kausalität der Wellenausbreitung

Wir betrachten als Medium ein Gas oder eine Flüssigkeit. Die Moleküle, aus denen es besteht, behandeln wir als ideale Hertz'sche Dipole, die zudem noch magnetisch inaktiv seien. Das mikroskopische Bild ist, daß die Elektronen und Kerne als gedämpfte harmonische Oszillatoren auf das treibende externe elektrische Feld reagieren. Die durch Wirkung dieses Feldes hervorgerufenen Auslenkungen der Elektronen und Kerne aus ihrer Ruhelage sei dabei als so klein angesehen, daß die Näherung eines harmonischen Kraftgesetzes gerechtfertigt ist. Die Bewegungsgleichung für den einzelnen Oszillator lautet dann

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) + m\gamma\dot{\mathbf{x}} + m\omega_0^2\mathbf{x} = q\mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \quad (1)$$

wobei ω_0 und γ die Eigenfrequenz bzw. Dämpfungskonstante des harmonischen Oszillators darstellen.

Die elektrische Polarisierung des Mediums ist

$$\mathbf{P} = qN\mathbf{x}, \quad (2)$$

wobei N die Teilchendichte ist, und aus der Bewegungsgleichung (1) ergibt sich

$$\ddot{\mathbf{P}} + \omega_0 \gamma \dot{\mathbf{P}} + \omega_0^2 \mathbf{P} = \frac{Nq^2}{m} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \omega_P^2 \mathbf{E}. \quad (3)$$

Die Maxwellgleichungen im Medium lauten also

$$\dot{\mathbf{B}} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Betrachten wir (1) näher, wird klar, daß wir die Oszillationen des durch das einfallende elektrische Feld getriebenen Dipols mittels einer im Ort lokalen, in der Zeit jedoch nichtlokalen Greenschen Funktion beschreiben können.

Dazu bringen wir den bereits in der Einleitung angedeuteten Ansatz ins Spiel, daß die Relaxationszeit des Mediums klein gegen die (mittlere) Periodendauer der einlaufenden elektromagnetischen Welle sei. Dann können wir nämlich das Medium als ganzes als zeitunabhängig behandeln, d.h. im Frequenzbereich gilt

$$\mathbf{P}(\omega, \mathbf{x}) = [\epsilon(\omega, \mathbf{x}) - 1] \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}). \quad (5)$$

Dabei haben wir elektrische Feldstärke und Polarisation des Mediums mittels des Fourierintegrals

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}), \quad \mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \mathbf{P}(\omega, \mathbf{x}) \quad (6)$$

dargestellt, wobei wir in etwas laxer Schreibweise die Größen im Frequenz- und im Zeitbereich mit den gleichen Symbolen bezeichnet haben. Im Zeitbereich ergibt (5) vermöge des Faltungssatzes

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \int dt' G(t - t', \mathbf{x}) \mathbf{E}(t', \mathbf{x}), \quad (7)$$

und die *einzigste Bedingung, die uns das Kausalitätsprinzip auferlegt*, lautet $G(t - t', \mathbf{x}) \propto \Theta(t - t')$. Hier haben wir also noch nicht anzunehmen brauchen, daß sich Feldwirkungen höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Dies wird sich aus der Struktur der Maxwellgleichungen von selbst ergeben, wie es auch sein muß, da es sich um eine *lorentzinvariante Theorie* handelt.

Die Kausalitätsbedingung bedeutet nur, daß wir von allen möglichen Greenschen Funktionen der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators die *retardierte* auswählen. Wegen (5) gilt

$$G(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} [\epsilon(\omega, \mathbf{x}) - 1] \exp(-i\omega t). \quad (8)$$

Ist die Dielektrizitätsfunktion $\epsilon(\omega, \mathbf{x})$ bzgl. der Frequenzvariablen holomorph, können wir dieses Integral mittels des Cauchyschen Integralsatzes ausdrücken, indem wir den Integrationsweg für $t > 0$ in der unteren (für $t < 0$ in der oberen) komplexen ω -Halbebene durch einen unendlich großen Halbkreis geschlossen denken. Die Kausalitäts- bzw. Retardierungsbedingung verlangt dann lediglich, daß $\epsilon(\omega, \mathbf{x})$ *in der oberen ω -Halbebene* keine Singularitäten besitzt, dort also regulär ist.

Um nun die konkrete Gestalt von ϵ für unser betrachtetes Modell zu erhalten, müssen wir das gekoppelte System der Bewegungsgleichungen (3-4) lösen. Dazu bilden wir die Rotation der ersten und die Zeitableitung der zweiten in (4) angegebenen Maxwellgleichungen. Wir benutzen

dabei die in kartesischen Koordinaten gültige Gleichung $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$. Mit der dritten Maxwellgleichung zusammen finden wir dann für \mathbf{P}

$$\partial_t^2 \mathbf{P} = -\square \mathbf{E}, \quad (9)$$

und die Anwendung des Operators $(\partial_t^2 + \gamma \partial_t + \omega_0^2)$ liefert zusammen mit (3) die Wellengleichung

$$(\partial_t^2 + \gamma \partial_t + \omega_0^2) \square \mathbf{E} = -\omega_P^2 \partial_t^2 \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad \square = \partial_t^2 - \Delta_{\mathbf{x}}. \quad (10)$$

Substitution von (5) und (6) für eine sich in x -Richtung ausbreitende ebene Welle $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + kx)$ liefert

$$\epsilon(\omega, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ 1 + \frac{\omega_P^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

wobei wir angenommen haben, daß der Halbraum $x > 0$ mit dem „Dipolgas“ gefüllt ist. Wir wollen nun die allgemeine Lösung für ein nur von t und x abhängiges elektromagnetisches Feld angeben.

Die allgemeine Lösung unserer Gleichung für ein sich in $\pm x$ -Richtung ausbreitendes elektrisches Feld lautet

$$\mathbf{E}(t, x) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \{ a_1(\omega, x) \exp[i\omega n(\omega)x] + a_2(\omega, x) \exp[-i\omega n(\omega)x] \} \quad (12)$$

mit $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$. Wir nehmen weiter an, daß $\mathbf{E} = E e_y$. Wir suchen nun Lösungen, die der Situation entsprechen, daß außerhalb des Mediums ein in Richtung des gasgefüllten Halbraums laufendes Wellenpaket generiert wird. Dann existieren im Inneren des Mediums lediglich in positive x -Richtung auslaufende Wellen. An der Berandung der beiden Medien haben die Tangentialkomponenten stetig zu sein. Dies in (10) eingesetzt führt zu der folgenden Lösung unseres Einstrahlungsproblems:

$$a_1(\omega, x) = \begin{cases} a(\omega) & \text{for } x < 0 \\ \frac{2}{1+n(\omega)} a(\omega) & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$a_2(\omega, x) = \begin{cases} \frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)} a(\omega) & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

Dabei wird a durch die Vorgabe des einlaufenden Wellenpaketes bestimmt.

Es ist aus der Herleitung vollkommen klar geworden, daß die Kausalität *per constructionem* erfüllt ist. Wir haben ja die Kausalität durch Auswahl der retardierten Greenschen Funktion oben explizit gefordert. Die Relativitätstheorie lehrt nun, daß die Kausalität eines Vorgangs unabhängig vom gewählten Bezugssystem ist. Das kann aber nur der Fall sein, wenn die Zeitfolge von Ereignissen, die kausal verknüpft sind, in *zeitartigem Abstände* zueinander zu liegen kommen. In unserem Spezialfall heißt das, daß bei der Annahme, daß für $t \leq 0$ keinerlei Anregung von Schwingungen des Mediums bei $x > 0$ vorlag, es zu keiner Zeit $t < x$ zu einer Erregung gekommen sein kann, d.h. wird zur Zeit $t = 0$ irgendwo außerhalb des Mediums ein elektrisches Feld eingeschaltet, kommt es bei $x > 0$ im Medium frühestens zur Zeit $t = x$ zu einer von 0 verschiedenen Feldamplitude. Man erinnere sich dazu nur, daß dies bei unserer Wahl natürlicher Einheiten der Elektrodynamik (also Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 1$) das *einzigste ist, was*

von einer mit der Einsteinkausalität verträglichen, d.h. sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitender Wirkung verlangt werden muß. Genau dies läßt sich aber sehr leicht auch direkt verifizieren, und zwar unabhängig von der gewählten spezifischen Form des Signals, unter dem wir den eben geschilderten Sachverhalt verstehen wollen, daß zur Zeit $t = 0$ bei allen $x > 0$ kein Signal vorliegt, d.h. das elektromagnetische Feld zur Zeit $t \leq 0$ nur bei $x < 0$ von 0 verschieden war. Insbesondere ist die Nimitzsche Behauptung falsch, daß „bandbegrenzte“ Signale sich im Falle anomaler Dispersion (wozu auch die evaneszenten Moden in Hohlleitern zu rechnen sind, mit denen wir uns ausführlich im nächsten Abschnitt dieser Betrachtungen zu beschäftigen gedenken) überlichtschnell ausbreiten.

Vielmehr ist es klar, daß ein zu endlicher Zeit „eingeschaltetes“ elektromagnetisches Feld nur in einem sowohl zeitlich als auch räumlich beschränkt Raumzeitgebiet von Null verschieden sein muß. Folglich kann aber seine zeitliche Fouriertransformierte keine Funktion mit kompaktem Träger sein.

Der Kausalitätsbeweis läßt sich wie folgt führen und ist die ursprüngliche Antwort Sommerfelds auf Wiens Anfrage [Som07]. Wir stellen das einlaufende Wellenpaket durch als Fouriertransformierte dar:

$$E_{\text{in}}(t, x) = \int \frac{d\omega}{2\pi} a(\omega) \exp[-i\omega(t - x)]. \quad (14)$$

Wir nehmen an, es verschwinde zu allen Zeiten $t \leq 0$ im Medium $x > 0$. Was bedeutet diese Forderung für unsere Amplitude $a(\omega)$ im Frequenzbereich? Für $t \leq 0$ und $x > 0$ können wir das Integral auswerten, indem wir den Integrationsweg durch einen im Unendlichen gelegenen Halbkreis in der oberen komplexen Halbebene geschlossen denken. Damit muß aber $a(\omega)$ notwendig *analytisch in der oberen ω -Halbebene* sein, damit unsere Forderung an das Signal erfüllt ist.

