

Übungen zur Kosmologie – Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 6: Längenelement auf der Hypersphäre S_3

(a) **1. Methode**

Die Hypersphäre S_3 ist durch die Gleichung

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (1)$$

definiert. Ableiten ergibt

$$0 = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4 \quad (2)$$

bzw.

$$dx_4^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{x_4^2} \quad (3)$$

Nun kann man im euklidischen Längenelement

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (4)$$

dx_4^2 eliminieren indem man Gleichung (1) nach x_4^2 auflöst und in (3) einsetzt. Damit ergibt sich

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{R^2 - (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)} \quad (5)$$

x_1, x_2, x_3 lassen sich nun noch in den üblichen dreidimensionalen Kugelkoordinaten darstellen, also

$$x_1 = \rho \sin \Theta \cos \phi, \quad x_2 = \rho \sin \Theta \sin \phi, \quad x_3 = \rho \cos \Theta. \quad (6)$$

Dort gilt analog zu Gleichung (1)

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (7)$$

Damit gilt aber auch

$$\rho d\rho = \frac{1}{2} d(\rho^2) = \frac{1}{2} d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 \quad (8)$$

Weiterhin wissen wir, daß für das Längenelement in dreidimensionalen Kugelkoordinaten

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = d\rho^2 + \rho^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\phi^2) \quad (9)$$

gilt. Setzt man nun noch die Gleichungen (7) und (9) in Gleichung (5) ein, so ergibt sich

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\phi^2) + \frac{\rho^2 d\rho^2}{R^2 - \rho^2}. \quad (10)$$

Zusammenfassen des ersten und des letzten Terms ergibt dann die gewünschte Form des Längenelements

$$dl^2 = \frac{R^2 d\rho^2}{R^2 - \rho^2} + \rho^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\phi^2) \quad (11)$$

Zweite Methode:

Wir können auch direkt die Parametrisierung der Hyperfläche in 3D-Kugelkoordinaten vornehmen. Für die obere bzw. untere Hemisphäre gilt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \sin \Theta \\ \rho \sin \phi \sin \Theta \\ \rho \cos \Theta \\ \pm \sqrt{R^2 - \rho^2} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Die holonomen Basisvektoren sind

$$\begin{aligned} \vec{b}_\rho &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \Theta \\ \sin \phi \sin \Theta \\ \cos \Theta \\ \mp \rho / \sqrt{R^2 - \rho^2} \end{pmatrix}, & \vec{b}_\Theta &= \rho \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \Theta \\ \sin \phi \cos \Theta \\ -\sin \Theta \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{b}_\phi &= \rho \begin{pmatrix} -\sin \phi \sin \Theta \\ \cos \phi \sin \Theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Offenbar sind diese Vektoren zueinander orthogonal, so daß sich in Übereinstimmung mit (11)

$$dl^2 = d\vec{x}^2 = d\rho^2 \vec{b}_\rho^2 + d\Theta^2 \vec{b}_\Theta^2 + d\phi^2 \vec{b}_\phi^2 = d\rho^2 \frac{R^2}{R^2 - \rho^2} + \rho^2 (d\Theta^2 + d\phi^2 \sin^2 \Theta) \quad (14)$$

ergibt.

(b) Für das Hyper-Hyperboloid $(x^0)^2 - \vec{x}^2 = R^2$ ergibt sich

$$x^0 dx^0 - \vec{x} \cdot d\vec{x} = x^0 dx^0 - \rho d\rho = 0, \quad (15)$$

wobei $(\rho, \vartheta, \varphi)$ wieder Standardkugelkoordinaten für \vec{x} bezeichnen, und damit folgt

$$-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = d\vec{x}^2 - (dx^0)^2 = d\rho^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{(x^0)^2} \right) + \rho^2 d\vec{\Omega}^2 = d\rho^2 \frac{R^2}{\rho^2 + R^2} + \rho^2 d\vec{\Omega}^2. \quad (16)$$

Dies ist in der Tat das Linienelement für die Kurve in einer 3D Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung $\kappa = -1/R$.

Aufgabe 7: Scheinbare Helligkeit jenseits des linearen Hubble Gesetzes

Der gemessene Strahlungsfluß F eines entfernten Objekts ergibt sich über

$$F = \frac{L}{4\pi D^2(1+z)^2}. \quad (17)$$

Die scheinbare Helligkeit m ist (bis auf Konstanten) definiert über

$$m = \text{const} - 2,5 \log(F), \quad (18)$$

und für kleine Rotverschiebungen gilt

$$D \approx \frac{c}{H_0} \left(z - \frac{1}{2}(1+q_0)z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right). \quad (19)$$

Setzt man nun Gleichung (17) in Gleichung (18) ein und absorbiert Konstanten in den ersten Term, so ergibt sich zunächst

$$m = \text{const} - 2,5 \log(L) + 5 \log(D) + 5 \log(1+z) \quad (20)$$

Setzt man nun die Näherung für D ein, so erhält man

$$m = \text{const} - 2,5 \log\left(\frac{LH_0^2}{c^2}\right) + 5 \log\left[z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 + \mathcal{O}(z^3)\right]. \quad (21)$$

Der letzte Term läßt sich nun noch für kleine z Taylor-entwickeln, indem man benutzt, daß $\log(1 \pm z) \approx \pm z / \ln(10) + \mathcal{O}(z^2)$ für $|z| < 1$. Dann ergibt sich schließlich das gewünschte Resultat

$$m = \text{const} - 2,5 \log\left(\frac{LH_0^2}{c^2}\right) + 5 \log(z) + \frac{2,5z}{\ln(10)} (1-q_0) + \mathcal{O}(z^2). \quad (22)$$