Übungen zur Kosmologie – Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 6: Längenelement auf der Hypersphäre S_3

(a) **1. Methode**

Die Hypersphäre S_3 ist durch die Gleichung

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \tag{1}$$

definiert. Ableiten ergibt

$$0 = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4 \tag{2}$$

bzw.

$$dx_4^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{x_4^2} \tag{3}$$

Nun kann man im euklidischen Längenelement

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \tag{4}$$

dx_4^2 eliminieren indem man Gleichung (1) nach x_4^2 auflöst und in (3) einsetzt. Damit ergibt sich

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{R^2 - (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)} \tag{5}$$

x_1, x_2, x_3 lassen sich nun noch in den üblichen dreidimensionalen Kugelkoordinaten darstellen, also

$$x_1 = \rho \sin\Theta \cos\phi, \quad x_2 = \rho \sin\Theta \sin\phi, \quad x_3 = \rho\cos\Theta. \tag{6}$$

Dort gilt analog zu Gleichung (1)

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{7}$$

Damit gilt aber auch

$$\rho d\rho = \frac{1}{2} d(\rho^2) = \frac{1}{2} d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 \tag{8}$$

Weiterhin wissen wir, daß für das Längenelement in dreidimensionalen Kugelkoordinaten

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = d\rho^2 + \rho^2 \left(d\Theta^2 + \sin^2\Theta \, d\phi^2\right) \tag{9}$$

gilt. Setzt man nun noch die Gleichungen (7) und (9) in Gleichung (5) ein, so ergibt sich

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 \left(d\Theta^2 + \sin^2\Theta \, d\phi^2\right) + \frac{\rho^2 d\rho^2}{R^2 - \rho^2}. \tag{10}$$

Zusammenfassen des ersten und des letzten Terms ergibt dann die gewünschte Form des Längenelements

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{R^2 \mathrm{d}\rho^2}{R^2 - \rho^2} + \rho^2 \left(\mathrm{d}\Theta^2 + \sin^2\Theta \, \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{11}$$

Zweite Methode:

Wir können auch direkt die Parametrisierung der Hyperfläche in 3D-Kugelkoordinaten vornehmen. Für die obere bzw. untere Hemisphäre gilt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \rho \cos\phi \sin\Theta \\ \rho \sin\phi \sin\Theta \\ \rho \cos\Theta \\ \pm\sqrt{R^2 - \rho^2} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Die holonomen Basisvektoren sind

$$\begin{aligned} \vec{b}_\rho &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\Theta \\ \sin\phi \sin\Theta \\ \cos\Theta \\ \mp\rho/\sqrt{R^2 - \rho^2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_\Theta = \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\Theta \\ \sin\varphi \cos\Theta \\ -\sin\Theta \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{b}_\phi &= \rho \begin{pmatrix} -\sin\phi \sin\Theta \\ \cos\phi \sin\Theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{13}$$

Offenbar sind diese Vektoren zueinander orthogonal, so daß sich in Übereinstimmung mit (11)

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}\vec{x}^2 = \mathrm{d}\rho^2 \vec{b}_\rho^2 + \mathrm{d}\Theta^2 \vec{b}_\Theta^2 + \mathrm{d}\phi \vec{b}_\phi^2 = \mathrm{d}\rho^2 \frac{R^2}{R^2 - \rho^2} + \rho^2 \left(\mathrm{d}\Theta^2 + \mathrm{d}\phi^2 \sin^2\Theta\right) \tag{14}$$

ergibt.

(b) Für das Hyper-Hyperboloid $(x^0)^2 - \vec{x}^2 = R^2$ ergibt sich

$$x^0 \mathrm{d}x^0 - \vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = x^0 \mathrm{d}x^0 - \rho \mathrm{d}\rho = 0, \tag{15}$$

wobei $(\rho, \vartheta, \varphi)$ wieder Standardkugelkoordinaten für $\vec{x}$ bezeichnen, und damit folgt

$$-\eta_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}\vec{x}^2 - (\mathrm{d}x^0)^2 = \mathrm{d}\rho^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{(x^0)^2}\right) + \rho^2 \mathrm{d}\vec{\Omega}^2 = \mathrm{d}\rho^2 \frac{R^2}{\rho^2 + R^2} + \rho^2 \mathrm{d}\vec{\Omega}^2. \tag{16}$$

Dies ist in der Tat das Linienelement für die Kurve in einer 3D Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung $\varkappa = -1/R$.

Aufgabe 7: Scheinbare Helligkeit jenseits des linearen Hubble-Gesetzes

Der gemessene Strahlungsfluß F eines entfernten Objekts ergibt sich über

$$F = \frac{L}{4\pi D^2 (1+z)^2}. \tag{17}$$

Die scheinbare Helligkeit m ist (bis auf Konstanten) definiert über

$$m = \text{const} - 2{,}5 \log(F), \tag{18}$$

und für kleine Rotverschiebungen gilt

$$D \approx \frac{c}{H_0} \left(z - \frac{1}{2}(1+q_0) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right). \tag{19}$$

Setzt man Gleichung (17) in Gleichung (18) ein und absorbiert Konstanten in den ersten Term, so ergibt sich zunächst

$$m = \text{const} - 2{,}5 \log(L) + 5 \log[D(1+z)] \tag{20}$$

Setzt man dies nun die Näherung für D ein, ergibt sich

$$D(1+z) = \frac{c}{H_0} \left[z(1+z) - \frac{1}{2}(1+q_0) z^2 (1+z) + \mathcal{O}(z^3) \right] = \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2}(1-q_0) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right] \tag{21}$$

und schließlich mit (20)

$$m = \text{const} - 2{,}5 \log\left(\frac{L H_0^2}{c^2} \right) + 5 \log\left[z + \frac{1}{2}(1-q_0) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right]. \tag{22}$$

Der letzte Term läßt sich nun noch für kleine z Taylor-entwickeln, indem man benutzt, daß $\log(1 \pm z) \approx \pm z / \ln(10) + \mathcal{O}(z^2)$ für $|z| < 1$. Dann ergibt sich schließlich das gewünschte Resultat

$$m = \text{const} - 2{,}5 \log\left(\frac{L H_0^2}{c^2} \right) + 5 \log(z) + \frac{2{,}5 z}{\ln(10)} (1 - q_0) + \mathcal{O}(z^2). \tag{23}$$