Betrachten wir nun die Wirkung dieses einlaufenden Signals (14) auf das Medium. Das gesamte Signal ist aber durch (12) und (13) gegeben. Für $x > 0$ und $0 < t < x$ ergibt eine Betrachtung von (12) und (13), daß wir den Integrationsweg immer noch in der oberen Halbebene zu schließen haben, denn für $\omega \rightarrow \infty$ haben wir $n(\omega) \rightarrow 1$. Die *minimale Kausalitätsbedingung* an die Greensche Funktion (7) verlangte nun allein, daß ϵ und damit auch n in der oberen Halbebene *analytisch* sein müssen. Weiter ist sicher, daß auch a_1 für $x > 0$ analytisch in der oberen Halbebene ist, da der Realteil von $1 + n$ stets positiv ist und damit dort weder Pole noch Schnitte durch den Vorfaktor in (13) auftreten. Folglich verschwindet also die Feldstärke sicher auch noch für $0 < t < x$, womit wir für unseren Fall eines dispergierenden Mediums analytisch den wichtigen Satz gezeigt haben, daß sich *die Wellenfront in einem dispergierenden Medium höchstens mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit* auszubreiten vermag:

$$E(t, x)|_{t-x < 0, x > 0} = 0. \quad (15)$$

Sommerfeld hat nun in seiner ausführlicheren Arbeit [Som12] gezeigt, daß der Wellenkopf sich genau mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit ausbreitet, und daß also die üblichen *Fresnelschen Brechungsgesetze*, die ausschließlich für den Fall, daß der eingeschwingene Zustand des Mediums unter hinreichend langer Einwirkung eines zeitlich lang andauernden Signals (etwa Licht) vorliegt, gültig sind. Sie gelten eben *nicht* für einen „Einschwingvorgang“, wie er durch das zu endlicher Zeit sich im Medium ausbreitende Signal darstellt. Dies hat auch einen leicht einsehbaren physikalischen Grund. Unsere klassische Herleitung hat ja gezeigt, daß die *makroskopischen Felder* (die stets im Sinne der Kontinuumsnäherung der Materie in hinreichend weiträumigen, d.h. gegen die Molekülabstände großen Volumenelementen gemittelt zu verstehen sind) durch die Superposition der einfallenden elektromagnetischen Wellen mit den Feldern, die durch die

Verschiebung der Ladungen aus ihrer Gleichgewichtslage ohne Einwirkung äußerer Felder und Erregung von i.a. zeitlich veränderlichen Dipolmomenten aufgrund der Einwirkung des einfallenden Feldes entstehen. Im ersten Augenblick, beim Eintreffen des Signals also, hat es sich gegenüber der freien Welle, die vorläge, wenn das Medium gar nicht da wäre, noch gar nicht verändert, denn die Ladungsverschiebung im Medium hat ja noch gar kein zusätzliches elektromagnetisches Feld hervorgebracht, d.h. der *Wellenkopf breitet sich stets mit Vakuumlichtgeschwindigkeit* aus.

Wenn wir den allgemeineren Fall eines nicht senkrecht, sondern in beliebiger schräg auf den gasgefüllten Halbraum treffendes elektromagnetisches Signal betrachten, wird auch der Wellenkopf zunächst nicht gebrochen, sondern geradlinig in Ausbreitungsrichtung weiterlaufen. Erst nach (freilich für sichtbares Licht sehr kurzer) Zeit, wenn ein stationärer „eingeschwungener Zustand“ vorliegt, wird das Signal den üblichen Brechungsgesetzen folgen. Nichtmonochromatische Wellen werden also z.B. beim Durchgang durch ein Prisma auch erst nach dieser „Einschwingzeit“ ein Spektrum aufgrund der Frequenzzbhängigkeit des Brechungsindex' $n(\omega)$ zeigen.

Es ist nun klar, daß bei einer Messung, die mit einem „Start-Detektor“ korrekt den Anfangszeitpunkt, zu dem das Signals bei $x = 0$ einsetzt, und die gleichzeitig mit einem geeigneten „Stopp-Detektor“ korrekt den Zeitpunkt, zu dem das Signal bei einem beliebigen $x > 0$ wegen (15) *niemals Überlichtgeschwindigkeiten* wird feststellen können.

In der Praxis ist dies freilich ein nicht einfaches Unterfangen, und hier rühren auch die Mißverständnisse, in denen behauptet wird, man habe „überlichtschnell Signale“ übertragen, her: Wie unsere Modellrechnungen zeigen werden, sind im Falle anomaler Dispersion die Signale derart deformiert, daß bereits bei kleinen Signallaufstrecken $x > 0$ deren Intensität so klein wird, daß die Trigger des „Stopp-Detektors“ sehr viel niedriger zu wählen sein werden als die des „Start-Detektors“. Da die Gestalt des Signals sehr verzerrt wird, reicht dies leicht aus, um vermeintliche Überlichtgeschwindigkeiten vorzugaukeln. Es dürfte dem Leser aber auch klar geworden sein, daß dies keineswegs einer physikalisch sinnvollen Signalgeschwindigkeitsmessung entspricht. Für diese Problematik, eine Signallaufzeit experimentell zu bestimmen, sei auf den bereits lange vorhandenen FAQ-Artikel [Wal99] verwiesen.

Die Änderungen, die diesen Betrachtungen unterworfen werden müssen, um auch der quantentheoretischen Beschreibung des Sachverhalts gerecht zu werden, sind kleiner als der Leser vielleicht annimmt, zumindest wenn man sich auf die zu dem hier vorgeführten klassischen Vorgehen analoge Näherung, nämlich die *linear response-Näherung* beschränkt. Freilich sind die formalen Begründungen bei weitem abstrakter als die hier gegebene einfachste klassische Behandlung. Es ist u.a. der sog. Realzeitformalismus der relativistischen Vielteilchenquantenfeldtheorie sorgfältig zu entwickeln, was den Rahmen dieses FAQ-Artikels bei weitem sprengen würde. Für diese Formalia sei daher auf [Hee98] und die Behandlung der linear response-Näherung [LeB96] verwiesen.

2.2 Numerische Resultate

In Sommerfelds und Brillouins Originalartikeln schließt sich nun eine detaillierte Analyse der Wellenausbreitung im Medium an. Wir wollen stattdessen zunächst lieber einige Beispiele berechnen. Dazu werten wir das Fourierintegral (12) numerisch aus. Es wurde mit Hilfe eines sehr einfachen adaptiven Verfahrens berechnet, wie es in (12) zu stehen kommt.

Wir betrachten ein Sinus-Signal, das zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet wird (s. Abb. 1) in verschiedenen Tiefen des Materials. Die Parameter wurden wie folgt gewählt: $\omega_P = 20$ a.u., $\omega_0 = 10$ a.u., $\omega_i = 10.1$ a.u., $\gamma = 2$ a.u..

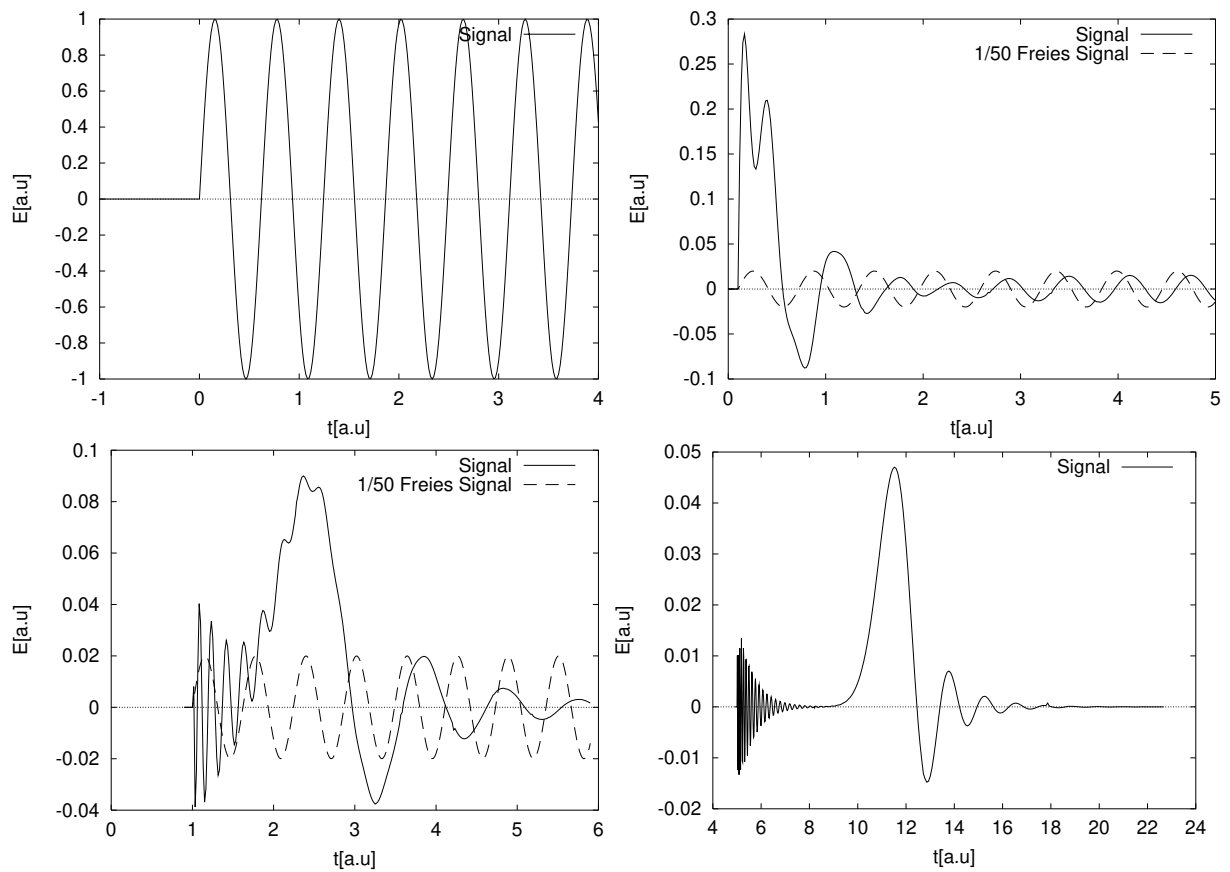


Abbildung 1: Auf den besprochenen dielektrischen Halbraum fällt eine Welle ein, die bei $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet wird. Wäre kein dispersives Medium vorhanden, ist sie als rein sinusförmig mit der Frequenz ω_i gewählt (oben links). Die anderen Plots zeigen der Reihe nach das Signal bei $x = 0.1$, $x = 1$ und $x = 5$ (nähere Erläuterungen im Text).

Man sieht in der Grenzregion, also kurz nach dem Übergang ins Medium nur ein relativ kurzes schnell oszillierendes Eingangssignal, das von einem ebenfalls kurzen längerwelligen Signal abgelöst wird. Wie zu erwarten klingen diese Signale schnell ab und werden von dem entsprechend der gegenüber dem Vakuum geänderten Phasengeschwindigkeit und der benötigten Laufzeit phasenverschobenen und gedämpften aber ansonsten sinusförmigen Hauptsignal abgelöst. Für mittlere x (unten links in Abb. 1 für $x = 1$) sehen wir ein zunächst gegenüber dem Eingangssignal rasch oszillierendes Anfangssignal, den sog. *Sommerfeldschen oder ersten Vorläufer*, dem der wesentlich langsamer als das Eingangssignal oszillierende *Brillouinsche oder zweite Vorläufer* folgt. In unserem Fall ist der Sommerfeldsche Vorläufer noch nicht vollständig abgeklungen, so daß beide Vorläufer in diesem Falle einander überlagern. Tief im Medium, für $x = 5$ in Abb. 1 exemplifiziert, erkennt man deutlich voneinander getrennt den Sommerfeldschen und den Brillouinschen Vorläufer, während das Hauptsignal nicht mehr sichtbar ist.

Es zeigt sich an diesem Beispiel, das in seinen Parametern natürlich recht drastisch gewählt wurde, um die genannten Phänomene recht deutlich zutage treten zu lassen, daß keineswegs irgendwelche Überlichtgeschwindigkeiten auftreten, sondern die Kausalitätsbedingungen der Relativitätstheorie, die eine Signalausbreitung höchstens mit einer Grenzgeschwindigkeit gestatten, die nach der derzeitigen empirischen Sachlage als mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit identisch anzusehen ist. Die Masselosigkeit des Photons gehört nämlich zu den am besten nachgeprüften Annahmen des Standardmodells der Elementarteilchen.

2.3 Qualitatives Verständnis der Resultate

Um die obigen numerischen Resultate qualitativ besser zu verstehen, ist es unumgänglich, einige der von Sommerfeld und Brillouin in [Som12, Som14] und [Bri14] benutzten mathematischen Näherungsverfahren näher zu betrachten. Dabei werden wir aber einiges deutlich kürzen und die dort etablierte Strenge vernachlässigen. Der Leser sei nochmals dazu animiert, diese sehr lesenswerten Originalartikel zu konsultieren. Dabei werden wir Gebrauch von der Möglichkeit, den reellen Integrationsweg unseres Fourierintegrals entsprechend den jeweiligen Erfordernissen zu deformieren, wobei wir genauer auf die analytische Struktur der Funktion $n(\omega)$, die wir hier als analytische Funktion in der komplex erweiterten ω -Ebene zu deuten haben, wie wir es bereits oben andeutungsweise getan haben, als wir den Cauchyschen Integralsatz zum Beweis der Einsteinkausalität (15) benutzt haben.

Wir wollen hier auch ein schönes Experiment zu dem betrachteten Sachverhalt beschreiben, wobei sich eine leichte Vereinfachung gegenüber dem bisherigen Halbraumproblem ergibt. Wir beziehen uns hierzu auf die in [Jac83] zitierte Arbeit [PP69], in der der Nachweis der Sommerfeldschen und Brillouinschen Vorläufer mittels Mikrowellenexperimenten erbracht wurde, welches Teil der Promotionsarbeit des einen Autors (P. Pleshko) war. Es wurde ein Wellenleiter von „Koaxialkabelgeometrie“ mit einem ferrimagnetischen Material gefüllt. Dessen Brechungsindex folgt den Autoren zufolge als Funktion der Mikrowellenfrequenz unserem Einresonanzmodell (11) mit vernachlässigbarer Dämpfung:

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{\omega_P^2}{\omega_0^2 - (\omega + i\eta)^2}}, \quad (16)$$

wobei dessen „Plasmafrequenz“ ω_P und Resonanzfrequenz ω_0 mittels Anlegen eines äußeren statischen Magnetfeldes variiert werden können. Leider fehlen die genaueren Angaben bzgl. dieser

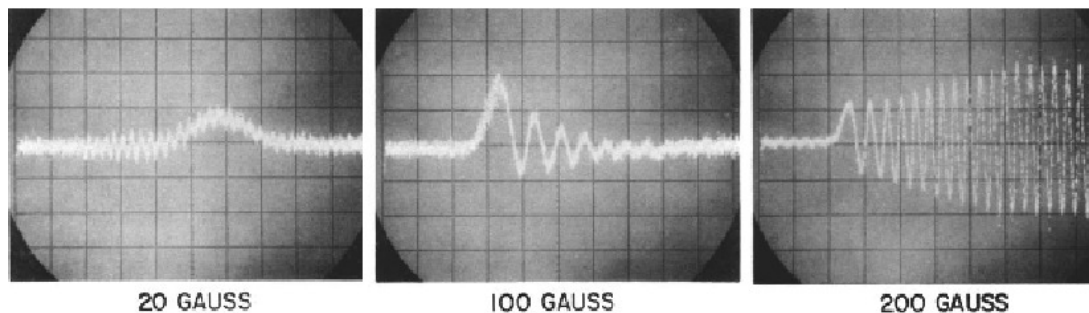


Abbildung 2: Die Originalresultate der Messung aus [PP69]. Die Angabe unter den Oszilloskopaufnahmen gibt die Feldstärke des äußeren statischen Magnetfeldes an, welches die charakteristischen Materialeigenschaften des dispergierenden Mediums bestimmt. Im Fall (a) war $\omega_0 < \omega_i < \omega_1$. Das Hauptsignal ist also gedämpft (vgl. Gl. (16), welche zeigt, daß $n(\omega)$ für diesen Bereich einen Imaginärteil mit dem für Dämpfung korrekten Vorzeichen hat, wobei für die Wurzel wie im gesamten FAQ-Artikel der Hauptwert zu setzen ist), man erkennt aber deutlich den Sommerfeldschen Vorläufer, der Brillouinschen Vorläufer abgelöst wird. In (b) geht der Sommerfeldsche Vorläufer im Rauschen der Meßvorrichtung unter, aber der Brillouinsche Vorläufer ist ausgebildet, das Hauptsignal ist wieder weggedämpft. (c) zeigt schließlich den Fall, daß $\omega_i < \omega_0$, wo also sowohl die Vorläufer als auch das Hauptsignal propagieren. Allerdings fehlt auch hier der Sommerfeldsche Vorläufer, während der Brillouinsche Vorläufer und dessen Übergang ins Hauptsignal deutlich dargestellt sind.

Parameter in der genannten Referenz völlig. Es werden immerhin Angaben über die relative Lage der Trägerfrequenz der eingestrahlten Mikrowelle, die $\omega_i/(2\pi) = 625$ MHz betrug, und die im folgenden noch wichtigen charakteristischen Frequenzen ω_0 und $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ gemacht. Diese relative Lage bestimmt aber auch wesentlich die qualitativen Charakteristiken der beiden Vorläufer, die uns hier besonders interessieren.

Bzgl. der Theorie der Wellenausbreitung sind keine prinzipiellen Veränderungen gegenüber dem unendlich ausgedehnten Medium, das wir die ganze Zeit betrachtet haben, notwendig, da die TEM-Mode, also die Hauptmode des Koaxialkabels erregt wurde. Wir brauchen für jetzt nur zu wissen, daß sich diese im von Materie freien Koaxialkabel wie ein freies Feld ausbreitet, und mit Materie genau die Charakteristiken des Mediums wie im unendlich ausgedehnten Raume annimmt. Zur vertieften Begründung sei auf den folgenden Abschnitt verwiesen, in dem die Theorie der Hohlleiter ausführlich referiert wird.

Da bei $x = 0$ die Wellenform vorgegeben wird, und keine Randbedingungen erfüllt werden müssen, haben wir für die Amplitude des E -Feldes der TEM-Mode einfach

$$E(t, x) = \int \frac{d\omega}{2\pi} A(\omega) \exp[-i\omega(t - n(\omega)x)] \quad (17)$$

mit $A(\omega) = \int dt E(t, 0) \exp(i\omega t)$.

Wir schieben in Abb. 2 die Oszilloskopaufnahmen aus [PP69] ein. Wir wollen nun diesen Sachverhalt auch aus der oben dargestellten Mathematik besser verstehen. Wir sehen dazu von der endlichen Anstiegszeit des Signals ab und benutzen wieder unseren halbseitig unendlichen Sinuszug als Signal. Die Fouriertransformierte erhalten wir als den schwachen Limes der Fouriertrans-

formierten der Funktion

$$E_\eta(t, 0) = E_0 \Theta(t) \sin(\omega_i t) \exp(-\eta t), \quad \eta > 0 \quad (18)$$

für $\eta \rightarrow 0^+$. Offenbar ist

$$A_\eta(\omega) = \int_0^\infty dt \exp[i(\omega + i\eta)t] \sin(\omega_i t) = \frac{E_0 \omega_i}{\omega_i^2 - (\omega + i\eta)^2}. \quad (19)$$

Das zu betrachtende Integral ist also

$$E(t, x) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{E_0 \omega_i}{\omega_i^2 - (\omega + i\eta)^2} \exp[-i\underbrace{\omega(t - n(\omega)x)}_{\phi(\omega)}]. \quad (20)$$

Um einen ersten *groben* Überblick über die Natur der Vorläufer zu erhalten, wollen wir die *Methode der stationären Phase* verwenden. Die Idee ist dabei, daß i.a. die Exponentialfunktion im Integranden von (20) stark oszillieren wird, so daß sich die Beiträge unterschiedlichen Vorzeichens beim Integrieren wegheben. Eine Ausnahme tritt für Werte von ω ein, bei denen sich der Exponent nur wenig ändert, dies sind die Punkte stationärer Phase. Diese erhalten wir aus

$$\phi(\omega) = k(\omega)x - \omega t, \quad \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{dk}{d\omega} = \frac{t}{x}. \quad (21)$$

Tragen wir also $dk/d\omega$ gegen ω auf, finden wir für ein Argumentpaar (t, x) den Punkt stationärer Phase (s. Abb. 3), indem wir eine beim Wert t/x gezeichnete horizontale Linie mit dem Graphen von $dk/d\omega$ zum Schnitt bringen. Für $0 < t < x$ findet sich kein Schnittpunkt, und wir haben in der Tat gesehen, daß in Strenge für diesen Fall entsprechend den relativistischen Kausalitätseigenschaften keine Felderregung vorliegt. Für t/x zwischen 1 und $dk/d\omega|_{\omega=0} = n(0)$ schneidet die dazugehörige Horizontale den Graphen nur im rechten Zweig, und zwar für umso größere Werte von ω je näher das Verhältnis t/x bei 1 liegt. Dies ist offensichtlich die Ursache für den *ersten oder Sommerfeldschen Vorläufer*.

Wir können den Punkt stationärer Phase für diesen Fall aus dem asymptotischen Ausdruck

$$\frac{dk}{d\omega} \underset{\omega \rightarrow \infty}{\cong} 1 + \frac{\omega_P^2}{2\omega^2} \quad (22)$$

bestimmen. Benutzen wir diese Näherung ergibt sich für die Punkte stationärer Phase

$$\omega_s = \pm \sqrt{\frac{\xi}{t-x}} \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{\omega_P^2 x}{2}. \quad (23)$$

Wir bemerken sogleich, daß die Annahme großer Werte für ω nur für nicht zu kleine ξ und kleine $t-x$ gerechtfertigt ist. Es darf andererseits aber $t-x$ auch nicht zu klein sein, damit wir noch eine gute Näherung von der Methode der stationären Phase erwarten können. In diesem Fall können wir allemal schreiben

$$\phi(\omega) = \phi(\omega_s) + \frac{1}{2} |\phi''(\omega_s)| (\omega - \omega_s)^2 + O[(\omega - \omega_s)^3]. \quad (24)$$

Hier und im folgenden setzen wir voraus, daß $\phi''(\omega_s) \neq 0$. Wir können aufgrund der Überlegungen mit der Kompensation der Beiträge des Fourierintegrals, die durch die schnelle Oszillation des

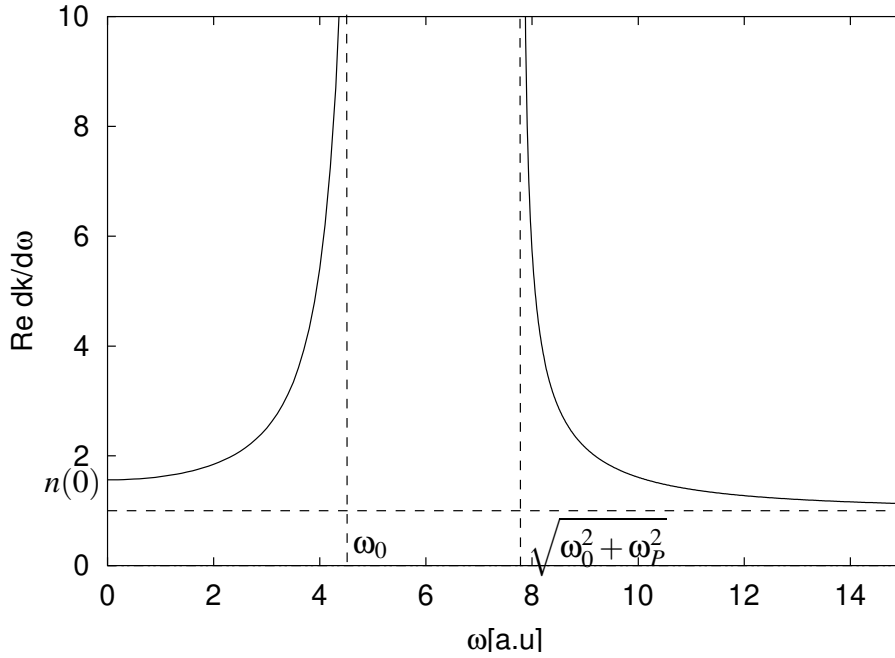


Abbildung 3: Zur Bestimmung der Punkte stationärer Phase gemäß (21): Für $t > x$ trägt man den Wert t/x als horizontale Linie in das Diagramm ein. Der Schnittpunkt mit den beiden Zweigen der Kurve $dk/d\omega$ gibt dann auf der ω -Achse die Punkte stationärer Phase an. Weiteres s. Text.

Integranden außer an Stellen konstanter Phase bedingt ist, weiterhin über die gesamte reelle Achse integrieren, d.h. wir können für jede Stelle stationärer Phase über die gesamte reelle Achse integrieren und haben dann über diese Stellen zu summieren:

$$I = \int \frac{d\omega}{2\pi} f(\omega) \exp[i\phi(\omega)] \approx \sum_{\omega_s} f(\omega_s) \exp[i\phi(\omega_s)] \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp\left[\frac{i}{2}\phi''(\omega_s)(\omega - \omega_s)^2\right]. \quad (25)$$

Dabei existiert das verbleibende Integral im schwachen Sinne, indem man $\phi''(\omega_s)$ durch $\phi''(\omega_s) + i\eta$ mit $\eta > 0$ ersetzt, das nunmehr konvergente Gaußintegral ausführt und schließlich $\eta \rightarrow 0^+$ bildet, welche Prozedur folgendes ergibt

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(\eta - i\phi''(\omega_s))(\omega - \omega_s)^2\right] &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{2\pi[\eta - i\phi''(\omega_s)]}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi|\phi''(\omega_s)|}} \exp\left(+\frac{i\pi}{4} \text{sign}[\phi''(\omega_s)]\right), \end{aligned} \quad (26)$$

wobei wir benutzt haben, daß der Realteil der Wurzel in der oberen Zeile stets positiv sein muß, woraus sich das Vorzeichen des Imaginärteils der Wurzel ergibt, welches wiederum das Vorzeichen des Arguments der Exponentialfunktion in der unteren Zeile bestimmt.

Setzen wir (26) in (25) ein, finden wir schließlich

$$I \approx \sum_{\omega_s} \frac{f(\omega_s)}{\sqrt{2\pi|\phi''(\omega_s)|}} \exp\left[i\phi(\omega_s) + \frac{i\pi}{4} \text{sign}[\phi''(\omega_s)]\right] \quad (27)$$

In unserem Falle finden wir bei Vernachlässigung von ω_i gegen ω_s , was bei unseren Annahmen konsequent ist,

$$E(t, x) \approx \frac{E_0 \omega_i}{\sqrt{\pi \xi}} \left(\frac{t-x}{\xi} \right)^{1/4} \cos \left[2 \underbrace{\sqrt{\xi(t-x)}}_{|\omega_s|(t-x)} - \frac{3\pi}{4} \right]. \quad (28)$$

Wir werden weiter unten noch eine genauere Abschätzung des Sommerfeldschen Vorläufers bieten. Wir halten hier nur fest, daß die Amplitude sehr klein gegen die ursprüngliche Amplitude ist, während die Winkelgeschwindigkeit im Gültigkeitsbereich dieser Formel sehr groß ist.

Der *zweite oder Brillouinsche Vorläufer* setzt nun ein, sobald bei unserer graphischen Konstruktion der Stelle stationärer Phase $t/x = n(0)$ wird. Für nicht zu große Abweichungen von diesem Wert können wir also $\omega_s = 0$ setzen. Allerdings können wir jetzt nicht mehr unsere allgemeine Formel (27) anwenden, da $\phi''(0) = 0$ ist, so daß wir die Phase bis zur dritten Potenz entwickeln und das verbleibende Integral auswerten müssen.

Für $t/x \approx n(0)$ können wir also erwarten, daß das folgende Integral eine gute Näherung für die Amplitude sein wird:

$$E(t, x) \approx \frac{E_0}{\omega_i} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \cos \left[-i\omega(t - n(0)x) + \frac{ix}{3!} \frac{d^3k}{d\omega^3} \Big|_{\omega=0} \omega^3 \right]. \quad (29)$$

Setzen wir nun hierin $A = t - n(0)x$ und $B = x/3! d^3k/d\omega^3|_{\omega=0}$, ergibt sich mit Hilfe von *Mathematica* folgende Lösung

$$E(t, x) = \frac{E_0}{\omega_i} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{3B}} \text{Ai} \left(\frac{A}{\sqrt[3]{3B}} \right) & \text{für } A > 0 \\ \frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{A}{B}} K_{1/3} \left(\frac{2\sqrt{A^3}}{3\sqrt[3]{3B}} \right) & \text{für } A < 0. \end{cases} \quad (30)$$

Dabei ist Ai die *Airyfunktion*, also die im Ursprung reguläre Lösung der Differentialgleichung $y''(z) - zy(z) = 0$ und K_n die modifizierte Besselfunktion, die der Differentialgleichung $z^2 y''(z) + zy'(z) - (z^2 + n^2)y(z) = 0$ genügt und eine logarithmische Singularität im Ursprung besitzt (die natürlich hier durch den Faktor \sqrt{A} kompensiert wird, so daß die beiden Zweige der Funktion glatt aneinander anschließen. Während die Airyfunktion gedämpft oszilliert, steigt die Besselfunktion exponential an, so daß zumindest qualitativ tatsächlich der beobachtete Brillouinsche Vorläufer wie in den numerischen Resultaten in Abb. 1 rechts unten bzw. in den Oszilloskopbildern Abb. 2 in der Mitte zu sehen ist.

Die Methode der stationären Phase zeigt auch qualitativ, wie es zu dem Phänomen der Abb. 1 links unten kommen kann: In dem Fall liegt t/x in einem Bereich, wo sowohl der Brillouinsche Vorläufer, zu dem Schnittpunkt der bei t/x eingezeichneten Horizontale im Plot 3 mit dem linken Zweig (kleine ω) gehörig, als auch der Sommerfeldsche Vorläufer, von dem Schnitt der besagten Horizontale mit dem rechten Zweig (große ω) herrührend, relevant sind. Der Brillouinsche Vorläufer ist also von den schnell oszillierenden Kräuselwellen des Sommerfeldschen Vorläufers überlagert.

Für große Zeiten schließlich gelangen wir in die Nähe der Singularitäten von $k(\omega)$, so daß die Methode stationärer Phase nicht mehr anwendbar ist. Wir haben weiter auch die Dämpfung der Dipolschwingungen der Atome bzw. Moleküle wieder zu berücksichtigen. Wir betrachten also wieder (11) mit endlichem $\gamma > 0$. In (14) kann der Integrationsweg in der komplexen ω -Ebene für $t \gg x$ durch einen unendlich fernen Halbkreis geschlossen gedacht werden, wobei der Halbkreis keinen Beitrag liefert. Dieser Weg kann nun aufgrund des Cauchyschen Integralsatz durch

Umläufe um die beiden durch die Wurzel in $n(\omega)$ gegebenen Schnitte, die den Imaginärteil $-i\gamma/2$ besitzen, und durch Umläufe um die Pole von $A(\omega)$ bei $\pm\omega_i$ deformiert werden. Die Beiträge von den Schnitten sind nun aber $\propto \exp[-\gamma/2(t-x)]$ und können daher für $t \gg x$ vernachlässigt werden. Folglich bleiben nur die Beiträge von den Polen übrig, und der Residuensatz liefert

$$E(t, x) \approx E_0 \sin[\omega_i(t - n(\omega_i)x)]. \quad (31)$$

Das bedeutet, daß das eingeschwungene Signal der Form nach dem Eingangssignal entspricht und die Phasengeschwindigkeit $\omega_i/k(\omega_i) = 1/n(\omega_i)$ besitzt.

2.4 Genauere Berechnung des Sommerfeldschen Vorläufers

Wir folgen für den Sommerfeldschen Vorläufer zu einer genaueren Darstellung noch der Originalrechnung Sommerfelds, weil sie eine schöne Anwendung der Funktionentheorie darstellt. Wir nehmen an, daß $\tau = t - x > 0$ klein ist (in welchem Sinne klein wird sich noch im Verlaufe der Rechnung zeigen). Wir betrachten wieder das Integral (20).

Wir streben nun danach, den Integrationsweg von der reellen Achse weg zu deformieren, so daß in dem Integral ω sehr groß wird. Wegen $t - x > 0$ haben wir den Integrationsweg in der unteren Halbebene zu schließen (blau gezeichneter Weg C_1 in Abb. 4). Da sich aber in der

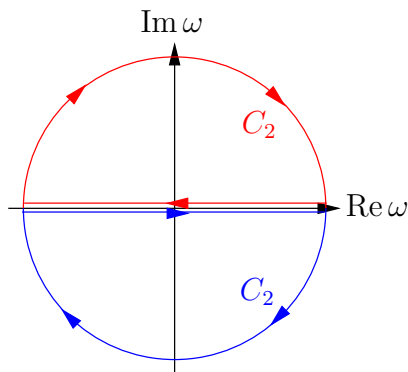


Abbildung 4: Der Integrationsweg zur Berechnung des Sommerfeldschen Vorläufers (Erklärung s. Text).

oberen ω -Halbebene keine Singularitäten des Integranden von (20) befinden, können wir auch den in Abb. 4 rot eingezeichneten Weg hinzufügen. Da sich die reellen Teile des Integrationsweges gegenseitig wegheben, bleibt insgesamt nur noch der im Uhrzeigersinne (also im mathematisch negativen Sinne) durchlaufene Kreis übrig. Dieser Kreis, den wir mit C bezeichnen wollen, muß nur hinreichend groß sein, um alle Singularitäten des Integranden in (20) zu umschließen.

Wir gehen zunächst nur davon aus, daß für $\omega \in C$ stets $|\omega| \gg \omega_0, \omega_i$ ist. Mit $\tau = t - x$ schreibt sich dann die Phase des Integranden unter Benutzung von (16)

$$\omega[t - n(\omega)x] \approx \omega\tau + \frac{\omega_P^2}{2\omega}x := \omega\tau + \frac{\xi}{\omega}. \quad (32)$$

Setzen wir dies nun in (16) ein, erhalten wir

$$E(t, x) = - \int_C \frac{d\omega}{2\pi} \frac{E_0 \omega_i}{\omega^2} \exp \left[-i\sqrt{\xi\tau} \left(\omega\sqrt{\frac{\tau}{\xi}} + \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\xi}{\tau}} \right) \right]. \quad (33)$$

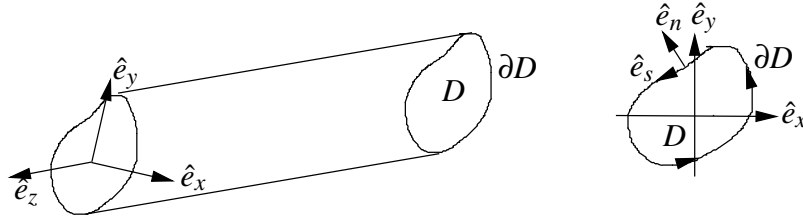


Abbildung 5: Die geometrischen Verhältnisse des zylindrischen Wellenleiters: Der Wellenleiter liegt mit seiner Achse parallel zur z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$. Der Querschnitt ist also in der xy -Ebene gelegen und ein kompaktes Gebiet D . Dessen Rand ∂D ist bzgl. des ebenen kartesischen Systems $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$ positiv orientiert. Der Vektor \hat{e}_s bezeichnet den Tangentenvektor an ∂D und \hat{e}_n den stets nach außen weisenden Normalenvektor an ∂D in der xy -Ebene: $\hat{e}_n = \hat{e}_s \times \hat{e}_z$.

Wir wählen nun für C die Parametrisierung

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{\xi}{\tau}} \exp(i\varphi), \quad (34)$$

wobei wir voraussetzen, daß ξ/τ hinreichend groß, d.h. $\tau = t - x$ hinreichend klein, ist. Noch den negativen Umlaufsinn berücksichtigt, finden wir damit für (33)

$$E(t, x) = iE_0\omega_i \sqrt{\frac{\tau}{\xi}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \exp(-i\varphi - 2i\sqrt{\xi\tau} \cos \varphi) = E_0\omega_i \sqrt{\frac{\tau}{\xi}} J_1(2\sqrt{\tau\xi}). \quad (35)$$

Dabei ist J_1 die Besselfunktion erster Art. In der Tat stimmt (28) mit der asymptotischen Form von J_1 für große $\sqrt{\tau\xi}$ überein. Bei unserer jetzigen Herleitung entfällt aber die Voraussetzung, daß ξ hinreichend groß sein muß, so daß die jetzige Form (35) auch für kleine x eine gute Näherung darstellt. Wir bemerken noch, daß die Frequenz des Vorläufers nur von der Tiefe x und der Plasmafrequenz ω_P und nicht von der Frequenz ω_i der einfallenden Welle abhängt.

3 Wellenleiter im Vakuum

In diesem Abschnitt leiten wir die Standardtheorie der zylindrischen Wellenleiter her. Wir wollen zunächst den Fall allgemeinen Querschnitts betrachten, d.h. die Leitlinie des Zylinders sei eine beliebige abschnittsweise glatte Kurve. Wir legen die Zylinderachse in die z -Richtung eines kartesischen Koordinatensystems, so daß die Leitlinie für beliebiges z ein und dasselbe kompaktes Gebiet D in der xy -Ebene umschließt. Die Leitlinie ist dann ∂D , und wir wollen in diese in positive Richtung, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn orientieren. Wie üblich soll die Orientierung des kartesischen Systems die Reihenfolge (x, y, z) besitzen. Dann bezeichnen wir mit \hat{e}_s den Einheitstangentenvektor an ∂D in positiver Orientierungsrichtung und den nach außen weisenden Normalenvektor an die Leitlinie mit \hat{e}_n . Es gilt dann offenbar $\hat{e}_n = \hat{e}_s \times \hat{e}_z$. Diese geometrischen Verhältnisse werden in der Abbildung 5 skizziert.

3.1 Die Maxwellgleichungen und Randbedingungen

Wir setzen im folgenden voraus, daß das Innere des Hohlleiters als Vakuum behandelt werden kann, in dem sich keinerlei Ladungen oder Magnete befinden. Dann gelten die Maxwellgleichungen in der Form

$$\partial_t \mathbf{B} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (36)$$

Bilden wir die Zeitableitung der zweiten und die Rotation der ersten Gleichung, finden wir zusammen mit der dritten Gleichung, daß \mathbf{E} der Wellengleichung genügen muß. Umgekehrt folgt durch Bildung der Zeitableitung der ersten und der Rotation der zweiten Gleichung die Wellengleichung für \mathbf{B} , d.h. es gilt

$$\square \mathbf{E} = \square \mathbf{B} = 0 \quad (37)$$

Nunmehr nehmen wir an, das Material unseres Hohlleiters sei ideal leitfähig. Daraus folgen die Randbedingungen an \mathbf{E} und \mathbf{B} . Zu deren Herleitung bezeichnen wir mit $\mathbf{x}_\perp = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$ die Projektion des Ortsvektors \mathbf{x} in die (xy) -Ebene. Im folgenden bedeutet ein Ausdruck der Art $\mathbf{E}|_{\partial D}$, daß der Ausdruck für beliebiges z gilt und $\mathbf{x}_\perp \in \partial D$, also auf der Leitkurve des Zylinders in der durch z spezifizierten Ebene senkrecht zur Zylinderachse liegt.

Es ist klar, daß bei der vorausgesetzten idealen Leitfähigkeit des Hohlleiters die Tangentialkomponenten von \mathbf{E} an den Zylindermantel verschwinden müssen, d.h. es gelten die Randbedingungen

$$E_s|_{\partial D} = \hat{e}_s \mathbf{E}|_{\partial D} = E_z|_{\partial D} = 0. \quad (38)$$

Wir wollen weiter die Methode der Fouriertransformation, die wir schon oben im Falle eines dispergierenden Mediums mit Erfolg angewandt haben, auch hier nutzen, d.h. es genügt zunächst Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit zu betrachten

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) \exp(-i\omega t), \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) \exp(-i\omega t). \quad (39)$$

Jetzt ist es auch einfacher, Randbedingungen an $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{x})$ herzuleiten. Aus der ersten Gleichung (36) folgt zusammen mit $\hat{e}_s \times \hat{e}_z = \hat{e}_n$

$$-i\omega \hat{e}_n \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x})|_{\partial D} = (\partial_s E_z - \partial_z E_s)|_{\partial D} = 0 \Rightarrow B_n|_{\partial D} = 0, \quad (40)$$

denn die Tangentialkomponenten von \mathbf{E} sind ja gemäß (38) entlang des Zylindermantels konstant. Genauso leiten wir aus der zweiten Gleichung (36) die Randbedingung

$$\partial_n B_z|_{\partial D} = 0 \quad (41)$$

her.

Die Wellengleichung (37) geht für unsere harmonische Zeitabhängigkeit (39) in die *Helmholtzgleichung* über:

$$(\Delta + \omega^2) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) = (\Delta + \omega^2) \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{mit } \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \Delta_\perp + \partial_z^2. \quad (42)$$

Aufgrund der Translationssymmetrie des Problems in z -Richtung können wir die Helmholtzgleichung in \mathbf{x}_\perp und z separieren, d.h. wir können $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{x})$ und $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{x})$ als Produkt einer Funktion, die nur von z und einer, die nur von \mathbf{x}_\perp abhängt, ansetzen. Diesen Ansatz in (42) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) &= \mathbf{E}_1(\omega, k_z, \mathbf{x}_\perp) \exp(ik_z z) + \mathbf{E}_2(\omega, k_z, \mathbf{x}_\perp) \exp(-ik_z z), \\ \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) &= \mathbf{B}_1(\omega, k_z, \mathbf{x}_\perp) \exp(ik_z z) + \mathbf{B}_2(\omega, k_z, \mathbf{x}_\perp) \exp(-ik_z z), \end{aligned} \quad (43)$$

wobei der erste Anteil gemäß unseres harmonischen Ansatzes (39) einer in positive, der zweite einer in negative z -Richtung fortschreitenden Welle entspricht. Die Funktionen $\mathbf{E}_j(\omega, k_z, \mathbf{x}_\perp)$ und $\mathbf{B}_j(\omega, k_z, \mathbf{x}_\perp)$ genügen jeweils der ebenen Helmholtzgleichung:

$$(\Delta_\perp + \omega^2 - k_z^2)\mathbf{E}_j(\omega, k_z, \mathbf{x}_\perp) = (\Delta_\perp + \omega^2 - k_z^2)\mathbf{B}_j(\omega, k_z, \mathbf{x}_\perp) \quad (44)$$

3.2 Entwicklung der longitudinalen Feldanteile nach Eigenfunktionen

Nun können wir uns vollständig der Entwicklung dieser Felder (44) nach den Eigenfunktionen des zweidimensionalen Laplaceoperators widmen. Da die folgende Rechnung etwas verwickelt ist, sei zunächst die Strategie erläutert: Wir bestimmen als erstes die allgemeine Form dieser Entwicklung für die Felder E_z und B_z , weil wir für diese die Randbedingungen (38) und (41) besitzen. Wir wollen zeigen, daß wir alle im Inneren unseres Hohlleiters erlaubten Feldkonfiguration mit harmonischer Zeitabhängigkeit in zwei Sätze von Eigenfunktionen des Laplaceoperators im Sinne einer verallgemeinerten Fourierreihe entwickeln können.

Dabei wird sich ergeben, daß es drei Sorten Felder gibt, nämlich

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in D : E_z^{(\text{TE})} &= 0 \text{ transversal elektrisch oder TE,} \\ \forall \mathbf{x} \in D : B_z^{(\text{TM})} &= 0 \text{ transversal magnetisch oder TM,} \\ \forall \mathbf{x} \in D : E_z^{(\text{TEM})} &= B_z^{(\text{TEM})} = 0 \text{ transversal elektromagnetisch oder TEM.} \end{aligned} \quad (45)$$

Es wird sich zeigen, daß sich die TE- sowie die TM-Moden nur mit einer höheren als einer bestimmten durch die von der Form der Leitkurve abhängigen Grenzfrequenz ungedämpft entlang des Hohlleiters ausbreiten können, während sie für niedrigere Frequenzen stets gedämpft sind, weil sie rein imaginäre k_z besitzen. Die letzteren nennt man *evaneszente Moden*, und sie sind von besonderem Interesse für unseren Fall. Wir werden sehen, daß die Nimtzsche Behauptung, wir hätten es hierbei mit Überlichtgeschwindigkeiten zu tun, irrig ist, indem der Begriff der *Gruppengeschwindigkeit* in diesem Falle seine physikalische Bedeutung vollends einbüßt.

Der Vollständigkeit halber wollen wir allerdings auch noch zeigen, daß die TEM-Mode sich mit jeder Frequenz in den Hohlleiter ungedämpft wie eine freie Welle, also mit der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit 1 (also mit Lichtgeschwindigkeit im Vakuum) ausbreitet. Diese Mode ist insbesondere in der Technik daher besonders beliebt. Unsere Analyse wird zeigen, daß sie aufgrund des Poincareschen Lemmas nur in Wellenleitern mit *mehrfach zusammenhängendem Gebiet* D existieren kann. Deshalb ist auch das *Koaxialkabel* eine beliebte Realisierung für Wellenleiter in der HF-Technik (man betrachte sich nur das Kabel, das man gewöhnlich verwendet, um das Signal von der Antenne zum häuslichen Fernseher fortzuleiten!).

Der Laplaceoperator ist bzgl. des Funktionenraumes $L^2(D)$ hermitesch, und wir können die Eigenfunktionen reell wählen. Wir definieren zur Bestimmung von \mathbf{E}_z zunächst den Satz $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$

$$\Delta_\perp \varphi(\mathbf{x}_\perp) = -\omega_m^2 \varphi(\mathbf{x}_\perp), \quad \varphi|_{\partial D} = 0. \quad (46)$$

Dabei sind die ω_m^2 reelle positive Zahlen und die φ_m bilden einen orthogonalen Satz von Funktionen. Zum Beweise müssen wir uns nur des Stokesschen Integralsatzes für die Ebene bedienen:

$$\int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \varphi_{m'}(\mathbf{x}_\perp) \Delta_\perp \varphi_m(\mathbf{x}_\perp) = \int_{\partial D} ds \varphi_{m'} \partial_s \varphi_m + \int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \Delta_\perp \varphi_{m'}(\mathbf{x}_\perp) \varphi_m(\mathbf{x}_\perp). \quad (47)$$

Das Wegintegral verschwindet, wegen der Randbedingung (46). Für die verbleibenden Flächenintegrale folgt aufgrund von (46)

$$(\omega_{m'}^2 - \omega_m^2) \int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \varphi_{m'}(\mathbf{x}_\perp) \varphi_m(\mathbf{x}_\perp) = 0, \quad (48)$$

so daß für $\omega_{m'} \neq \omega_m$ folgt, daß die Eigenfunktionen orthogonal zueinander sind. Sind die ω_m für verschiedene m nicht alle verschieden (Fall der „Entartung“), bilden die Funktionen mit gegebenem ω_m einen (i.a. endlichdimensionalen) Unterraum von $L^2(D)$, und wir können einen beliebigen orthonormierten Satz von Wellenfunktionen auswählen, d.h. wir können stets die φ_m so wählen, daß gilt

$$\int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \varphi_m(\mathbf{x}_\perp) \varphi_{m'}(\mathbf{x}_\perp) = \delta_{mm'}. \quad (49)$$

Daß $\omega_m^2 \geq 0$ folgt durch eine weitere Anwendung des Stokesschen Satzes in der Ebene und Verwenden der Gleichungen (46) und (49):

$$\int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \nabla_\perp \varphi_m(\mathbf{x}_\perp) \nabla_\perp \varphi_{m'}(\mathbf{x}_\perp) = \omega_m^2 \delta_{mm'}. \quad (50)$$

Da das Integral auf der linken Seite offenbar positiv semidefinit ist, muß also $\omega_m^2 \geq 0$ sein, wie behauptet.

Wir bemerken weiter, daß wir i.a. durch eine endliche Anzahl von Schnitten das Gebiet D in lauter *einfach zusammenhängende* Teilgebiete D_k zerlegen können. Angenommen $\omega^2 = 0$ sei ein Eigenwert. Dann wäre die dazugehörige Eigenfunktion eine harmonische Funktion der Ebene, d.h. es wäre $\Delta_\perp \varphi = 0$ im Inneren der Gebiete D_k . Die reellen harmonischen Funktionen in der Ebene sind aber genau durch die Real- oder Imaginärteile von im Inneren von D holomorphen Funktionen definiert. Nach dem Cauchyschen Theorem können die holomorphen Funktionen aber als komplexe Kurvenintegrale für die in Rede stehenden Gebiete entlang des Randes ∂D definiert werden. Da die Funktionen aber entlang dieses Gebietes identisch verschwinden, muß die Funktion überhaupt verschwinden, woraus sich ergibt, daß die $\omega_m^2 \neq 0$, also stets $\omega_m^2 > 0$ gelten muß.

Wir sind nun gewappnet, die Reihenentwicklung von E_z bewerkstelligen zu können:

$$E_z(\omega, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(z) \varphi_m(\mathbf{x}_\perp). \quad (51)$$

Gemäß (43) und (44) muß dabei a_m die Gestalt

$$a_m(z) = A_m \exp(ik_{zm}z) + B_m \exp(-ik_{zm}z) \text{ mit} \quad (52)$$

$$k_{zm} = \begin{cases} \pm \sqrt{\omega^2 - \omega_m^2} & \text{für } \omega^2 \geq \omega_m^2 \\ \pm i \sqrt{\omega_m^2 - \omega^2} & \text{für } \omega^2 < \omega_m^2 \end{cases}$$

Das Vorzeichen für die k_{zm} muß je nach der physikalischen Situation näher bestimmt werden. Wir werden weiter unten sehen, daß dies wieder aus der Kausalitätsbedingung bestimmt wird.

Wenden wir uns nun der Entwicklung von B_z nach Eigenmoden des auf D eingeschränkten Laplaceoperators zu. Wir müssen uns dabei aber auf andere Eigenfunktionen stützen, nämlich diejenigen, welche die Randbedingung (41) erfüllen. Wir bezeichnen sie mit $\{\psi_m\}_{m=0}^{\infty}$:

$$(\Delta_\perp + \tilde{\omega}_m^2) \psi_m(\mathbf{x}_\perp) = 0, \quad \partial_n \psi_m|_{\partial D} = 0. \quad (53)$$

Wir haben hier die Eigenfunktionen von 0 an durchnummeriert, weil hier sicher die „Nullmode“ mit $\tilde{\omega}_0^2 = 0$ eine Eigenlösung ist. Es ist also stets $\psi_0 = 1/\sqrt{A_D}$, wo A_D die Fläche des kompakten Wellenleiterquerschnittes bezeichnet Lösung zum Eigenwert 0. Die $\tilde{\omega}_m$ werden überhaupt i.a. verschieden von den ω_m sein!

Wie oben finden wir aus (53) die Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \psi_m(\mathbf{x}_\perp) \psi_{m'}(\mathbf{x}_\perp) &= \delta_{mm'}, \\ \int_D d^2(\mathbf{x}_\perp) [\nabla_\perp \psi_m(\mathbf{x}_\perp)] [\nabla_\perp \psi_{m'}(\mathbf{x}_\perp)] &= \tilde{\omega}_m^2 \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (54)$$

Wie eben bei E_z erhalten wir damit für B_z die Entwicklung

$$\begin{aligned} B_z(\omega, \mathbf{x}) &= \sum_{m=0}^{\infty} [C_m \exp(i\tilde{k}_{zm}z) + D_m \exp(-i\tilde{k}_{zm}z)] \psi_m(\mathbf{x}_\perp) \quad \text{mit} \\ \tilde{k}_{zm} &= \begin{cases} \pm \omega \sqrt{1 - \frac{\tilde{\omega}_m^2}{\omega^2}} & \text{für } \omega^2 \geq \tilde{\omega}_m^2 \\ \pm i\omega \sqrt{\frac{\tilde{\omega}_m^2}{\omega^2} - 1} & \text{für } \tilde{\omega}_m^2 < \omega^2. \end{cases} \end{aligned} \quad (55)$$

3.3 Zur vollständigen Bestimmung des elektrischen Feldes

Wir wollen nun zeigen, daß wir aus den eben angegebenen Entwicklungen des Longitudinalanteils des elektromagnetischen Feldes nach den vollständigen Orthonormalsystemen (VONS_n) $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ und $\{\psi_m\}_{m=0}^{\infty}$ das vollständige elektromagnetische Feld gewinnen können, wobei wir die Behauptung (45) gewinnen werden.

Wir beginnen mit der Vervollständigung des elektrischen Feldes. Dazu gehen wir davon aus, daß die z -Komponente des elektrischen Feldes durch verallgemeinerten Fourierentwicklungen (51) und (52) gegeben ist und konstruieren daraus die transversalen Komponenten des elektrischen Feldes:

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_\perp(\omega, \mathbf{x}) + E_z(\omega, \mathbf{x}) \hat{e}_z. \quad (56)$$

Aus der dritten Gleichung (36), also $\text{div} \mathbf{E} = 0$ und den Randbedingungen (38) folgt

$$\text{div} \mathbf{E}_\perp = \text{div}_\perp \mathbf{E}_\perp = -\partial_z E_z \Rightarrow \text{div} \mathbf{E}_\perp|_{\partial D} = 0. \quad (57)$$

Daraus folgt, daß sich \mathbf{E}_\perp nach dem VONS $\{\nabla_\perp \varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ entwickeln läßt und das Feld selbst durch

$$\mathbf{E}_\perp(\omega, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(z) \text{grad}_\perp \varphi_m(\mathbf{x}_\perp) + \mathbf{E}'_\perp(\omega, \mathbf{x}) \quad \text{mit } \text{div}_\perp \mathbf{E}'_\perp(\omega, \mathbf{x}) = 0 \quad (58)$$

gegeben ist. Um dies einzusehen, brauchen wir nur $\text{div}_\perp \mathbf{E}$ mit φ_m zu multiplizieren, über D zu integrieren und schließlich vom Stokesschen Theorem und den Randbedingungen (46) Gebrauch zu machen:

$$\int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \varphi_m(\mathbf{x}_\perp) \text{div} \mathbf{E}_\perp(\omega, \mathbf{x}) = - \int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \mathbf{E}_\perp(\omega, \mathbf{x}) \nabla_\perp \varphi_m(\mathbf{x}_\perp). \quad (59)$$

Verschwundet also die rechte Seite für alle $m \in \mathbb{N}_{>0}$, dann muß wegen der Vollständigkeit des VONS $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ die Divergenz des Feldes $\mathbf{E}_\perp(\omega, \mathbf{x})$ verschwinden. Die b_m lassen sich aber wegen

(50) aus E_z gewinnen:

$$b_m(z) = -\frac{1}{\omega_m^2} \int_D d^2\mathbf{x}_\perp \operatorname{div} \mathbf{E}_\perp(\omega, \mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{x}_\perp) = \frac{1}{\omega_m^2} \int_D d^2\mathbf{x}_\perp \varphi_m(\mathbf{x}_\perp) \partial_z E_z = \frac{1}{\omega_m^2} \frac{da_m}{dz} \quad (60)$$

oder wegen (52)

$$b_m(z) = \frac{ik_{zm}}{\omega_m^2} [A_m \exp(ik_{zm}z) - B_m \exp(-ik_{zm}z)] \quad (61)$$

Weiter ist nun der divergenzfreie Anteil des Feldes \mathbf{E}_\perp , also \mathbf{E}'_\perp in (58), zu bestimmen. Dieser ist, wie jedes divergenzfreie Feld als Rotation darstellbar. Da $\hat{E}_z \mathbf{E}'_\perp = 0$ ist, kann das Vektorpotential in Richtung der z -Achse gewählt werden, d.h.

$$\mathbf{E}'_\perp(\omega, \mathbf{x}) = -\operatorname{rot} [\psi(\omega, \mathbf{x}) \hat{e}_z] = \hat{e}_z \times \nabla_\perp \psi. \quad (62)$$

Weiter gilt nun wegen (38)

$$0 = \hat{e}_s \mathbf{E}_\perp|_{\partial D} = (\hat{e}_s \times \hat{e}_z) \nabla_\perp \psi|_{\partial D} = \partial_n \psi|_{\partial D}, \quad (63)$$

so daß sich ψ nach dem VONS $\{\psi_m\}_{m=0}^\infty$ entwickeln läßt, und es folgt wegen $\psi_0 = \text{const}$:

$$\mathbf{E}'_\perp = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(z) \hat{e}_z \times \nabla_\perp \psi_m(\mathbf{x}_\perp). \quad (64)$$

Man rechnet aus (64) unter Verwendung von (54) sofort nach, daß

$$c_m(z) = -\frac{1}{\tilde{\omega}_m} \int_D d^2\mathbf{x}_\perp \mathbf{E}_\perp(\omega, \mathbf{x}) [\hat{e}_z \times \nabla_\perp \psi_m(\mathbf{x}_\perp)] \quad (65)$$

Dies läßt sich mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes in der Ebene noch ein wenig umformulieren:

$$c_m = -\frac{1}{\tilde{\omega}_m} \int_D d^2\mathbf{x}_\perp \hat{e}_z \operatorname{rot} \mathbf{E}'_\perp(\omega, \mathbf{x}) \psi_m(\mathbf{x}_\perp). \quad (66)$$

Dies bedeutet aber wegen der Vollständigkeit des VONS $\{\psi_m\}_{m=0}^\infty$, daß für $c_m = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_{>0}$ gelten muß $\hat{e}_z \operatorname{rot} \mathbf{E}'_\perp = \text{const}$, so daß die allgemeinste Lösung für \mathbf{E}'_\perp die Gestalt

$$\mathbf{E}'_\perp(\omega, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(z) \hat{e}_z \times \nabla_\perp \psi_m(\mathbf{s}_\perp) + \mathbf{E}''_\perp(\omega, \mathbf{x}) \text{ mit } \hat{e}_z \operatorname{rot} \mathbf{E}''_\perp(\omega, \mathbf{x}) = \text{const} \quad (67)$$

sein muß.

Nun ist aber weiter

$$\int_D d^2\mathbf{x}_\perp \hat{e}_z \operatorname{rot} \mathbf{E}''_\perp = \int_{\partial D} ds \hat{e}_s \mathbf{E}''_s(\omega, \mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_z \operatorname{rot} \mathbf{E}''(\omega, \mathbf{x}) = 0. \quad (68)$$

Es folgt, daß

$$\mathbf{E}'' = \nabla_\perp \psi(\mathbf{x}) \text{ mit } \psi|_{\partial D} = \text{const}. \quad (69)$$

Wegen $\operatorname{div} \mathbf{E}_\perp = 0$ ist also auch

$$\Delta_\perp \psi = 0, \quad (70)$$

so daß für einfach zusammenhängendes D das Potential ψ überhaupt konstant sein muß, und für ein mehrfach zusammenhängendes D folgt aus (42) und (70), daß notwendig

$$\mathbf{E}'_{\perp}(\omega, \mathbf{x}) = [F \exp(i\omega z) + G \exp(-i\omega z)] \text{grad}_{\perp} \psi(\mathbf{x}_{\perp}) \quad (71)$$

sein muß. Diese Wellenmode breitet sich also mit Vakuumlichtgeschwindigkeit und für beliebige ω ungedämpft im Wellenleiter aus.

Schließlich können wir vermöge der ersten Gleichung (36) und der harmonischen Zeitabhängigkeit (39) zusammen mit (60) die Koeffizienten $c_m(z)$ aus (66) auf die Koeffizienten C_m und D_m in (55) zurückführen:

$$\begin{aligned} \hat{e}_z \text{rot } \mathbf{E}'(\omega, \mathbf{x}) &= \hat{e}_z \text{rot } \mathbf{E}(\omega, \mathbf{s}) = i\omega B_z(\omega, \mathbf{x}) \stackrel{(66)}{\Rightarrow} \\ c_m(z) &= -i\omega [C_m \exp(i\tilde{k}_{zm}z) + D_m \exp(-i\tilde{k}_{zm'}z)]. \end{aligned} \quad (72)$$

Wir haben damit bewiesen: Der Transversalanteil des elektrischen Feldes besitzt im allgemeinsten Falle folglich die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i k_{zm}}{\omega_m^2} [A_m \exp(i k_m z) - B_m \exp(-i k_m z)] \nabla_{\perp} \varphi_m(\mathbf{x}_{\perp}) \\ &\quad - i\omega \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_m^2} [C_m \exp(i k_{zm} z) + D_m \exp(-i k_{zm} z)] \hat{e}_z \times \nabla_{\perp} \psi_m(\mathbf{x}_{\perp}) \\ &\quad + [F \exp(i\omega z) + G \exp(-i\omega z)] \nabla_{\perp} \psi(\mathbf{x}_{\perp}), \end{aligned} \quad (73)$$

wobei

$$\Delta_{\perp} \psi(\mathbf{x}_{\perp}) = 0, \quad \psi|_{\partial D} = \text{const.} \quad (74)$$

Wie wir bereits weiter oben festgestellt haben, kann damit ψ nur dann nicht konstant sein, also einen Beitrag zu \mathbf{E} liefern, wenn D mehrfach zusammenhängend ist.

3.4 Zur vollständigen Bestimmung des magnetischen Feldes

Wir wenden uns nun der Bestimmung des magnetischen Feldes zu. Wir werden sehen, daß es bereits vollständig durch die konstanten Koeffizienten, die in (73) bestimmt sind, festgelegt ist. Wir müssen dazu allerdings eine ähnliche Analyse wie im Falle von \mathbf{E} vornehmen:

Zunächst folgt aus (36) und (41)

$$\partial_n \text{div } \mathbf{B}_{\perp}|_{\partial D} = -\partial_n \partial_z B_z|_{\partial D} = 0. \quad (75)$$

Daraus folgt, daß

$$\mathbf{B}_{\perp} = \sum_{m=1}^{\infty} d_m(z) \nabla_{\perp} \psi_m(\mathbf{x}_{\perp}) + \mathbf{B}'_{\perp}. \quad (76)$$

Mit dem Stokesschen Integralsatz in der Ebene finden wir

$$\begin{aligned}
d_m(z) &= \frac{1}{\tilde{\omega}_m^2} \int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \nabla_\perp \psi_m(\mathbf{x}_\perp) \mathbf{B}_\perp(\mathbf{x}) = \\
&= -\frac{1}{\tilde{\omega}_m^2} \int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \psi_m(\mathbf{x}_\perp) \operatorname{div} \mathbf{B}_\perp(\mathbf{x}) = \\
&= \frac{1}{\tilde{\omega}_m^2} \int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \psi_m(\mathbf{x}_\perp) \partial_z B_z = \\
&= \frac{i\tilde{k}_{zm}}{\tilde{\omega}_m^2} [C_m \exp(i\tilde{k}_{zm}z) - D_m \exp(-i\tilde{k}_{zm}z)],
\end{aligned} \tag{77}$$

wobei wir im letzten Schritt (55) benutzt haben. Sind alle $d_m(z)$ also 0, muß $\operatorname{div} \mathbf{B}_\perp$ also verschwinden, so daß

$$\operatorname{div} \mathbf{B}'_\perp = \text{const.} \tag{78}$$

sein muß. Eine erneute Anwendung des Stokesschen Satzes ergibt zusammen mit den Randbedingungen (40) und (53)

$$\int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \operatorname{div} \mathbf{B}'_\perp(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} ds \mathbf{n}(s) \mathbf{B}'_\perp[\mathbf{x}(s)] = \int_{\partial D} ds \mathbf{n}(s) \mathbf{B}_\perp[\mathbf{x}(s)] = 0, \tag{79}$$

so daß

$$\operatorname{div} \mathbf{B}'_\perp = 0 \tag{80}$$

sein muß.

Damit muß \mathbf{B}'_\perp die Rotation eines Vektorfeldes sein, und bei entsprechender Ausnutzung der Eichinvarianz läßt sich dies in der Form

$$\mathbf{B}'_\perp = \hat{e}_z \times \nabla_\perp \varphi(\mathbf{x}) \tag{81}$$

schreiben. Wegen der Randbedingung (40) ergibt sich, daß sich φ nach den Eigenfunktionen φ_m entwickeln lassen muß:

$$\mathbf{B}'_\perp = \sum_{m=1}^{\infty} e_m(z) \hat{e}_z \times \nabla_\perp \varphi_m(\mathbf{x}_\perp) + \mathbf{B}''_\perp, \tag{82}$$

wobei

$$\hat{e}_z \operatorname{rot} \mathbf{B}''_\perp = 0, \tag{83}$$

so daß wiederum

$$\mathbf{B}''_\perp(\mathbf{x}) = f(z) \nabla_\perp \varphi(\mathbf{x}_\perp) \text{ mit } \Delta_\perp \varphi(\mathbf{x}_\perp) = 0 \tag{84}$$

sein muß, so daß diese Mode wieder nur für mehrfach zusammenhängende Gebiete existiert. Wegen (44) muß also in diesem Falle wieder $k_z = \pm\omega$ und also

$$\mathbf{B}''_\perp = [F' \exp(i\omega z) + G' \exp(-i\omega z)] \nabla_\perp \varphi(\mathbf{x}_\perp). \tag{85}$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von $\exp(\pm i\omega z)$ der sich aus der ersten Gleichung (1) ergebenden Gleichung, folgt

$$\mathbf{B}''_\perp = \frac{1}{\omega} [F \exp(i\omega z) - G \exp(-i\omega z)] \hat{e}_z \times \nabla_\perp \psi(\mathbf{x}_\perp). \tag{86}$$

Es fehlt nur noch die Bestimmung der $e_m(z)$ in (82):

$$e_m(z) = \frac{1}{\omega_m^2} \int_D d^2 \mathbf{x}_\perp \mathbf{B}'_\perp (\hat{e}_z \times \nabla_\perp \varphi_m), \quad (87)$$

was man wieder durch einige Manipulationen unter dem Integralzeichen unter Zuhilfenahme des Stokesschen Integralsatzes in der Ebene und Benutzung der Relationen (50) nachweist.

Insgesamt erhalten wir also für das Magnetfeld:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\perp = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i\omega}{\omega_m^2} [A_m \exp(ik_{zm}z) + B_m \exp(-ik_{zm}z)] \hat{e}_z \times \nabla_\perp \varphi_m(\mathbf{x}_\perp) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i\tilde{k}_{zm}}{\tilde{\omega}_m^2} [C_m \exp(i\tilde{k}_{zm}z) - D_m \exp(-i\tilde{k}_{zm}z)] \nabla_\perp \psi_m(\mathbf{x}_\perp) \\ & + [F \exp(i\omega z) - G \exp(-i\omega z)] \hat{e}_z \times \nabla_\perp \psi(\mathbf{x}_\perp). \end{aligned} \quad (88)$$

3.5 Zusammenfassung der erreichten Resultate

Wir können nunmehr die Gleichungen (51), (52), (55), (73) und (88) dahingehend zusammenfassen, daß jedes elektromagnetische Feld, im Inneren des Wellenleiters nach den folgenden Feldmoden entwickeln läßt:

$$\left. \begin{aligned} E_{zm}^{\pm\text{TM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) = \varphi_m(\mathbf{x}_\perp), & \quad \mathbf{E}_{\perp m}^{\pm\text{TM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) = \frac{\pm i k_{zm}}{\omega_m^2} \nabla_\perp \varphi_m(\mathbf{x}_\perp) \\ B_{zm}^{\pm\text{TM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) = 0, & \quad \mathbf{B}_{\perp m}^{\pm\text{TM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) = \frac{i\omega}{\omega_m^2} \hat{e}_z \times \nabla_\perp \varphi_m(\mathbf{x}_\perp) \\ E_{zm}^{\pm\text{TE}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) = 0, & \quad \mathbf{E}_{\perp m}^{\pm\text{TE}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) = -\frac{i\omega}{\tilde{\omega}_m^2} \hat{e}_z \times \nabla_\perp \psi_m(\mathbf{x}_\perp) \\ B_{zm}^{\pm\text{TE}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) = \psi_m(\mathbf{x}_\perp), & \quad \mathbf{B}_{\perp m}^{\pm\text{TE}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) = \pm \frac{i\tilde{k}_{zm}}{\tilde{\omega}_m^2} \nabla_\perp \psi_m(\mathbf{x}_\perp) \\ E_z^{\pm\text{TEM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) = 0, & \quad \mathbf{E}_\perp^{\pm\text{TEM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) = \nabla_\perp \psi''(\mathbf{x}_\perp) \\ B_z^{\pm\text{TEM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) = 0, & \quad \mathbf{B}_\perp^{\pm\text{TEM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) = \pm \hat{e}_z \times \nabla_\perp \psi''(\mathbf{x}_\perp) \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Die allgemeinste Lösung der Maxwellgleichungen mit harmonischer Zeitabhängigkeit, die den von dem Hohlleiter aufgezungenen Randbedingungen genügt, lautet also

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) = & \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\omega) \exp(ik_{zm}z) \mathbf{E}_m^{+\text{TM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) + B_m(\omega) \exp(-ik_{zm}z) \mathbf{E}_m^{-\text{TM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp)] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [C_m(\omega) \exp(i\tilde{k}_{zm}z) \mathbf{E}_m^{+\text{TE}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) + D_m(\omega) \exp(-i\tilde{k}_{zm}z) \mathbf{E}_{zm}^{-\text{TE}}(\omega, \mathbf{x}_\perp)] \\ & + E(\omega) \exp(i\omega z) \mathbf{E}^{+\text{TEM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) + F(\omega) \exp(-i\omega z) \mathbf{E}^{-\text{TEM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) \\ \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) = & \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\omega) \exp(ik_{zm}z) \mathbf{B}_m^{+\text{TM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) + B_m(\omega) \exp(-ik_{zm}z) \mathbf{B}_m^{-\text{TM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp)] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [C_m(\omega) \exp(i\tilde{k}_{zm}z) \mathbf{B}_m^{+\text{TE}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) + D_m(\omega) \exp(-i\tilde{k}_{zm}z) \mathbf{B}_{zm}^{-\text{TE}}(\omega, \mathbf{x}_\perp)] \\ & + E(\omega) \exp(i\omega z) \mathbf{B}^{+\text{TEM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) + F(\omega) \exp(-i\omega z) \mathbf{B}^{-\text{TEM}}(\omega, \mathbf{x}_\perp) \end{aligned} \quad (90)$$

Das Feld im Zeitbereich ist also durch die Fourierdarstellung

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) \exp(-i\omega t), \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) \exp(-i\omega t) \quad (91)$$

bestimmt, wobei für $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{x})$ und $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{x})$ der Ausdruck (90) einzusetzen ist.

3.6 Wellenpakete

Jetzt müssen wir uns nur noch überlegen, welche Anfangsbedingungen wir vorgeben müssen, damit die Lösung eindeutig wird *und die in Frage stehende physikalische Situation* beschreibt. Bei den Nimtzschen Experimenten wird zu einem gegebenen Zeitpunkt (nehmen wir der Einfachheit halber $t = 0$) an einer Stelle des Wellenleiters ($z = 0$) ein Signal eingeschaltet. Wir interessieren uns nun nur für die Zeitentwicklung der elektromagnetischen Welle für $z > 0$ und wir nehmen an, daß zur Zeit $t = 0$ kein elektromagnetische Feld für $z > 0$ vorhanden war. Das Signal muß sich also nach wachsenden z hin ausbreiten, und es kann kein Signal von größeren z her zur Stelle $z = 0$ laufen. Dies ist eine spezielle Form der sog. *Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung*. Dies bedeutet aber, daß für $z > 0$ alle Koeffizienten mit „nach kleineren z “ propagierenden Moden verschwinden müssen. Für $\omega > 0$ ist dies

$$B_m = D_m = F \equiv 0. \quad (92)$$

Dies ist sicher korrekt für die Moden, die reelle k_{zm} und \tilde{k}_{zm} besitzen. Für $\omega < 0$ setzen wir auch die in (92) angegebenen Koeffizienten 0. Wir müssen dann nur die k_{zm} und \tilde{k}_{zm} ebenfalls negativ wählen, d.h. das Vorzeichen der k_{zm} und \tilde{k}_{zm} ist stets das gleich wie das von ω , so daß in (52) und (55) in unserem Falle stets das obere Vorzeichen zu wählen ist.

Wir müssen nun nur noch das Vorzeichen für die evaneszenten Moden, die rein imaginäre Wellenzahlen besitzen, bestimmen. Anschaulich ist klar, daß wir in (52) und (55) das obere Vorzeichen zu wählen haben, weil dies gedämpften Wellen und nicht exponential anwachsenden Wellen entspricht. Es läßt sich dies wieder aus dem *Kausalitätsprinzip* begründen: Für $t = 0$ darf in der zur Diskussion stehenden Situation für kein $z > 0$ das elektromagnetische Feld von 0 verschieden sein. Da für $\omega \rightarrow \pm\infty$ wieder $k_{zm} \cong |\omega|$ und $\tilde{k}_{zm} \cong |\omega|$, muß also wie bei dem Beweis der Kausalitätsbeziehung (15) die Kontur in der oberen Halbebene im Unendlichen geschlossen werden, wenn man das Fourierintegral mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes auswerten will, so daß der Beitrag des im Unendlichen gelegenen Teils der Kontur verschwindet. Damit also für $t = 0$ entsprechend unserer Anfangsbedingung die Felder verschwinden, muß der Schnitt der Wurzel in (52) und (55) infinitesimal in die untere Halbebene verschoben werden, so daß sie keinen Beitrag liefert, wenn wir die Kontur oben schließen, d.h. wir müssen wieder ω durch $\omega + i\eta$ mit $\eta \rightarrow 0^+$ (was den rechtsseitigen Grenzwert bezeichnen soll) ersetzen. Die Wurzel definieren wir im folgenden als ihren Hauptwert: Die komplexe Ebene wird also entlang der negativen reellen Achse aufgeschlitzt und die Wurzel für positive reelle Argumente als positiv definiert. Nähert man sich dem Schnitt entlang der negativ reellen Achse von oben (unten), so ist die Wurzel positiv (negativ) imaginär zu nehmen. Dies ist auch die üblicherweise in Computersystemen definierte Wurzel (z.B. in dem hier verwendeten Fortrancompiler g77 aus der GNU-Compilerfamilie oder in Mathematica 4.0). Hierbei ist nur Vorsicht geboten, wenn das Argument der Wurzel *auf dem Schnitt entlang der negativen reellen Achse zu liegen kommt*. Die Implementation der Funktionen ist dort durchaus unterschiedlich. Man kann dem aber durch explizite Wahl eines endlichen, wenn auch kleinen,

positiven Parameter η begegnen, so daß man stets nur die mathematische Hauptwertdefinition in der Numerik verwendet. Somit haben wir also folgende Festlegung zu treffen:

$$\begin{aligned} k_{zm} &= \omega \sqrt{1 - \frac{\omega_m^2}{(\omega + i\eta)^2}}, \\ \tilde{k}_{zm} &= \omega \sqrt{1 - \frac{\tilde{\omega}_m^2}{(\omega + i\eta)^2}}. \end{aligned} \tag{93}$$

Wie schon oben erwähnt ist η eine beliebig kleine positive reelle Zahl, die das Vorzeichen der Wurzel so festlegt, daß die Retardierungsbedingung des Propagators für die jeweiligen Moden garantiert ist. Wir sehen, daß die evaneszenten Moden *allesamt gedämpft* sind, und zwar für positive wie für negative ω , so wie es auch die Konvergenz des Fourierintegrals erfordert.

Es wird weiter klar, daß nur die TEM-Moden einer dispersionsfreien Signalübertragung entsprechen: Alle Frequenzen propagieren mit Vakuumlichtgeschwindigkeit, und die Signalforn bleibt entlang der Wellenleiterachse erhalten. Wir haben bei der obigen Analyse gesehen, daß diese TEM-Moden nur in Wellenleitern mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt D möglich sind. Es ist daher das Koaxialkabel in der Nachrichtentechnik eine vorteilhafte Konfiguration: es kann so dimensioniert werden, daß in einem bestimmten Frequenzbereich allein die dispersionsfreien TEM-Moden ungedämpft übertragen werden, was eine unverzerrte Fortleitung des Signals ermöglicht. Bei entsprechender Dimensionierung des Kabels können alle anderen Anteile gedämpft sein.

In den Nimtzschen Versuchen geht es nun aber gerade um den Fall evaneszenter Moden, und auch hier zeigt unser allgemeiner Beweis, daß stets (15) gilt. Wir können unseren idealen Wellenleiter fast als ein spezielles dispergierendes Medium betrachten, mit dem einzigen Unterschied, daß bei dem endlich ausgedehnten Gebiet D eine *diskrete Zahl* von Moden vorliegt.

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch die Berechnung der Koeffizienten A_m , C_m und E besprechen, die aus der Tatsache folgen, daß die TM-, TE- und TEM-Moden zusammengenommen ein vollständiges System orthogonaler (*jedoch nicht normierter!*) Wellenfunktionen für die Maxwellgleichungen mit den oben besprochenen Randbedingungen des idealen Wellenleiters darstellen. Die Vollständigkeit haben wir in den obigen Abschnitten bewiesen. Wir wissen weiter, daß die φ_m und ψ_m jeweils vollständige Orthonormalsysteme der skalaren Helmholtzgleichung sind. Wir haben also lediglich noch die folgenden *Orthogonalitätsrelationen* zu beweisen:

$$\begin{aligned} \int d^2\mathbf{x}_\perp \mathbf{E}_m^{\text{TE}}(\mathbf{x}_\perp) \mathbf{E}_{m'}^{\text{TE}}(\mathbf{x}_\perp) &= \int d^2\mathbf{x}_\perp \mathbf{B}_m^{\text{TE}}(\mathbf{x}_\perp) \mathbf{B}_{m'}^{\text{TE}}(\mathbf{x}_\perp) = -\frac{\omega^2}{\tilde{k}_{zm}^2} \delta_{mm'}, \\ \int d^2\mathbf{x}_\perp \mathbf{E}_m^{\text{TM}}(\mathbf{x}_\perp) \mathbf{E}_{m'}^{\text{TE}}(\mathbf{x}_\perp) &= \int d^2\mathbf{x}_\perp \mathbf{B}_m^{\text{TM}}(\mathbf{x}_\perp) \mathbf{B}_{m'}^{\text{TE}}(\mathbf{x}_\perp) = 0. \end{aligned} \tag{94}$$

Danksagung

Ich möchte den folgenden Lesern dieses FAQ-Artikels, die eine Menge Tippfehler und Unsinn in diesem Skript gefunden haben, danken: Oliver Jennrich, Oliver Gebele, Harald Anlauf. Selbstverständlich gehen die zweifellos immer noch vorhandenen „Bugs“ vollends auf mein Konto.

Literatur

- [Bri14] L. Brillouin, Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien, Ann. Phys. (Leipzig) **44**, 203 (1914).
- [Hee98] H. van Hees, Statistical Physics (1998), <http://cyclotron.tamu.edu/hees/index.html>.
- [Jac83] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, Walter de Gruyter, 2 edn. (1983).
- [LeB96] M. LeBellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne (1996).
- [NH00] G. Nimtz and A. Haibel, Basics of Superluminal Signals, Ann. Phys. (Leipzig) **9**, 1 (2000), <http://archiv.org/abs/physics01/0104063>.
- [Nim98] G. Nimtz, Superluminal signal velocity, Ann. Phys. (Leipzig) **7**, 618 (1998), <http://archiv.org/abs/physics01/0104063>.
- [PP69] P. Pleshko and I. Palócz, Experimental observation of Sommerfeld and Brillouin precursors in the microwave domain, Phys. Rev. Lett. **22**, 1201 (1969), <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.22.1201>.
- [Som07] A. Sommerfeld, Ein Einwand gegen die Relativtheorie der Elektrodynamik und seine Beseitigung, Phys. Zeitschr. **8**, 841 (1907).
- [Som12] A. Sommerfeld, *Heinrich Weber - Festschrift*, chap. Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien, 338–374, Teubner, Leipzig (1912).
- [Som14] A. Sommerfeld, Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien, Ann. Phys. (Leipzig) **44**, 177 (1914).
- [Som78] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik IV, Optik*, Verlag Harri Deutsch (1978).
- [Wal99] E.-U. Wallenborn, Superluminales Tunneln (1999), <http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/nimtz/index.html>.